AOR Dr. Hendrik Kasten
Institut für Mathematik

**FAKULTÄT FÜR
MATHEMATIK UND INFORMATIK**

**UNIVERSITÄT
HEIDELBERG**
ZUKUNFT
SEIT 1386

Seminarprogramm Sommersemester 2025

Analytische Zahlentheorie

Voraussetzungen: Außer den Grundvorlesungen in Linearer Algebra und Analysis sind Kenntnisse in Elementarer Zahlentheorie und Funktionentheorie hilfreich, werden aber nicht vorausgesetzt

Vorbesprechung: am 30. 1. 2025 um 13 Uhr s.t. im Seminarraum Statistik

Vorträge

Die Hauptquelle für fast alle Vorträge unseres Seminars wird [Cha] sein. Wenn nicht anders angegeben, werden Referenzierungen immer auf Textstellen in [Cha] verweisen.

1 Zahlentheoretische Funktionen (PS) — 17. 4. 2025

Wir führen das Konzept der zahlentheoretischen Funktion ein und präsentieren mit der Gitterpunktanzahlfunktion ein Beispiel. Wir erhalten eine von Gauß gefundene Abschätzung für die Anzahl der Gitterpunkte in einer Kreisscheibe. Ein Beispiel für eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion ist die Möbius-Funktion, mithilfe derer wir Umkehrformeln beweisen. Anwendungen hiervon sind eine Darstellung der Euler'schen φ-Funktion durch die Möbius-Funktion sowie eine Formel für die summatorische Funktion der Mangoldt-Funktion. **Abschnitte VI.1, VI.2, VI.5 und Beispiel 2.2(c) sowie Satz 2.23 in [KV].** *Das ist ein einfacher Vortrag zum Einstieg, der aber sorgfältig präsentiert werden muss, da er die Grundlagen der nächsten beiden Vorträge legt. Dass die Gitterpunktfunktion für Primzahlen der Form $p = 4k+3$ Null ist, benötigt nicht das in der Quelle angegebene Theorem 7 in Kapitel IV, sondern lässt sich schnell wie in Satz 5.23 in [KV] argumentieren.*

2 Die Teileranzahlfunktion (PS) — 24. 4. 2025

Die Teileranzahlfunktion ist eine schwach multiplikative zahlentheoretische Funktion, deren asymptotisches Wachstumsverhalten wir als erstes Resultat dieses Vortrags untersuchen. Ihre summatorische Funktion beschreibt die Anzahl der Gitterpunkte unter geeigneten Hyperbeln. Das zweite Resultat ist ein Satz von Dirichlet, der das asymptotische Verhalten dieser summatorischen Funktion beschreibt. **Abschnitt VI.3.** *Dieser Vortrag ist technischer als der erste, liefert mit dem Satz von Dirichlet aber auch ein tieferes Resultat.*

3 Die Euler'sche φ-Funktion (PS) 8. 5. 2025

Wir untersuchen die bereits in Vortrag 1 eingeführte Euler'sche φ-Funktion genauer. Aus [KV] holen wir uns dabei die schwache Multiplikativität und die geschlossene Formel von ϕ, aus [Cha] das asymptotische Verhalten, wobei wir dieses nur für φ selbst zeigen und den Satz von Mertens über die summatorische Funktion von φ ggf. nur zitieren. **Definition 2.3, Satz 2.5, Lemma 2.9, Korollar 2.11, Satz 2.12, Proposition 2.22, Satz 2.25 sowie Korollar 2.26 in [KV] und Abschnitt VI.6.** *Dieser Vortrag folgt in großen Teilen meinem Skript zur Elementaren Zahlentheorie und ist entsprechend einfach.*

4 Der Satz von Tschebyschow 15. 5. 2025

Die Primzahlanzahlfunktion $\pi(x)$ gibt an, wie viele Primzahlen es gibt, die kleiner oder gleich einer gegebenen reellen Zahl x sind. Der Satz von Tschebyschow beschreibt diese Funktion asymptotisch für x gegen unendlich und stellt so eine erste Annäherung an den Primzahlsatz dar. **Abschnitte VII.1 und VII.2.** *Eine schöne Anwendung des Satzes von Tschebyschow ist das Bertrand'sche Postulat, das in Abschnitt VII.3 behandelt wird. Dieses sollte zumindest präsentiert werden, eine Skizze des Beweises wäre schön.*

