Thema 11 Enden von Gruppen

Montag, 17. Januar 2022 15:16

11. Enden von Gruppen

Eine weitere Möglichkeit unendliche Gruppen in Unterklassen zu teilen liefern verschiedene Konzepte von Rändern/Enden von Gruppen.

Def 11.1

Sei $\Gamma = (V, E, \delta)$ ein Graph.

1) Ein (eigentlicher) Strahl in Γ ist ein unendlicher Pfad $\gamma = (x_i)_{i \geq 0}$ s.d. für alle beschränkten Teilmengen $B \subset V$ nur endlich viele der x_i in B liegen.

Alternativ könnte man für lokal endliche Γ fordern: $x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$.

2) Eine Menge C von Ecken in Γ heißt zusammenhängend, wenn je zwei Ecken in C mit einem Kantenzug verbunden werden können, der nur über Ecken in C verläuft.

Die Zusammenhangskomponenten einer Eckenmenge $C \subset V$ sind die maximalen zush. Teilmengen von C.

$\subset V$.

zusgden Teilmengen von G.

3) Wir sagen $A, B \subset V$ werden von $S \subset V$ separiert falls für alle $a \in A$ und $\forall b \in B$ gilt: x und y liegen in verschiedenen Zushgsk. von $V \setminus S$. (insbes $A \cap S = B \cap S = \emptyset$)

Jeder Pfad von a nach b enthält eine Ecke aus S.

Bsp:

$S = \{0\}$ separiert $\{1, 2, \dots\}$ von $\{-1, -2, \dots\}$

aber auch $S = 2\mathbb{Z}$ separiert diese beiden Mengen.

Def. 11.2 $\Gamma = (V, E, \delta)$ wie oben.

1) Ein Unterstrahl eines Strahles $(x_i)_{i \geq 0}$ ist ein unendlicher Strahl $(y_j)_{j \geq 0}$ s.d. ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $y_j = x_{k+j} \ \forall j \geq 0$.

2) Wir sagen zwei Strahlen $(x_i)_{i \geq 0}$ und $(x_i')_{i \geq 0}$ werden von einer Menge S separiert, wenn es Unterstrahlen (y_j) von (x_i) und (y_j') von (x_i') gibt, so dass die

und (y_j) von (x_i) gibt, so dass die Eckenmengen $\{y_j, j \geq 0\}$ und $\{y'_j, j \geq 0\}$ von S separiert werden.

3) Zwei Strahlen heißen **äquivalent**, wenn sie nicht durch eine endliche Menge S separierbar sind.

4) Die Äquivalenzklasse eines Strahles γ in Γ heißt **Ende von γ**, geschrieben $\mathrm{end}(\gamma)$.

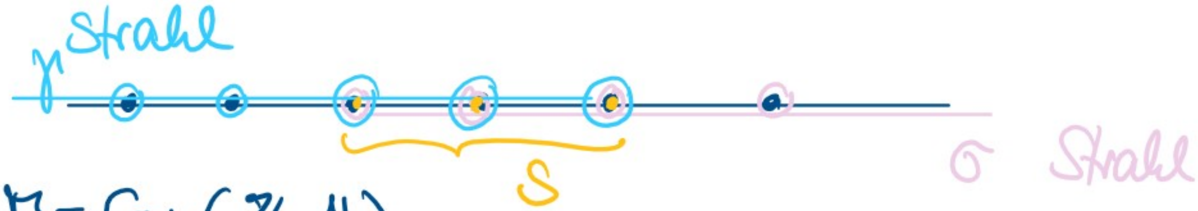
Die Menge der **Enden** von Γ ist

$$\mathrm{Ends}(\Gamma) := \{\mathrm{end}(\gamma) \mid \gamma \text{ Strahl in } \Gamma\}.$$

Wir schreiben $e(\Gamma) := \|\mathrm{Ends}(\Gamma)\|$ und sagen für $e(\Gamma) = n$ der Graph Γ hat n Enden.

