AOR Dr. Hendrik Kasten
Institut für Mathematik

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Seminarprogramm Sommersemester 2025

Lie-Algebren

Voraussetzungen: Lineare Algebra 1+2; ich empfehle außerdem Algebra 1

Vorbesprechung: am 27. 1. 2025 um 13 Uhr s.t. im Seminarraum Statistik

Vorträge

Die Hauptquelle für fast alle Vorträge unseres Seminars wird [Hum] sein. Wenn nicht anders angegeben, werden Referenzierungen immer auf Textstellen in [Hum] verweisen.

1 Grundlegendes — 14. 4. 2025

Der Begriff der Lie-Algebra wird definiert, und wir lernen als wichtige Spezialfälle die linearen Lie-Algebren kennen (insbesondere die klassischen Lie-Algebren A_n, B_n, C_n, D_n). Es wird erläutert, wie man aus einer assoziativen Algebra eine Lie-Algebra gewinnt. Schließlich werden algebraische Strukturen im Umfeld der Lie-Algebren eingeführt: Ideale, das Zentrum, die abgeleitete Algebra, der Normalisator, der Zentralisator, Homomorphismen, Darstellungen, insbesondere die adjungierte Darstellung. Die Begriffe „auflösbar“ und „halbeinfach“ (auf den Struktursatz in Vortrag 3 hinweisen!) werden eingeführt. **Literatur: Abschnitte 1 bis 3.1.** *Ein eher leichter Vortrag, in dem mehr definiert als bewiesen wird.*

2 Die Sätze von Engel, Lie und Cartan — 28. 4. 2025

Es wird definiert, wann eine Element einer Lie-Algebra L ad-nilpotent ist, und wann eine Lie-Algebra nilpotent ist. Der Satz von Engel besagt, dass eine Lie-Algebra nilpotent ist, wenn alle ihre Elemente ad-nilpotent sind. Wir zeigen weiter den Satz von Lie, führen die Jordan-Chevalley-Zerlegung eines Elements $x \in \mathrm{End}(V)$ in ein halbeinfaches und ein nilpotentes Element ein, und zeigen schließlich das Cartan-Kriterium für Auflösbarkeit. **Literatur: Abschnitte 3.2 bis 4.** *Wer gerne nette Sätze beweist, ist in diesem Vortrag sicher gut aufgehoben. Natürlich ist das ganze deshalb auch ein gutes Stück anspruchsvoller . . .*

3 Die Killing-Form und Weyls Zerlegungssatz 5. 5. 2025

Wir führen die Killing-Form, eine symmetrische Bilinearform, auf Lie-Algebren ein und zeigen damit den Struktursatz über halbeinfache Lie-Algebren. Wir erweitern den Begriff der Jordan-Chevalley-Zerlegung auf beliebige Lie-Algebren und untersuchen Moduln über Lie-Algebren. Insbesondere zeigen wir das Schur'sche Lemma. Zuletzt lernen wir das Casimir-Element einer Darstellung kennen und zeigen Weyls Zerlegungssatz für Moduln über halbeinfachen Lie-Algebren. **Literatur: Abschnitte 5 bis 6.** *Wieder ein Vortrag mit netten Sätzen, der ganz ähnlich angelegt ist wie der vorige.*

4 Gewichte und Wurzeln 12. 5. 2025

Es werden Gewichte und Gewichtsräume für $\mathfrak{sl}_2(F)$ eingeführt, maximale Tori und Wurzeln (eine Verallgemeinerung des Eigenwertbegriffs). Wir sehen die Wurzelraumzerlegung für halbeinfache Lie-Algebren und untersuchen geometrische Eigenschaften von Wurzelsystemen. **Literatur: Abschnitte 7 bis 8.** *In diesem wieder etwas schlankeren Vortrag werden wichtige Konzepte eingeführt. Die Schwierigkeit liegt eher im klaren Präsentieren diesen Konzepte als in komplizierten Beweisen.*

5 Geometrische Wurzelsysteme und die Weyl-Gruppe 19. 5. 2025

Zunächst wird die Stoßrichtung des letzten Vortrags weiterverfolgt: Wir geben eine ordentliche Definition für die bereits vorher behandelten Wurzelsysteme an und treiben ein wenig euklidische Geometrie mit ihnen. Dazu gibt es Beispiele (mit Bildchen!). Wir führen die Weyl-Gruppe ein, sagen was positive bzw. negative Wurzeln sind, zeigen, dass jedes Wurzelsystem eine Basis besitzt und reden über Weyl-Kammern. **Literatur: Abschnitte 9 bis 10.3.** *Keine schweren Beweise, aber dafür wird viel vom Bisherigen verlangt.*

6 Klassifikation der einfachen Wurzelsysteme 26. 5. 2025

Wir definieren irreduzible Wurzelsysteme, sagen, was lange und kurze Wurzeln sind, definieren Cartan-Matrix, Coxeter-Graphen und Dynkin-Diagramme (*das sind Graphen*). Der Klassifikationssatz 11.4 beschreibt alle möglichen Dynkin-Diagramme zu einem gegebenen irreduziblen Wurzelsystem von Rang ℓ. **Literatur: Abschnitte 10.4 bis 11.** *Die Hauptschwierigkeit in diesem Vortrag ist der umfangreiche Beweis des Klassifikationssatzes, der naturgemäß viele Fallunterscheidungen beinhaltet. Inwieweit alle diese Fälle gezeigt werden sollen soll mit mir abgesprochen werden.*

