Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić

Rigid-analytische Geometrie

Seminar im Wintersemester 2019/20

Viele Konzepte der reellen oder komplexen Analysis wie Konvergenz, Grenzwerte, Potenzreihen und analytische Funktionen lassen sich allgemein für einen bewerteten, d.h. einen mit einem Absolutbetrag ausgestatteten Körper entwickeln. Auf der einen Seite gibt es die "archimedischen" bewerteten Körper wie zum Beispiel $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, auf der anderen Seite die "nicht-archimedischen" (deren Absolutbetrag eine verschärfte Version der Dreiecksungleichung erfüllt) wie zum Beispiel den Körper der p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$.

Rigid-analytische Geometrie ist ein Analogon zur komplex-analytischen Geometrie (dem Studium komplexer Mannigfaltigkeiten bzw. komplex-analytischer Räume), wobei $\mathbb{C}$ durch einen vollständigen nicht-archimedischen Körper K ersetzt wird. Als Erfinder dieser Theorie gilt John Tate. Seine Motivation bestand darin, p-adische Eigenschaften von Gleichungen - etwa der einer elliptischen Kurve - nicht alleine mit Methoden der algebraischen Geometrie zu untersuchen. Vorbilder hierbei waren die Äquivalenz von algebraischen Kurven über $\mathbb{C}$ und kompakten Riemannschen Flächen, sowie Jean-Pierre Serres GAGA-Theoreme für projektive Varietäten über $\mathbb{C}$. Tate definierte rigid-analytische Räume über K und einen Analytifizierungsfunktor, der jedem K-Schema lokal von endlichem Typ einen rigiden K-Raum zuordnet. Er fand somit einen Weg, auch über K sinnvoll von der algebraischen zur analytischen Welt gehen zu können.

Im Verlauf des Seminars befassen wir uns mit analytischen Funktionen und "analytischen Teilmengen der Einheitskreisscheibe" über K. Dies führt zu sogenannten affinoiden Algebren und, entsprechend, affinoiden Varietäten. Allgemeine rigide Räume erhält man dann durch geeignetes Zusammenkleben dieser affinoiden Varietäten, analog zur Konstruktion von Schemata in der algebraischen Geometrie. Als Beispiel wollen wir Tates elliptische Kurven untersuchen. Diese sind rigide Räume der Form $K^*/q^{\mathbb{Z}}$ mit $|q| < 1$ und spielen eine wichtige Rolle im Tateschen Uniformisierungstheorem für (algebraische) elliptische Kurven über K, falls $K/\mathbb{Q}_p$ eine endliche Erweiterung ist.
Weitere Ziele des Seminars sind die Theoreme A und B für rigid-analytische Steinsche Räume und eine rigid-analytische Version der GAGA-Theoreme.

Zielgruppe: Das Seminar ist für alle interessant und relevant, die sich für algebraische Geometrie, Zahlentheorie, Funktionentheorie oder Funktionalanalysis interessieren. Besonders gut eignet sich das Seminar für Personen, die
a) Algebraische Geometrie gehört haben; oder
b) am Seminar "Garben auf komplexen Räumen" im WS 18/19 bzw. "GAGA" im SS 2019 teilgenommen haben; oder
c) im WS 19/20 die Vorlesung Adische Räume oder Algebraische Zahlentheorie 1 hören möchten.

Zeit und Ort: Donnerstags, 14-16h in INF 205 SR 4.

Vorbesprechung: Am 25.07.2019 um 13:30h in INF 205 SR 4.

Kontakt:
Milan Malčić
INF 205 Raum 03.410
Email: mmalcic@mathi.uni-heidelberg.de