5 Das Euler-Produkt der Riemann'schen Zetafunktion 22. 5. 2025

Wir leiten die berühmte Euler-Produktdarstellung der Riemann'schen Zetafunktion her und nutzen diese aus, um die Aussagen des letzten Vortrags zu verschärfen. **Abschnitte VII.4 und VII.5.** *Das Euler-Produkt ist ein unendliches Produkt, ein Konzept, das wir samt einer Definition dafür, wann ein solches konvergiert, einführen müssen. Das kann etwa anhand der ersten Seite von Abschnitt 8.3 in [Kas2] geschehen. Zentrales Ergebnis dieses Vortrags ist Theorem 7; wenn die Zeit knapp wird, kann beim Beweis von Theorem 8 gespart werden.*

6 Das Weyl-Kriterium für Gleichverteiltheit modulo 1 5. 6. 2025

Die irrationalen Zahlen liegen bekanntlich dicht in den reellen Zahlen. Tatsächlich kann man bereits zeigen, dass für eine beliebige irrationale Zahl ξ die Folge der Nachkommaanteile $(n\xi - \lfloor n\xi \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$ im Einheitsintervall $[0,1]$ überall dicht liegt. Dies geschieht mit einem Kriterium von Weyl. **Abschnitte VIII.1, VIII.2, VIII.3 und VIII.4.** *In diesem Vortrag wird die komplexe Exponentialfunktion samt* *der Euler-Formel verwendet. Diese Konzepte sollten anhand von Abschnitt 2.4 aus [Kas2] motiviert werden. Die Verallgemeinerung des Resultats als Satz von Kronecker wird in Abschnitt VIII.5 behandelt und sollte kurz angesprochen werden.*

7 Minkowskis Gitterpunktsatz 12. 6. 2025

Der Gitterpunktsatz von Minkowski besagt, dass jede ausreichend große beschränkte, muessbare, konvexe, bezüglich des Ursprungs punktsymmetrische Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ außer dem Ursprung noch einen weiteren Gitterpunkt enthält. Hieraus lässt sich folgern, dass die Werte einer gegebenen positiv definiten quadratischen Form nach oben beschränkt sind. **Kapitel IX.**

8 Charaktere (PS) 26. 6. 2025

Ein Charakter χ einer endlichen abelschen Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{C}^\times$. Wählt man speziell $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so lässt sich einem solchen Charakter eine n-periodische zahlentheoretische Funktion zuordnen, die man einen Dirichlet-Charakter nennt. **Abschnitte X.2 und X.3 sowie Abschnitte 3.1 und 3.2 in [Kas1].** *Beide Quellen behandeln ungefähr denselben Inhalt, wobei mein Skript ausführlicher ist. Maßgeblich sind allerdings die Inhalte von [Cha].*

9 Dirichlet-Reihen 3. 7. 2025

Die Theorie der Dirichlet-Reihen ähnelt der der Potenzreihen und lässt sich in gewissem Umfang gemeinsam entwickeln. **Abschnitt 1 in [Zag].** *Mit diesem Vortrag springen wir in die komplexe Ebene. Ab hier sollten die Vortragenden also am besten bereits Funktionentheorie 1 gehört haben.*

10 Der Dirichlet'sche Primzahlsatz 10. 7. 2025

Zu Dirichlet-Charakteren kann man spezielle Dirichlet-Reihen definieren, die L-Reihen. Diese untersuchen wir in diesem Vortrag. Ein Hauptresultat ist der Dirichlet'sche Primzahlsatz, nach dem es in geeigneten arithmetischen Progressionen jeweils unendlich viele Primzahlen gibt. **Abschnitte 6 und 7 in [Zag].** *Zentral für das Seminar ist Abschnitt 6. In Abschnitt 7 werden noch Werte von L-Reihen an ganzen Stellen untersucht, was ebenfalls ein Klassiker der Analytischen Zahlentheorie ist.*

11 Der Primzahlsatz 17. 7. 2025

Der Primzahlsatz beschreibt den asymptotischen Anteil, den die Primzahlen in den natürlichen Zahlen einnehmen, und stellt eines der großen Ergebnisse der Analytischen Zahlentheorie dar. Hauptwerkzeug beim Beweis der Primzahlsatzes ist der Taubersatz von Wiener-Ikehara. **Kapitel XI.**

Literatur

[Cha] K. Chandrasekharan. *Introduction to Analytic Number Theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Nr. **148**. Springer, 1968.

[Kas1] H. Kasten. *Analytische Zahlentheorie (Vorlesungsskript WS 2022)*.

[Kas2] H. Kasten. *Funktionentheorie 1 (Vorlesungsskript SS 2024)*.

[KV] H. Kasten und D. Vogel. *Elementare Zahlentheorie (Vorlesungsskript WS 2024)*.

[Zag] D. Zagier. *Zetafunktionen und quadratische Körper*. Springer, 1981.