11.3 Beispiel

1)



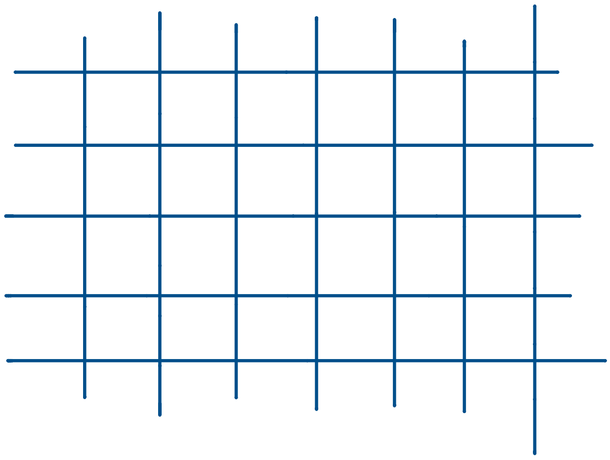
$\Gamma = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, 1)$

S separiert γ und σ

weiter gilt $\mathrm{Ends}(\Gamma) = \{\mathrm{end}(\sigma), \mathrm{end}(\gamma)\}$

$$e(\Gamma) = 2.$$

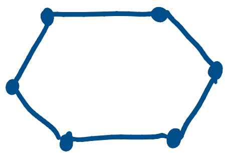
2)



$\left(\mathbb{Z}^2, \left\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\right\}\right)$
hat 1 Ende

ebenso der Graph 

3)



hat 0 Enden

Jeder Cayleygraph einer endlichen Gruppe hat 0 Enden.

4) $\mathrm{Cay}(F_2, \{s_1, s_2\})$ hat ∞-viele Enden.

5) Es gibt für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Graphen mit n Enden.

$B_R(v_0) = \{v \mid d(v, v_0) \leq R\}$

11.4 Beobachtung

Sei Γ ein lokal endlicher Graph.

Für Strahlen $(x_i)_{i \geq 0}$ und $(y_i)_{i \geq 0}$ in Γ gilt:

a) $\mathrm{end}((x_i)_{i\geq 0}) = \mathrm{end}((y_i)_{i \geq 0})$

a) $\mathrm{end}((x_i)_{i\geq 0}) = \mathrm{end}((y_i)_{i\geq 0})$

$\iff$ $\forall$ endlichen Mengen $S \subset V$ existiert $N \in \mathbb{N}$ s.d. $(x_i)_{i\geq N}$ und $(y_i)_{i\geq N}$ in der selben Zusammenhangskomp. von $V \setminus S$ liegen.

b) $\mathrm{end}((x_i)_{i\geq 0}) = \mathrm{end}((y_i)_{i\geq 0})$

$\iff$ $\forall$ Bälle $B_R(v_0)$ $\exists N \in \mathbb{N}$ s.d. $(x_i)_{i\geq N}$ und $(y_i)_{i\geq N}$ in der selben Zshgsk. von $V \setminus \underbrace{B_R(v_0)}_{\text{R-Ball um } v_0}$ liegen.

<u>Beweis</u> a) gilt direkt nach Def.

b) Jede endliche Menge S ist in einem R-Ball um v_0 enthalten und umgekehrt ist jedes $B_R(v_0)$ selbst eine endliche Menge (weil Γ lokal endlich ist). $\square$

wir benötigen für einen Beweis ↴

siehe BH Thm I.3.10 p.36

11.5 Satz von Arzela-Ascoli

Sei X ein kompakter metr. Raum und Y ein separabler metrischer Raum, dann hat jede Folge gleichmäßig stetiger hat jede Folge gleichmäßig stetiger Abbildungen $f_n: Y \longrightarrow X$ eine Teilfolge, die gegen eine stetige Abb. $f: Y \to X$ konvergiert.

Y ist separabel, wenn Y eine abzählbare, dichte Teilmenge enthält. D.h. existiert $(x_i)_{i=1}^{\infty} \subset Y$ s.d. $\forall$ offenen $S \subset Y$ ein $i \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_i \in S$.

z.B. ist $\mathbb{R}$ separabel mit $\{x_i, i=1..\infty\} = \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}^n$ ist immer separabel $\forall n$

Def 11.7

Ein Strahl $(x_i)_{i\geq 0}$ in einem Graphen Γ heißt geodätisch, wenn er eine Geodätische in der geometrischen Realisierung induziert.

