

# Quasi-Isometrie und verwandte Begriffe

---

GGT, Heidelberg, Winter 24/25, Prof. Dr. Petra Schwer

Seien im Folgenden  $(X, d_X), (Y, d_Y)$  metrische Räume.

**Definition 1.** Eine Abbildung  $f : X \mapsto Y$  ist

- eine *isometrische Einbettung*, wenn gilt:

$$d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x') \quad \text{für alle } x, x' \in X.$$

- eine *Isometrie*, wenn  $f$  eine bijektive isometrische Einbettung ist.  
Äquivalent dazu:  $f$  ist isometrische Einbettung und es existiert eine isometrische Einbettung  $g : Y \mapsto X$  so, dass  $f \circ g = id_Y$  und  $g \circ f = id_X$ .

Die Räume  $X$  und  $Y$  heißen *isometrisch*, falls eine Isometrie  $f : X \mapsto Y$  existiert.

Für unsere Zwecke sind Isometrien zu starr. Wir schwächen das Konzept daher ab und erlauben multiplikative Fehler:

**Definition 2.** Eine Abbildung  $f : X \mapsto Y$  ist

- eine *Bilipschitz-Einbettung*, wenn eine reelle Konstante  $c \geq 1$  existiert so, dass gilt:

$$\frac{1}{c}d_X(x, x') \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq cd_X(x, x') \quad \text{für alle } x, x' \in X.$$

- eine *Bilipschitz-Äquivalenz*, wenn  $f$  eine bijektive bilipschitz Einbettung ist.  
Äquivalent dazu: wenn  $f$  eine Bilipschitz-Einbettung ist und es eine weitere Bilipschitz-Einbettung  $g : Y \mapsto X$  gibt für die gilt:  $f \circ g = id_Y$  und  $g \circ f = id_X$ .

Die Räume  $X$  und  $Y$  sind *bilipschitz (äquivalent)*, falls eine Bilipschitz-Äquivalenz  $f : X \mapsto Y$  existiert.

Bilipschitz-Äquivalenzen sind Homöomorphismen topologischer Räume und erhalten daher lokale topologische Informationen. Das ist für uns immer noch zu starr. Wir schwächen das Konzept daher weiter ab und erlauben zusätzlich additive Fehler:

**Definition 3.** Eine Abbildung  $f : X \mapsto Y$

- ist eine  $(C, D)$ -*quasi-isometrische Einbettung*, wenn es reelle Konstanten  $C \geq 1$  und  $D \geq 0$  gibt so, dass gilt:

$$\frac{1}{C}d_X(x, x') - D \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Cd_X(x, x') + D \quad \text{für alle } x, x' \in X.$$

- hat *endlichen Abstand* von einer Abbildung  $\tilde{f} : X \mapsto Y$ , wenn es eine reelle Konstante  $C' > 0$  gibt mit  $d_Y(f(x), \tilde{f}(x)) \leq C'$  für alle  $x \in X$ .
- ist eine  $(C, D)$ -*Quasi-Isometrie* (kurz QI), wenn  $f$  eine  $(C, D)$ -quasi-isometrische Einbettung ist und es eine quasi-isometrische Einbettung  $g : Y \mapsto X$  (gennant *quasi-Inverse*) gibt, für die  $f \circ g$  endlichen Abstand von  $id_Y$  und  $g \circ f$  endlichen Abstand von  $id_X$  hat.

Die Räume  $X$  und  $Y$  sind *quasi-isometrisch*, falls es eine Quasi-Isometrie  $f : X \mapsto Y$  gibt. Wir schreiben dann  $X \sim_{QI} Y$ .