Höchstgewichte

Bang, Hyukjin

July 9, 2017

Abstract

[Vorwort] Der Basiskörper sei stets $\mathbb{R}$. Also die Vektorräme in diesem Vortrag sind endlich dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume. Im allgemeinen setze ich nicht voraus, dass $G = Gl(n)$ ist, sondern ist es $Gl(V)$ gemeint, wenn es die Gruppe G steht. Da wir allerdings den Basiskörper fixiert haben, gilt die Isomorphie. Der Isomorphismus ist aber nicht kanonisch.

1 Nilpotente Lie Algebren

Definition 1.0.1. *(Ideal) Ein* <u>*Ideal*</u> *in einer Lie Algebra* $\mathfrak{g}$ *ist ein linearer Unterraum* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$*, sodass gilt*

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \ , \qquad d.h., \forall x \in \mathfrak{g}, a \in \mathfrak{a} \text{ gilt stets } [x, a] \in \mathfrak{a} \ .$$

Definition 1.0.2. *Eine Lie Algebra* $\mathfrak{g}$ *heißt* <u>*einfach*</u>*, falls* $\mathfrak{g}$ <u>*nicht*</u> *abelsch ist und kein nicht-triviales Ideal besitzt. In anderen Worten, jedes Ideal ist entweder trivial oder ganz* $\mathfrak{g}$*.*

Bemerkung 1.0.3.

- *Ein Ideal in* $\mathfrak{g}$ *ist insbesondere eine Unter-Lie-Algebra. Daher entspricht jedes Ideal der Korrespondenz zu Unter-Liegruppen einem Normalteiler. Explizit sieht man lokal mit dem Zusammenhangsargument, nämlich mithilfe der Eigenschaft*
$$exp(X)exp(A)exp(-X) \in exp(\mathfrak{a}) \ .$$
- *Die Voraussetzung "nicht-abelsch" entspricht den algebraischen Konvention nicht ganz. Oft kann sie durch* $dim(\mathfrak{g}) > 1$ *ersetzt werden.*
- *Ein Ideal ist genau ein ad-invarianter Unterraum, sodass die Einfachheit sich äquivalent verstehen lassen als: "Die adjungierte Darstellung ist nicht-trivial und irreduzibel."*

- *Falls* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Ideale in* $\mathfrak{g}$ *sind, so sind auch* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, *und* $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$. *Der Quotient* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *ist eine Lie Algebra und für jeden Lie Algebra Homomorphismus* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *ist* $Ker(\varphi)$ *ein Ideal.*

Definition 1.0.4.

(i) *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Lie Algebra. Das Ideal* $\mathcal{D}\mathfrak{g} := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *heißt die derivierte Algebra oder Kommutatoralgebra von* $\mathfrak{g}$.

(ii) *Die absteigende Kette von Idealen*

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^1 := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \supset \mathfrak{g}^2 := [\mathfrak{g}^1,\mathfrak{g}^1] \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^{i+1} := [\mathfrak{g}^i,\mathfrak{g}^i] \supset \cdots$$

heißt die derivierte oder Kommutatorfolge. Falls $\mathfrak{g}^i = 0$ *für ein* i, *so heißt* $\mathfrak{g}$ *auflösbar.*

(iii) *Die absteigende Kette von Idealen*

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \supset \mathfrak{g}_2 := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}_1] \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{i+1} := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i] \supset \cdots$$

heißt die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{g}$. *Falls* $\mathfrak{g}_i = 0$ *für ein* i, *so heißt* $\mathfrak{g}$ *nilpotent.*

Beispiel 1.0.5. *Die Lie Algebra der strikt oberen Dreiecksmatrizen ist nilpotent. Man bildet zunächst eine Normalteilerreihe der Lie Gruppe, welche abhängig von der Dimension der Matrizen an einer Stelle abbricht (wo der kleinste Normalteiler stehen soll), dann betrachte die Korrespondenz zu Unter-Lie Algebren. Dies führt zu einem Ideal in* $\mathfrak{g}$, *nämlich* $\mathfrak{g}_i$ *für ein geeignetes* i, *wo die Zentralreihe abbricht.*

Bemerkung 1.0.6. *Jede nilpotente Algebra ist auflösbar. Es gilt stets* $\mathfrak{g}^i \subset \mathfrak{g}_i$ *für alle* i.