M.a.W: $(x_i)_{i\geq 0} = \gamma$ ist geodätisch, wenn jeder endliche Teilpfad $(x_i)_{i=N}^{M}$ kürzester Pfad von x_N nach x_M ist.

11.6 Lemma

Sei Γ ein lokal endlicher Graph und $v_0 \in V$.
(V, E, σ)

Sei $\mathcal{G}_{v_0}(\Gamma) = \{\text{geodätische Strahlen, die in } v_0 \text{ starten}\}$.

Die natürliche Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{v_0}(\Gamma) &\longrightarrow \mathrm{Ends}(\Gamma) \\ \gamma &\longmapsto \mathrm{end}(\gamma) \end{aligned}$$

ist surjektiv.

Beweis-Idee:

Sei $\sigma = (x_i)_{i \geq 0}$ eigentlicher Strahl mit Ende $e = \mathrm{end}(\sigma)$.

Definiere für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wie folgt einen neuen Strahl γ_n:

betrachte Geodätische von v_0 nach x_n und erweitere diese konstant (alle weiteren Ecken $= x_n$) zu einem Strahl.

Nach Arzela-Ascoli existiert eine Teilfolge der Folge $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, die zu einem geodätischen Strahl γ konvergiert mit $\mathrm{end}(\gamma) = \mathrm{end}(\sigma)$ (nach Konstruktion) $\square$

(und BH I.8.28, I.8.29)

$\square$

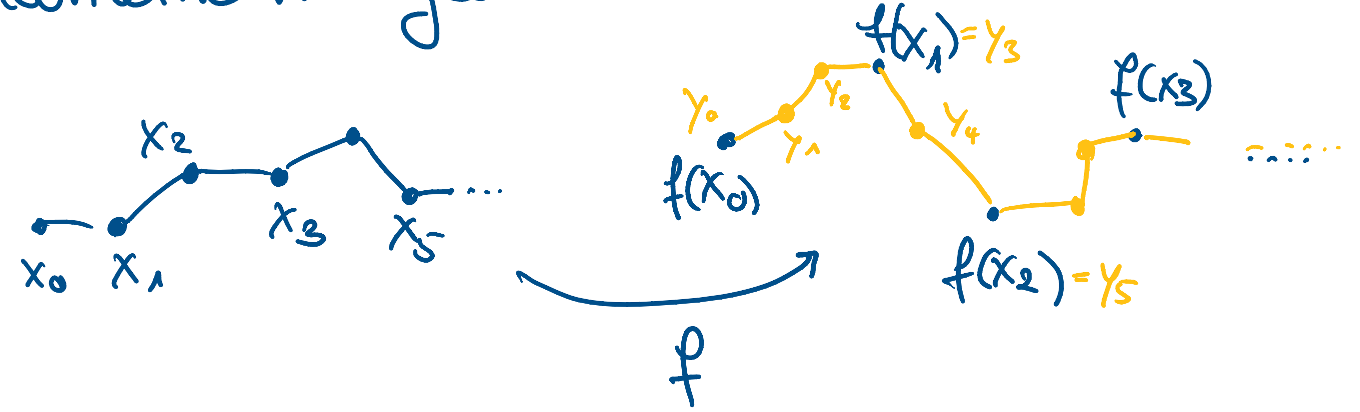
(vergl. BH I.8.28, I.8.29)

Satz 11.7 QI-Invarianz von # Enden

Seien Γ_1 und Γ_2 quasi-isometrische, lokal endliche Graphen.
Jede QI $f: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ induziert eine bij. Abb.
$$f_E: \mathrm{Ends}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathrm{Ends}(\Gamma_2).$$

Beweis:

Sei $\gamma = (x_i)_{i\geq 0}$ ein (eigentlicher) Strahl in Γ_1.
D.h. $\mathrm{end}(\gamma) \in \mathrm{Ends}(\Gamma_1)$.
Verbinde die Bilder $f(x_i)$ $\forall i$ unter der quasi-Isometrie mit geodätischen Stücken in Γ_2.



Abstände $d_{\Gamma_2}(f(x_i), f(x_{i+1}))$ sind uniform beschränkt.
Daraus erhalten wir einen (eigentl.) Strahl $(y_i)_i$ in Γ_2, der insbes. jeden kompakten Ball wieder verlässt.

wieder verlässt.

