Seminarprogramm Sommersemester 2011

Primzahlsätze

Voraussetzungen: Funktionentheorie 2, *für die Vortragenden der letzten beiden Vorträge empfehle ich zusätzlich* Algebra 1.

Vorbesprechung: am Mittwoch, dem 2. 2. 2011, um 13 Uhr c.t. in Hörsaal 4, INF 288.

Vorträge

1 Modulformen zu Kongruenzgruppen I — 15. 4. 2011

In Funktionentheorie 2 wurden ja nur Modulformen mit ganzzahligem Gewicht zur vollen Modulgruppe $\Gamma(1)$ näher untersucht. In diesem und dem nächsten Vortrag werden wir dies wie folgt verallgemeinern: Einerseits studieren wir so genannte Kongruenzuntergruppen von $\Gamma(1)$, andererseits wollen wir ab sofort auch Formen halbganzen Gewichts betrachten. Ersteres führt auf das Problem, dass gleich meherere Punkte die Rolle von $i\infty$ in der klassischen Theorie übernehmen: die so genannten Spitzen (das kommt aber erst im nächsten Vortrag dran). Letzteres macht es notwendig, auf das Thema der Multiplikatorsysteme einzugehen. **Literatur: [FB], Abschnitt VI.5 bis inklusive dem Unterabschnitt „Das konjugierte Multiplikatorsystem“ aber ohne den Unterabschnitt „Spitzen von Kongruenzuntergruppen“**

2 Modulformen zu Kongruenzgruppen II — 29. 4. 2011

Wir untersuchen Spitzen von Kongruenzgruppen und führen auf dem vorherigen Vortrag aufbauend einen verallgemeinerten Begriff der Modulform ein. Wir zeigen, dass Modulformen negativen Gewichts trivial und solche von Gewicht 0 konstant sind und untersuchen die Ordnung bei $i\infty$ genauer. Als Beispiel berechnen wir abschließend den Fundamentalbereich und Erzeuger der Thetagruppe. **Literatur: [FB], der Rest des Abschnitts VI.5 und den Anhang bis inklusive Satz A5.4**

3 Thetafunktionen I 6. 5. 2011

Wir führen das Beispiel aus dem letzten Vortrag fort und studieren die Thetagruppe und die Igusa-Gruppe $\Gamma[4,8]$. **Literatur: [FB], Bemerkung 4.4 in Abschnitt VI.4, der Rest des Anhangs von Abschnitt VI.5 und Abschnitt VI.6 bis exklusive der Formulierung von Theorem 6.3**

4 Thetafunktionen II 13. 5. 2011

Wir zeigen eine Entsprechung zu dem aus der Funktionentheorie bekannten Resultat, dass die Räume M_k von Modulformen als Algebra von den Eisensteinreihen E_4 und E_6 erzeugt werden, wobei hier bestimmte im vorigen Vortrag eingeführte Thetareihen die Rolle der Eisensteinreihen übernehmen. **Literatur: [FB], der Rest von Abschnitt VI.6**

5 Dirichletreihen 20. 5. 2011

Wir führen die Riemann'sche Zetafunktion $\zeta(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ ein und zeigen, dass sie in der rechten Halbebene $\mathrm{Re}(s) > 1$ normal konvergiert. Dieses Verhalten lässt sich auch bei einer ganzen Klasse von Funktionen feststellen: den Dirichletreihen. Diese werden eingeführt und ihr Konvergenzverhalten untersucht. Abschließend lernen wir die Eulerproduktdarstellung von Dirichletreihen kennen und berechnen als Beispiel diejenige der Riemann'schen Zetafunktion. **Literatur: [FB], Abschnitt III.1 ab Definition 1.4 und Abschnitt VII.2; [Leu], Anwendung des Logarithmus auf die Zetafunktion und Satz 1 in Abschnitt 19.2**

6 Dirichletreihen und Fourierreihen 27. 5. 2011

Wie Erich Hecke 1936 zeigte, besteht ein enger Zusammenhang zwischen bestimmten Räumen von Dirichletreihen und Räumen von Fourierreihen. Aufgabe dieses Vortrags ist es, diesen Satz von Hecke zu zeigen, wofür unter anderem die aus der Funktionentheorie 2 bekannten Resultate zur Gammafunktion benötigt werden. **Literatur: [FB], Abschnitt VII.3 bis zum Ende von Theorem 3.4**

7 Die Funktionalgleichung der Riemann'sche Zetafunktion 3. 6. 2011

Mithilfe der Bernoullizahlen und der aus Funktionentheorie bekannten Partialbruchzerlegung des Kotangens können wir eine Formel für die Funktionswerte der Zetafunktion an den geraden natürlichen Zahlen angeben. Mit dem Satz des letzten Vortrags und dem Struktursatz aus Vortrag 3 sehen wir ein, dass die Riemann'sche Zetafunktion einer Funktionalgleichung genügt und sich meromorph auf die gesamte komplexe Ebene fortsetzen lässt. Damit lassen sich die Funktionswerte an den ungeraden negativen ganzen Zahlen bestimmen. Außerdem sind wir nun in der Lage, die berühmte Riemann'sche Vermutung zu formulieren. **Literatur: [FB], Abschnitt III.2: *Ein Beispiel zu* 3*. Invertieren von Potenzreihen*, Abschnitt III.7, Satz 7.14 und der Rest von Abschnitt VII.3.** *Wie das mit der Riemann'schen Vermutung zu verstehen ist, geht aus der angegebenen Literatur nicht hervor. Der Vortragende wende sich hierfür bitte direkt an mich.*