Lemma 1.0.1. *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine nilpotente Lie Algebra. Dann gilt:*

(i) *Jede Unteralgebra* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *ist nilpotent.*

(ii) *Falls,* $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{r}$ *ein Lie Algebra Homomorphismus ist, so ist* $\varphi(\mathfrak{g})$ *nilpotent.*

Beweis. (i) $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \cap \mathfrak{h}$.

(ii) $\varphi([\mathfrak{a},\mathfrak{b}]) = [\varphi(\mathfrak{a}),\varphi(\mathfrak{b})]$ für beliebige $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$.

□

2 N-invariante Unterräume

Wie das Beispiel 1.0.5 schon angedeutet hat, ist der N-invarianter Unterraum W^N einer algebraischen Darstellung W ist nicht trivial, wenn W nicht trivial ist. Sei im Folgenden $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$. $\boxed{\text{Wir beobachten}}$: Die adjungierte Darstellung definiert eine Wirkung von $\mathfrak{g}$ auf sich selbst, da das Bild der Darstellung ein Endomorphismus von $\mathfrak{g}$ ist. Und zwar so,

$$\mathfrak{g} \curvearrowright \mathfrak{g} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \ , \quad (x, y) \mapsto ad_x y \ .$$

Dann wirkt jede Untergruppe $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ auf die obere Gruppe $\mathfrak{g}$. Es gilt insbesondere, dass eine Darstellung genau dann irreduzibel ist, wenn die durch Darstellung definierte Wirkung frei ist. Grober gesagt ist es so, eine lineare Darstellung Φ einer Gruppe G durch Matrizen $\Phi(g) \in GL(V)$ erlaubt es, die Gruppenoperationen durch die Multiplikation von Matrizen zu beschreiben. Daher ist die Definition der Darstellung "äquivalent" zur Wirkung. Eine Darstellung hießirreduzibel, wenn ein beliebiges aber festes $v \in V$ durch Anwendung aller $\Phi(g) \in GL(V)$ in alle $w \in V$ erreichen kann. Dies ist genau die Definition einer freien Wirkung.

Satz 2.0.1. *Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie Algebra von nilpotenten Endomorphismen von V, und sei V ein endlich dimensionaler nicht trivialer Vektorraum. d.h.*

$$\mathfrak{g} \subset End(V) \ , \quad [x, y] \in \mathfrak{g} \ \forall x, y \in \mathfrak{g} \ , \quad \forall x \in \mathfrak{g} \ \exists m : x^m = 0 \ .$$

Dann existiert eine maximale Unteralgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$. d.h. $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$, und es existiere keine weitere Unteralgebra $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{r} \subsetneq \mathfrak{g}$. $\mathfrak{h}$ besitzt die Kodimension 1.

Beweis. Schritt 1: $dim(\mathfrak{g}) = 1$. Die Aussage ist trivial aus der linearen Algebra.

Schritt 2: $dim(\mathfrak{g}) > 1$. Angenommen gelte die Aussage für alle Lie Algebren von nilpotenten Endomorphismen endlich dimensionaler Vektorräume, deren Dimensionen echt kleiner als $dim(\mathfrak{g})$ sind Wir behaupten $dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1$. Da $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, wirkt $\mathfrak{h}$ durch ad auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

$$\mathfrak{h} \curvearrowright_{ad} \mathfrak{g}/\mathfrak{h} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \ , \quad (s, t) \mapsto ad_s(t) \ .$$

Nach der Annahme zur Nilpotenz existiert ein m, sodass $y^m = 0$ in $End(V)$ für alle $y \in \mathfrak{h}$. Dann gilt für alle $x \in \mathfrak{g}$ nach der Binomialformel,

$$(ad_y)^{2m}(x) = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \binom{2m}{i} y^i x y^{2m-i} \ .$$

Es gilt stets entweder $i \geq m$ oder $2m - i \geq m$, daraus folgt, dass es stets $y^i = 0$ oder $y^{2m-i} = 0$ für alle i gilt. Daher erhalten wir $(ad_y)^{2m} = 0$. d.h. $\mathfrak{h}$ wird durch nilpotente Endomorphismen auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ dargestellt. Da $dim\mathfrak{h} < dim\mathfrak{g}$, folgt