7 Die universelle einhüllende Algebra 2. 6. 2025

Wir führen die Tensoralgebra und die symmetrische Algebra eines Vektorraums ein (Das ist in [Hum] sehr knapp. Mehr Informationen finden sich zum Beispiel in [Fis] oder in [Kna]. Bitte mit mir absprechen!) Wir definieren die universelle einhüllende Algebra einer Lie-Algebra und zeigen den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt, der die Basis dieser universellen Einhüllenden beschreibt. **Literatur: Abschnitt 17.**

8 Der Satz von Serre — 16. 6. 2025

In diesem Vortrag werden halbeinfache Lie-Algebren über algebraisch abgeschlossenen Körpern von Charakteristik 0 vermittels Erzeugern und Relationen beschrieben. Der Höhepunkt ist der Satz von Serre, der impliziert, dass zu einem beliebigen Wurzelsystem eine halbeinfache Lie-Algebra existiert, die dieses Wurzelsystem hat. Im Anschluss lernen wir noch ein Kriterium für Halbeinfachheit kennen, mit dem wir zeigen können, dass die klassischen Lie-Algebren A_n, B_n, C_n, D_n alle halbeinfach sind. **Literatur: Abschnitte 18 bis 19.** *Ein wichtiger Satz mit einem doch recht umfangreichen Beweis (eigentlich der ganze Paragraph 18). Inwieweit §19.3 in den Vortrag hinein muss, kann noch verhandelt werden.*

9 Irreduzible Darstellungen — 23. 6. 2025

Wegen Weyls Zerlegungssatz genügt es, irreduzible Darstellungen zu untersuchen. Wir lernen den Begriff des Höchstgewichtsvektors kennen und zeigen, dass es zu jedem Gewicht im Dualraum des maximalen Torus genau einen zyklischen Standardmodul gibt. Wir führen dominante Gewichte ein und zeigen, dass es eine Bijektion zwischen den dominanten, ganzzahligen Gewichten und den Isomorphieklassen von endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen gibt. **Literatur: Abschnitte 20 bis 21.** *Mit diesem Vortrag beginnt eine Folge von Vorträgen über Darstellungstheorie von Lie-Algebren. Die Ergebnisse der beiden vorherigen Vorträge werden nicht benötigt.*

10 Freudenthals Multiplizitätsformel — 30. 6. 2025

Die Frage, die in diesem Vortrag geklärt werden soll, ist, wie oft eine irreduzible Darstellung in einer irreduziblen Höchstgewichtsdarstellung wie im vorigen Vortrag vorkommt. Auskunft über diese Multiplizitäten erteilt die Freudenthal'sche Formel. Um diese zu beweisen führen wir das universelle Casimir-Element (verwandt mit dem aus Vortrag 3) und Spuren auf Gewichtsräumen ein. Um diese etwas unübersichtliche Formel etwas anschaulicher zu machen, werden zwei Beispiele vorgerechnet. Schließlich wird noch der Begriff des formalen Charakters eingeführt. **Literatur: Abschnitt 22.** *Sicher nicht besonders umfangreich, aber dieses eher technische Thema verdient es, gründlich präsentiert zu werden.*

11 Der Satz von Harish-Chandra — 7. 7. 2025

Wir konstruieren bestimmte Charaktere, indem wir das Zentrum der universellen einhüllenden Algebra auf den Höchstgewichtsmoduln aus Vortrag 9 operieren lassen. Der Satz von Harish-Chandra sagt nun, dass die Höchstgewichte dieser Moduln schon an den Charakteren erkannt werden können. **Literatur: Abschnitt 23.** *Der eigentliche Beweis ist nicht schwer, aber man muss sauber buchhalten. Außerdem geht noch ein Hauch Algebraische Geometrie ein, die man aber ad hoc einführen kann (Das ist der Appendix).*

12 Chevalley-Basen — 14. 7. 2025

Mit diesem Vortrag beginnt ein neues Kapitel, in dem wir Lie-Algebren und ihre irreduziblen Darstellungen über $\mathbb{Z}$ definieren wollen. Wir führen ein, was eine Chevalley-Basis ist und konstruieren Chevalley-Gruppen vom adjungierten Typ. **Literatur: Abschnitt 25.** *Wir benötigen nur den Stoff der ersten acht Vorträge. Die Beweise bestehen zu großen Teilen aus expliziter Rechnung in Wurzelsystemen. Damit das trotzdem verständlich präsentiert werden kann, ist der Vortrag eher kurz gehalten.*

13 Der Satz von Kostant — 21. 7. 2025

Im Gegensatz zum letzten Vortrag wollen wir nun Matrizengruppen konstruieren, die man beliebigen Darstellungen unserer Lie-Algebra zuordnen kann (und nicht nur der adjungierten Darstellung). Um dies zu tun, arbeiten wir in der universellen Einhüllenden. Der Satz von Kostant gibt uns nun in jeder beliebigen irreduziblen Darstellung unserer Lie-Algebra ein $\mathbb{Z}$-Gitter an, das invariant ist unter bestimmten Elementen aus dem Bild der Chevalley-Basis. **Abschnitt 26.** *Der Beweis des Satzes gliedert sich in eine Reihe von technischen Lemmata. Mehr oder weniger zielt der gesamte Vortrag auf den Satz hin, so dass die Dramaturgie klar sein sollte ...*

Literatur

[Fis] Gerd Fischer. *Lineare Algebra*. vieweg, 1975.

[Hum] James E. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. GTM, Nr. 9. Springer, 1972.

[Kna] Anthony W. Knapp. *Lie Groups beyond an Introduction*. Progress in Mathematics, Nr. 140. Birkhäuser, 1996.