Offensichtlich ist $\mathrm{end}((\gamma_i)_i)$ unabhängig von der Wahl der geod. Segmente zwischen den $f(x_i), f(x_{i+1})$.

Definiere $$f_E : \mathrm{Ends}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathrm{Ends}(\Gamma_2)$$
$$\mathrm{end}(\gamma) \longmapsto \mathrm{end}((\gamma_i)_{i\geq 0})$$
für alle geodätischen Strahlen γ in Γ_1.
(kann sogar einschränken auf alle geod. Strahlen, die in v_0 starten).

Wegen Le 11.6 ist f_E auf ganz $\mathrm{Ends}(\Gamma_1)$ definiert.
Wir müssen zeigen, dass f_E wohldefiniert und bijektiv ist.
Dafür nutzen wir folgendes technische Lemma:

technisches Lemma:

Seien Γ_1, Γ_2 zwei lokal endliche Graphen und $f: \Gamma_1 \to \Gamma_2$ eine c,d quasi-Isometrie.
Sei p_0 fest gewählter Basispunkt in Γ_1.
Dann $\exists\, \mu \geq 1$ s.d. gilt:
sind v,w Ecken außerhalb $B_{\mu n+\mu}(p_0)$, die durch einen Pfad in $\Gamma_1 \setminus B_{\mu n+\mu}(p_0)$ verbunden

sind v,w Ecken außerhalb $B_{\mu n+\mu}(p_0)$, die
durch einen Pfad in $\Gamma_1 \setminus B_{\mu n+\mu}(p_0)$ verbunden werden können,
dann sind $f(v)$ und $f(w)$ in $\Gamma_2 \setminus B_n(f(p_0))$ und können dort ebenfalls durch einen Pfad verbunden werden.

Beweis Lemma: Die Abb. f ist q.i., also gilt:

$$(*) \quad \frac{1}{c} d_{\Gamma_1}(v,w) - d \underset{(a)}{\leq} d_{\Gamma_2}(f(v), f(w)) \underset{(b)}{\leq} c \cdot d_{\Gamma_1}(v,w) + d$$

Sei OE $c = d$ und $\mu := c^2 + c$

Seien $v_0 = v, v_1, v_2, \dots, v_n = w$ Ecken eines geod. Pfades von v nach in $\Gamma_1 \setminus B_{\mu n+\mu}(p_0)$.

Dann gilt:

$$d_{\Gamma_2}(f(p_0), f(v_{i+1})) \underset{(*)a)}{\geq} \frac{1}{c} d_{\Gamma_1}(p_0, v_i) - d$$

$$\underset{v_i \text{ außerhalb } B_{\mu n+\mu}(p_0)}{\geq} \frac{1}{c}(\mu n + \mu) - d$$

$$\underset{\substack{c=d \\ \mu = c^2+c}}{=} \frac{1}{c}((c^2+c)n + c^2 + c) - c$$

$$> n + 2c$$

$\frac{1}{c}((c^2+c)\cdot(n+1)) - c > n+2c$

$\Leftrightarrow (c+1)(n+1) > n+2c$

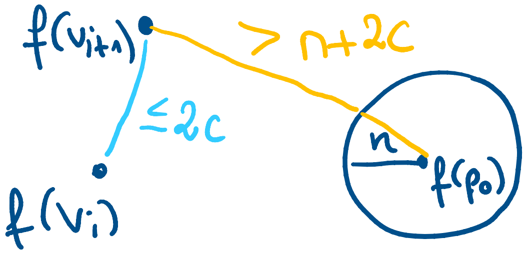
$\Leftrightarrow cn + \cancel{c} + \cancel{n} + 1 > \cancel{n} + \cancel{2}c$

$\Leftrightarrow cn + 1 > c$ ✓ für $n \geq 1$

Weiter ist $d_{\Gamma_2}(f(v_i), f(v_{i+1})) \leq c \cdot \underbrace{d_{\Gamma_1}(v_i, v_{i+1})}_{=1} + c = 2c$

Also liegt jeder geod. Pfad von $f(v_i)$ nach $f(v_{i+1})$
außerhalb von $B_n(f(p_0))$

Also liegt jeder geod. Pfad von $f(v_i)$ nach $f(v_{i+1})$ außerhalb von $B_n(f(p_0))$