$dim(ad_{\mathfrak{h}}) < dim\mathfrak{g}$. Daher existiert nach der Induktionsvoraussetzung ein $h \in \mathfrak{g}$ mit nicht-trivialem Bild in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ sodass

$$ad_y(h) = 0 \quad mod\, \mathfrak{h} \quad \forall y \in \mathfrak{h} \ .$$

Diese Beobachtung implieziert insbesondere, dass $\mathfrak{h} + h \cdot \mathbb{R}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist. Aus der Maximalität von $\mathfrak{h}$ folgern wir

$$\mathfrak{h} + h \cdot \mathbb{R} = \mathfrak{g} \ , \qquad dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) = 1 \ .$$

□

Bemerkung 2.0.2. *Dieses $\mathfrak{h}$ muss nicht eindeutig sein, aber existiert auf jeden Fall. Es sei denn, sei $d < dim(\mathfrak{g})$ die maximale Dimension, in der eine Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ existiert. Dann ist jede Unteralgebra dieser Dimension d maximal in $\mathfrak{g}$.*

Satz 2.0.3. *Seien $\mathfrak{g}$ und V wie im Satz 2.0.1. Dann existiert ein $v \neq 0$ in V, sodass gilt $x.v = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.*

Beweis. Schritt 1: $dim(\mathfrak{g}) = 1$. Die Aussage ist wieder trivial aus der linearen Algebra. Ein Endomorphismus ist nilpotent, so besitzt er einen Eigenwert 0. Dann existiert ein Eigenvektor zu 0.

Schritt 2: $dim(\mathfrak{g}) > 1$.
Angenommen gelte die Aussage für die echt kleinere Dimensionen als $dim(\mathfrak{g})$. Sei $W := \{w \in V \mid y.w = 0 \ , \ \ \forall y \in \mathfrak{h}\}$. W ist nicht trivial, da $dim(\mathfrak{h}) < dim(\mathfrak{g})$ und nach der Induktionsvoraussetzung. Es gilt $hW \subset W$, denn $y.h.w = [y,h].w - h.y.w = 0$ falls $w \in W$ ist. ($\mathfrak{h}$ ist ein Ideal, daher $[y,h]$ ist in $\mathfrak{h}$.) h aufgefasst als eine Wirkung auf V können wir h auf W so einschränken, sodass es immer noch nilpotent wirkt. Daher besitzt $h|_W$ einen Eigenwert 0 und es existiert der zugehörige Eigenvektor $v \in W$, $v \neq 0$ mit $h.v = 0$. Für dieses v gilt insbesondere, dass jedes Element von $\mathfrak{g}$ Null wirkt. d.h. für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt $x.v = 0$. (Erinnere dran, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + H \cdot \mathbb{R}$.) Dann gilt der Satz in der nächsthöheren Dimension. □

Bemerkung 2.0.4. *Sei (V, Φ) eine Darstellung von G. Der N-invarianter Unterraum V^N ist mithilfe der exponentiellen Abbildung gegeben durch*

$$V^N = \{w \in V \mid y.w = 0 \ , \ \ \forall y \in \mathfrak{n}\} \ .$$

Zusammen mit dem Satz folgern wir, dass V^N auch nicht trivial ist, wenn $V \neq 0$.

Bemerkung 2.0.5. *Sei V wieder ein endlich dimensionaler Vektorraum. Sei $\mathfrak{t} \subset End(V)$ der Raum aller diagonalen Matrizen (bezüglich einer algebraischen Darstellung und geeigneter Basis). Dann gilt für $a \in \mathfrak{t}$, $aV^N \subset V^N$. Ferner gilt für $w \in V^N$, und für $Y \in N$,*

$$Y.a.(w) = a.a^{-1}Ya(w) = a.w \ ,$$

denn $a.w$ ist N-invariant, und da N normal ist. d.h. $a^{-1}Na \subset N$. Daher zerfällt V^N unter $\mathfrak{t}$ in Eigenräume.

Definition 2.0.6. *Die Gewichte der Eigenraumzerlergung von V^N heißen die Höchstgewichte von V.*

3 Höchstgewichte

Satz 3.0.1. *(Poincaré-Birkhoff-Witt) Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich dimensionale Lie Algebra. Sei $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{g}$. Dann ist der Raum aller Monomen*

$$(\iota X_1)^{j_1}(\iota X_2)^{j_2} \cdots (\iota X_n)^{j_n} \ , \ \ j_k \geq 0 \ , \ \ \forall k \ ,$$

eine Basis von $U(\mathfrak{g})$. Insbesondere ist die kanonische Abbildung ι injektiv.

