Thema 11 Enden Teil 2

Dienstag, 28. Januar 2025 16:44

Wir schließen das Semester ab mit ein paar weiteren Kommentaren zu Enden von Gruppen:

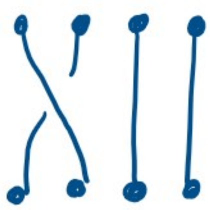
- Berechnung der # Enden von Zopfgruppen B_n, $n \in \mathbb{N}$

<u>Zopfgruppen</u>: B_n, $n \in \mathbb{N}$

<u>Geometrische Definition</u>:

Die n-te Zopfgruppe B_n ist wie folgt gegeben:

- <u>Elemente</u>: Stringdiagramme



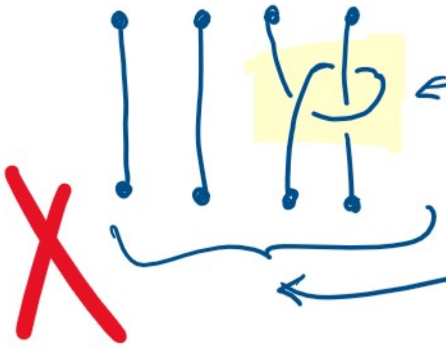
$\leftarrow$ 4 Enden

$\leftarrow$ 4 Stränge mit Über-/Unter-kreuzungen

Alle Stränge verlaufen von oben nach unten ohne Knoten zu bilden.

Man stelle sich Stränge vor, die an der Decke befestigt sind und unten wieder am Boden befestigt werden. Vertauschen der Positionen ist erlaubt, mehr nicht.

am Boden befestigt werden. Vertauschen der Positionen ist erlaubt, mehr nicht.

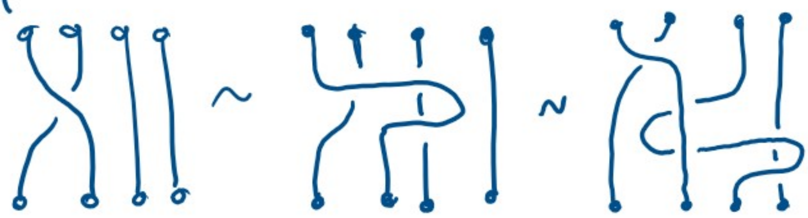


← formt einen Knoten

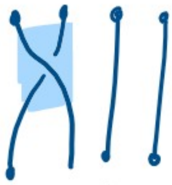
ist kein zulässiges Stringdiagramm.

Dabei werden alle Stringdiagramme als äquivalent betrachtet, die ineinander überführt werden können ohne die Enden zu lösen. (Stichwort: Isotopie)

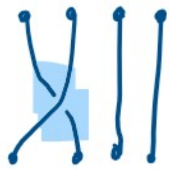
z.B. die folgenden Diagramme sind äquivalent:



Folgende beiden sind <u>nicht</u> äquivalent:

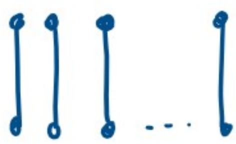


und



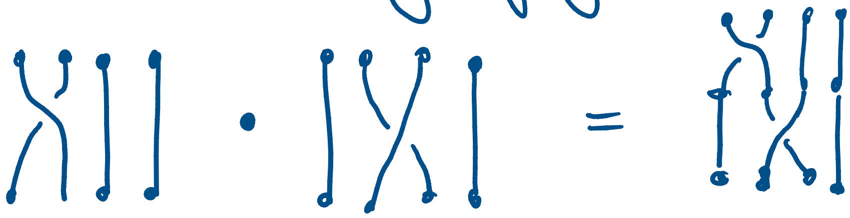
Richtung der Kreuzung ist wichtig!

Das neutrale Element ist gegeben durch:

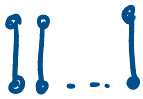


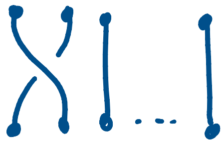
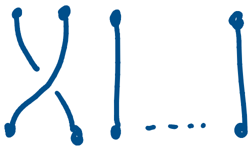
n Stränge, unverzopft

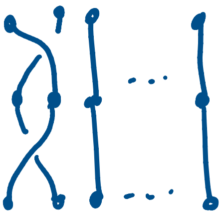
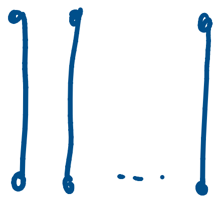
Multiplikation zweier Elemente ist durch Stapeln der Stränge gegeben:



Das Inverse zu einem Zopf $b \in B_n$ ist das eindeutige Element b^{-1} für das gilt:

$b \cdot b^{-1} = \mathbb{1} =$ 

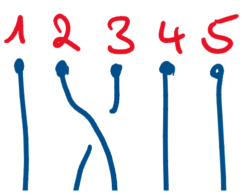
Bsp.  und  sind invers!

denn  kann überführt werden in 

Zopfgruppen $B_n, n \in \mathbb{N}$, besitzen eine natürliche

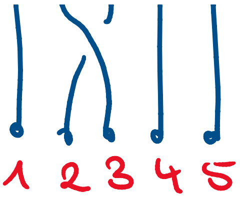
Projektion auf S_n:

Numeriere die Knoten der Enden der Zöpfe mit $1 \ldots n$, und bilde b auf $\sigma_b \in S_n$ ab,



$= b_2$

wobei σ_b durch die in b erfolgte Zuordnung der Enden gegeben ist



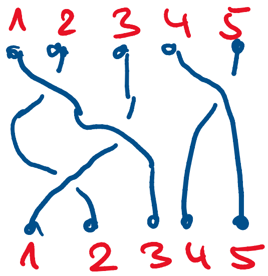
$= b_2$

erfolgte Zuordnung der Enden gegeben ist.