□ Bew lemma

Aus dem technischen Lemma folgt direkt die Wohldefiniertheit von f_E:

Damit f_E wohldefiniert ist muss gelten: Sind $\gamma = (x_i)_{i \geq 0}$ und $\sigma = (y_i)_{i\geq 0}$ zwei (geod.) Strahlen in Γ_1, die in p_0 starten und das selbe Ende haben, dann müssen auch die Enden der oben definierten Bildstrahlen übereinstimmen. Mit 11.4 ist das genau dann der Fall, wenn gilt:

z.z. $\forall R > 0 \; \exists N > 0$ s.d. $\forall i \geq N$ die Punkte $f(x_i)$ und $f(y_i)$ in der selben Zusammenhangskomponente von $\Gamma_2 \setminus B_R(f(p_0))$ liegen.

Sei $R > 0$ fest, c q.i. Konst. von f, $\mu = c^2 + c$.

Dann folgt aus techn. Lemma:

Dann folgt aus techn. Lemma:
Sind x_i und y_i für i groß genug in der selben Zshgskomp. von $\Gamma_1 \setminus B_{\mu R+\mu}(p_0)$, dann sind $f(x_i)$ und $f(y_i)$ ebenfalls in der selben Zshgsk. von $\Gamma_2 \setminus B_R(f(p_0))$.
$\Rightarrow$ Wohldefiniertheit.

Ebenfalls können wir aus dem techn. Lemma folgern, dass
$\#$ Zshgsk. von $\Gamma_1 \setminus B_{\mu R+\mu}(p_0) \geq \#$ Zshgsk. von $\Gamma_2 \setminus B_R(f(p_0))$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{R\to\infty} \#\text{Komp. } \Gamma_1 \setminus \ldots}_{= \#\mathrm{Ends}(\Gamma_1)} \geq \underbrace{\lim_{R\to\infty} \#\text{Komp. } \Gamma_2 \setminus \ldots}_{= \#\mathrm{Ends}(\Gamma_2)}$$

Weil f eine quasi-Isometrie ist besitzt f eine quasi-Inverse $\hat{f}: \Gamma_2 \to \Gamma_1$ für die wir auf die selbe Art und Weise argumentieren können. $\Rightarrow \#\mathrm{Ends}(\Gamma_2) \geq \#\mathrm{Ends}(\Gamma_1)$

Also gilt „=". $\rightsquigarrow$ Endenmengen sind in Bijektion

Um zu sehen, dass f_E die gesuchte Bijektion ist gehe wie folgt vor:

<u>z.z. f_E surjektiv:</u> f hat quasi-dichtes Bild. bzgl konstante k
Daher existiert für jeden Strahl $\sigma = (y_i)$ in Γ_2

Daher existiert für jeden Strahl $\sigma = (y_i)$ in Γ_2 eine Folge von Ecken $(x_i)_{i\geq 0}$ in Γ_1 s.d.