Bemerkung 3.0.2. *Der Satz wurde im letzten Vortrag ohne den Zusatz eingeführt, dass die kanonische Abbildung injektiv ist. Einen expliziten Beweis findet man z.B unter www-users.math.umn.edu/ Garrett/m/algebra/pbw.pdf, der erste Link, wenn man im Google "Poincaré-Birkhoff-Witt theorem proof" eintippt.*

Satz 3.0.3. *(R.Weissauer, Tensorrechnung und Riemannsche Geometrie 2005, Seite 48) Jede algebraische Darstellung zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen algebraischen Darstellungen. Für irreduzible algebraische Darstellungen W ist der Raum W^N eindimensional. Das zugehörige Höchstgewicht α ist dominant und bestimmt die irreduzible algebraische Darstellung (W, Φ) bis auf Isomorphie.*

$\boxed{\text{Konstruktion}}$: Wir wählen nun das Indexpaar (i, j) immer so, dass $i < j$. Seien E_{ij} stets eine Matrix mit einem einzigen Eintrag 1 an (i, j)-Stelle. Also, es gilt stets E_{ij} in $\mathfrak{n}$, und E_{ji} in $\overline{\mathfrak{n}}$. Weiter sei $\{H_1, \cdots, H_n\}$ eine Basis von $\mathfrak{t}$. Der Poincaré-Birkhoff-Witt Satz impliziert nun, dass alle Elemente der Form

$$\Gamma(p, q, r) := \prod_{i,j \ ord} E_{ji}^{p_{ij}} \prod_i H_i^{q_i} \prod_{i,j \ ord} E_{ij}^{r_{ij}}$$

eine Basis von $U(\mathfrak{g})$ bilden (bis auf ι !). Nach der Bemerkung 4.5. aus letzter Stunde kann man W als $U(\mathfrak{g})$-Modul verstehen, indem Φ als Wirkung aufgefasst wird.
Sei nun α das Höchstgewicht von Φ, weiter sei v der von Null verschiedene Höchstgewichtsvektor. Angenommen sei Φ irreduzibel. Wir betrachten $\Gamma(p,q,r)v$. Jedes $E_{ij}^{r_{ij}}v$ verschwindet falls $r_{ij} > 0$. Falls alle $r_{ij} = 0$, $H_i v$ ergibt sich den Faktor $\alpha(H_i)$. Nun sehen wir an:

Lemma 3.0.1. *Sei $v \in W$ ein Eigenvektor unter $\mathfrak{t}$ vom Gewicht $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. Dann ist $(\iota E_{ji})(v)$ ein Eigenvektor vom Gewicht $(\alpha_1, \cdots, \alpha_i - 1, \cdots, \alpha_j + 1, \cdots, \alpha_n)$.*

Beweis zum Lemma. Für jedes $H \in \mathfrak{t}$ gilt

$$\Phi(\iota H)\Phi(\iota E_{ji})v = \Phi(\iota H \iota E_{ji} \iota H^{-1})\Phi(\iota H)v = \frac{t_j}{t_i}\chi(H)\Phi(\iota E_{ji})v \ .$$

□

Nach dem Lemma folgt, dass jede Anwendung von E_{ji} das Gewicht immer kleiner im Bezug der lexikographischen Ordnung macht. Das heißt insbesondere, dass die einzige Vektoren zum Gewicht α in $U(\mathfrak{g})v$ genau eindimensionalen Raum $\mathbb{R} \cdot v$ bilden. Wir erhalten ein Paar Korollare:

Korollar 3.0.4. *Höchstgewichte sind dominant. d.h. Für $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ gilt $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$.*

Korollar 3.0.5. *Durch sukzessive Anwendungen von E_{ji} aus dem Produkt-term $\prod_{i,j\ ord} E_{ji}^{p_{ij}}$ erhalten wir alle vom α verschiedene Gewichte α' von der Form*