In 2-line Notation: $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix}$ one line: $(1,3,2,4,5) = t_{23}$ in S_5

denn der Strang, der bei der 2 startet endet in 3.

<u>Bsp</u>:

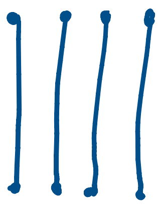


$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}$

(32154)

Der <u>Kern</u> dieser Abbildung $B_n \xrightarrow{\psi} S_n$ besteht aus allen Zöpfen bei denen der i-te Strang auch in i endet.

$\not\sim$



b_1 b_2

und $\psi(b_1) = \psi(b_2)$
$= \mathbb{1} \in S_4$

Wir nennen den Kern die <u>reine Zopfgruppe</u> (pure braid group) und schreiben

$$PB_n = \ker(\psi) \quad \text{mit } \psi: B_n \to S_n .$$

Es gilt: $[B_n : PB_n] = n! = \# S_n$.

Es gilt: $[B_n : PB_n] = n! = \# S_n$.

Es ist also $\mathrm{Ends}(B_n) = \mathrm{Ends}(PB_n)$.

Was hilft uns das?

Eigenschaften

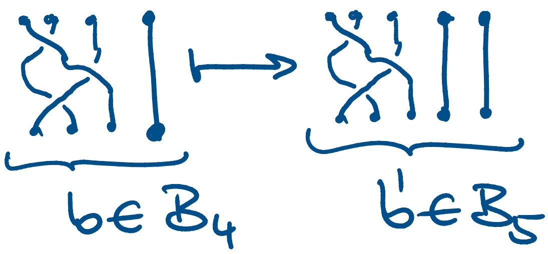
(1) Alle beliebigen Zöpfe lassen sich als Produkte der b_i und b_i^{-1} schreiben für $i = 1 \dots n-1$.

(2) $b_i b_{i+1} \neq b_{i+1} b_i \quad \forall i = 1 \dots n-2$

(3) Es gilt die Zopfrelation

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}$$

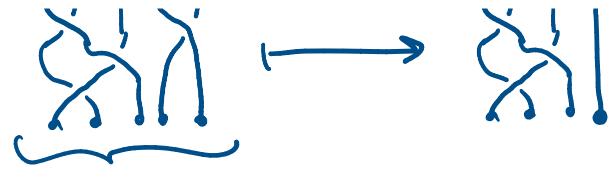
(4) $PB_n \hookrightarrow PB_{n+1}$ durch Hinzufügen eines zusätzlichen Strangs am Ende z.B.



(5) $PB_{n+1} \twoheadrightarrow PB_n$ durch Löschen des $(n+1)$-ten Strangs.

z.B.

z.B.



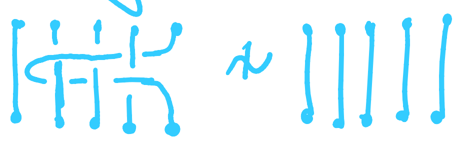
$\in B_5$

Die Abbildungen $PB_n \hookrightarrow PB_{n+1}$ und $PB_{n+1} \twoheadrightarrow PB_n$ sind nicht invers zueinander.

Es gibt eine sogenannte "Kämmtechnik"* mit der man zeigen kann:

$$\boxed{PB_n \cong F_{n-1} \rtimes PB_{n-1}}$$

* der Kern der Projektion $PB_{n+1} \to PB_n$ besteht aus allen Zöpfen in PB_{n+1} wo nur der $(n+1)$-te Strang durch die anderen gewebt ist: z.B.



Man kann diesen Kern mit F_{n-1} identifizieren.
Bleibt noch z.z. PB_{n-1} als UG in PB_n (eingebettet wie in (4) oben) wirkt durch Konjugation auf diesem Kern.
⇝ Struktur als semidirektes Produkt

Für $n \geq 3$ ist PB_{n-1} unendlich. Somit gilt:

Thm für $n \geq 3$ ist

Thm für $n \geq 3$ ist

$$\mathcal{E}(B_n) \underset{(*)}{=} \mathcal{E}(PB_n) = 1.$$

Ends

Beweis: Wir haben oben (*) gesehen.
Wegen $PB_n = F_{n-1} \rtimes PB_{n-1}$ ist
$\mathcal{E}(PB_n) = 1$ weil sowohl F_{n-1} als auch PB_{n-1} unendliche, endlich erzeugte Gruppen sind.
(Satz aus VL: #Enden von semidir. Prod. $= 1$)

$\square$

$\mathcal{E}(B_1) = 0$ weil B_1 = triviale Gruppe
$\mathcal{E}(B_2) = 2$, weil $B_2 \cong \mathbb{Z}$.