8 Abschätzungen für die Riemann'sche Zetafunktion 10. 6. 2011

Wir nähern uns nun dem ersten von zwei Hauptsätzen dieses Seminars: Dem berühmten Primzahlsatz von Gauß. Um diesen zu beweisen, werden wir außer dem bereits gezeigten noch weitere Eigenschaften der Riemann'schen Zetafunktion benötigen. Das Thema dieses Vortrags ist daher eine Reihe von Hilfssätzen zur Abschätzung von Funktionswerten derselben. **Literatur: [FB], Satz 5.1.II in Abschnitt VII.5**

9 Der Gauß'sche Primzahlsatz 17. 6. 2011

In diesem Vortrag werden wir den Primzahlsatz formulieren und ein wenig zu seiner Geschichte und seiner Bedeutung in der Mathematik berichten. Wir nutzen die Resultate des letzten Vortrags, um den Beweis des Primzahlsatzes auf den so genannten Taubersatz zurückzuführen. Dessen Beweis ist Thema des folgenden Vortrags. **Literatur: [FB], Abschnitt zur Geschichte des Primzahlsatzes am Ende von Kapitel VII, Abschnitt VII.4 nach Satz 4.1 inklusive Kommentar zur Restgliedabschätzung und Abschnitt VII.6, bis Bemerkung 6.2**

10 + 11 Ein Taubersatz 24. 6. 2011 + 1. 7. 2011

Wir beweisen den im letzten Vortrag bereits eingeführten Taubersatz. **Literatur: [FB], Der Rest von Abschnitt VII.6.** *Bitte sprechen Sie die Aufteilung innerhalb dieses Doppelvortrags mit mir ab.*

12 Charaktere endlicher abelscher Gruppen 8. 7. 2011

Wir wollen nun Charaktere einer endlichen abelschen Gruppe G studieren, also Gruppenhomomorphismen $\varphi : G \to \mathbb{C}^\times$. Hierzu zeigen wir zunächst den Hauptsatz für endliche abelsche Gruppen, aus dem wir folgern können, dass die Menge der Charaktere von G eine zu G isomorphe Gruppe bildet, und dass die Charaktere von G in einem geeigneten Sinne orthogonal zueinander sind. Wir untersuchen außerdem Charaktergruppen von Untergruppen und das wichtige Beispiel der Restklassencharaktere. Im letzteren Fall führen wir die Dirichlet'schen L-Reihen $L(\chi, s)$ ein, das sind Dirichletreihen wie in Vortrag 5. **Literatur: [Leu], Satz 1 in Abschnitt 4.1 und Abschnitt 19.1**

13 Die Dedekind'sche Zetafunktion 15. 7. 2011

Dieser Vortrag fasst zunächst dasjenige an algebraischer Zahlentheorie zusammen, das wir brauchen, um die Dedekind'sche Zetafunktion definieren zu können: Wir definieren algebraische Zahlkörper, Gitter und Ordnungen darin, sagen, was ganze Elemente in einem Zahlkörper sind und charakterisieren die Maximalordnung als die Menge derselben. Schließlich führen wir die Absolutnorm von Idealen von Ordnungen ein. Jetzt sind wir in der Lage, die Dedekind'sche Zetafunktion ζ_K eines algebraischen Zahlkörpers K einzuführen und zu zeigen, dass sie ein Eulerprodukt wie erwartet hat. **Literatur: [Leu], Abschnitte 12.1, 12.2, 13.3, Definition der Zetafunktion und Satz 5 in 19.5.** *Dies ist ein Übersichtsvortrag und großzügig zugeschnitten, was die Literatur angeht. Bitte setzen Sie sich für die genaue Stoffauswahl mit mir in Verbindung.*

14 Der Dirichlet'sche Primzahlsatz 22. 7. 2011

Der Dirichlet'sche Primzahlsatz wird vorgestellt und darauf zurückgeführt, dass die speziellen L-Werte $L(\chi, 1)$ für nichttriviale Dirichletcharaktere χ nicht Null sein dürfen. Wir führen Kreisteilungskörper ein und zeigen, dass für jede natürliche Zahl $m > 1$ die Dedekind'sche Zetafunktion des m-ten Kreisteilungskörpers im Wesentlichen das Produkt der L-Reihen $L(\chi, s)$ der Dirichletcharaktere modulo m ist. Abschließend erläutern wir das Verhalten von $\zeta_K(s)$ für $s \downarrow 1$, was den Primzahlsatz beweist. **Literatur: [Leu], Abschnitt 19.4, Rest von Abschnitt 19.5.** *Dies ist ein Übersichtsvortrag und großzügig zugeschnitten, was die Literatur angeht. Bitte setzen Sie sich für die genaue Stoffauswahl mit mir in Verbindung.*

Literatur

[FB] E. Freitag, R. Busam. *Funktionentheorie*. Springer, 1993.

[Leu] A. Leutbecher. *Zahlentheorie - Eine Einführung in die Algebra*. Springer, 1996.