$$\alpha' = \alpha - \sum_{i<j} p_{ij}(e_i - e_j) \ .$$

Zusammen mit dem Korollar ist der N-invariante Raum W^N eindimensional. Es sei denn, die Irreduziblität impliziert $U(\mathfrak{g})v = W$, der Raum aller Vektoren zum Gewicht α ist $\mathbb{R} \cdot v$, alle Gewichte werden gegeben durch α minus Linearkombination positiver Koeffizienten. Also gilt $W = \bigoplus_{\alpha,\alpha'} \mathbb{R} \cdot v$.
$\boxed{\text{Eindeutigkeit}}$: Gegeben seien (W_1, Φ_1) und (W_2, Φ_2) zwei irreduzible Darstellungen mit einem gemeinsamen Höchstgewicht α. Seien v_1, v_2 von Null verschidene Höchstgewichtsvektoren zu Φ_1 bzw. Φ_2. Wir konstruieren

$$S = (\Phi_1 \oplus \Phi_2)(U(\mathfrak{g}))(v_1 \oplus v_2) \ .$$

Es ist einfach nachzuweisen, dass S dann wieder irreduzibel ist. (Wende üblichen Argument im Abschnitt 2 mit $U(\mathfrak{g})$ und Poincaré-Birkhoff-Witt an!). Durch das Lemma von Schur auf $proj_1(S)$ folgern wir V_1 äquivalent zu S ist, sowie V_2 äquivalent zu S. Daher ist V_1 äquivalent zu V_2.

$\boxed{\text{Existenz}}$: Nach dem Satz sollte ein Höchstgewicht α eine irreduzible Darstellung bis auf Isomorphie bestimmen. Also es ist noch zu zeigen, ob sie überhaupt existiert.

Leider konnte ich im folgenden Beweis lediglich für einfach zusammenhängende komplexen Liegruppen die Existenz solches Φ nachweisen. Für den Fall $G = Gl(n, \mathbb{C})$ sollte der Beweis problemlos funktionieren, aber für den allgemeineren Fall bleibt es mir eine Frage....

Zunächst sei $\mathfrak{b} := \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$. Wir betrachten das Verma Modul

$$V(\alpha) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\alpha \ .$$

Zusammen mit der Wirkung (Multiplikation bis auf der Darstellung) auf den ersten Faktor ist das Verma Modul ein unendlich dimensionales $U(\mathfrak{g})$ Modul mit einer Basis

$$\left\{ \prod_{i,j \ ord} E_{ji}^{p_{ij}} \otimes 1 \mid (p_{ij}) \text{ beliebige Folge mit Werten in } \mathbb{N}. \right\} .$$

Wir beachten, dass $1 \otimes 1$ ein Eigenvektor zum Höchstgewicht α. Die Summe aller $U(\mathfrak{g})$ Untermodule ohne $\mathbb{C} \cdot (1 \otimes 1)$ bildet ein maximales echtes $U(\mathfrak{g})$ Untermodul $M(\alpha)$. Dann ist das Quotientmodul ${V(\alpha)}/{M(\alpha)}$ irreduzibel. Ferner ist das Quotinentmodul ${V(\alpha)}/{M(\alpha)}$ endlich dimensional für dominante Gewichte α. Das sieht man durch Variieren des Gewichtes. Nun schränken wir die Wirkung von $\mathfrak{gl}(n)$ auf den Unteralgebra $\mathfrak{u}(n)$ ein. Da G einfach zusammenhängend ist, erhalten wir dann ein $U(\mathfrak{g})$-Untermodul. Da ein Höchstgewicht dominant ist, und da jedes $U(\mathfrak{g})$-Untermodul eine Darstellung von G definiert, sieht man ein, dass ein Höchstgewicht eine irreduzible Darstellung definiert.

$\boxed{\text{Bemerkung zum Beweis:}}$

- Da die unitäre Lie Algebra im Beweis angewendet wurde, ist es notwendig, den Basiskörper als $\mathbb{C}$ zu fixieren.

- Im Beweis stand am Ende das Argument, dass man wegen der Injektivität der exponentielle Abbildung die gewünschte Darstellung erhalten kann. Dies ist aber falsch. Es gab eine nette Bemerkung von Frau Maurischat während des Vortrags, dass die exponentielle Abbildung nicht injektiv ist, selbst wenn die Lie Gruppe einfach zusammenhängend ist. Dafür wurde ein Beispiel $G = \mathfrak{t}$, die Gruppe (gleichzeitig sogar eine Algebra) aller Diagonalmatrizen, vorgegeben. Nämlich,

$$exp[diag(2\pi i, 2\pi i, \cdots, 2\pi i)] = diag(1, 1, \cdots, 1) = exp[diag(0, 0, \cdots, 0)] \ .$$