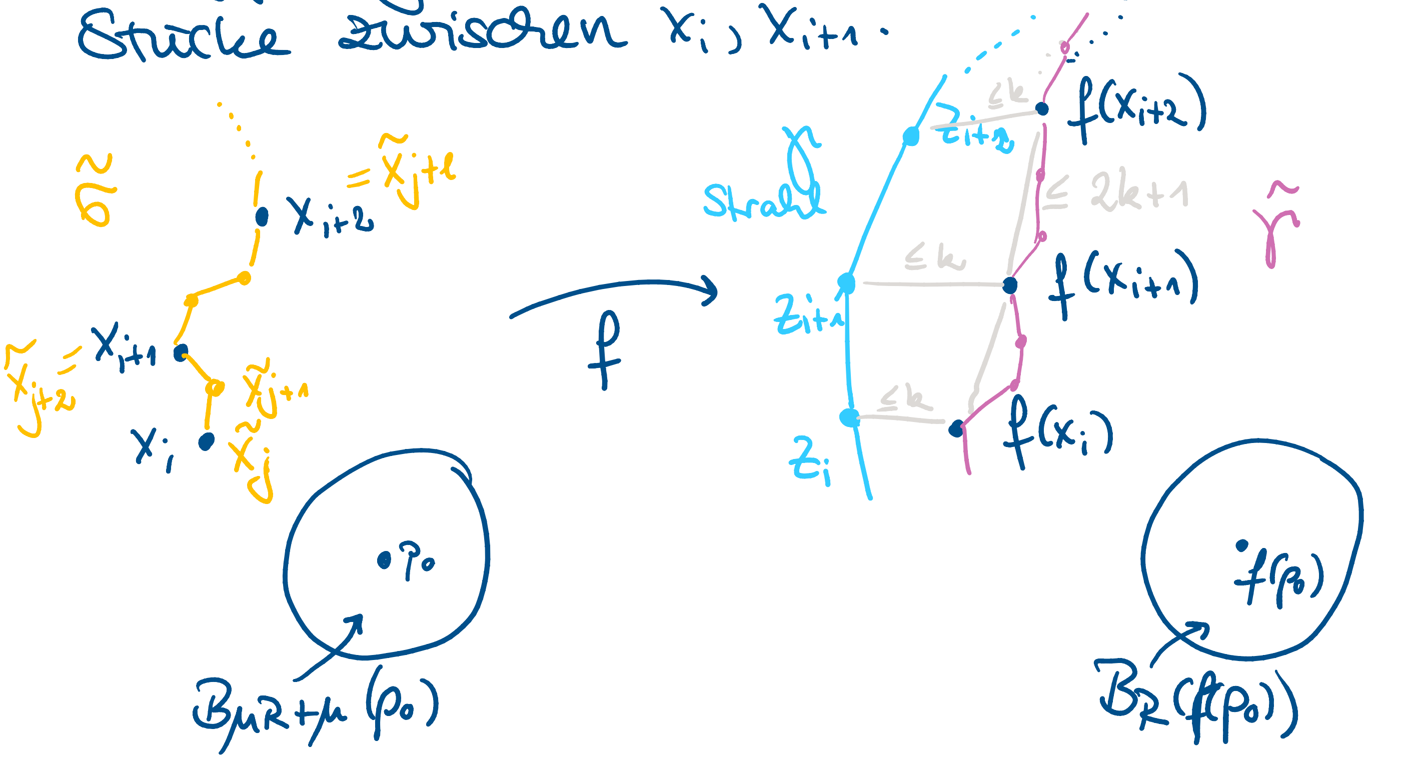
$$d_{\Gamma_2}(f(x_i), z_i) \leq k \quad \forall i \geq 0. \text{ und geeignetes } k \text{ (fix)}$$

Es ist $\frac{1}{c} d_{\Gamma_1}(x_i, x_{i+1}) - c \overset{\text{q.i.}}{\leq} d_{\Gamma_2}(f(x_i), f(x_{i+1}))$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{d_{\Gamma_2}(f(x_i), z_i)}_{\leq k} + \underbrace{d_{\Gamma_2}(z_i, z_{i+1})}_{=1} + \underbrace{d_{\Gamma_2}(z_{i+1}, f(x_{i+1}))}_{\leq k}$$

$\leq 2k+1$, Abst. uniform beschränkt.

Und somit kann $(x_i)_{i\geq 0}$ zu einem Strahl $\tilde{\sigma} = (\tilde{x}_j)_{j\geq 0}$ ergänzt werden durch geod. Stücke zwischen x_i, x_{i+1}.



Ebenso ergänze Punktfolge $f(x_i)$ zu einem Strahl $\tilde{\gamma} = (y_j)_{j\geq 0}$.

Das technische Lemma liefert, dass $f_E(\mathrm{end}(\tilde{\delta})) = \mathrm{end}(\tilde{\gamma})$ wohldefiniert ist.
Mit den selben Rechnungen wie im Beweis des technischen Lemmas folgt:

$$d_{\Gamma_2}(f(x_i), f(p_0)) > n + 2c.$$

Wähle nun c so groß, dass $c = k$.
Dann ist jeder geod. Kantenzug von z_i nach $f(x_i)$ außerhalb $B_R(f(p_0))$ für genügend großes i. Somit z_i in der selben Zshgsk. wie $f(x_i)$.
$\Rightarrow \mathrm{end}(\tilde{\gamma}) = \mathrm{end}(\gamma)$ und f_E surjektiv.

Weil $\#\mathrm{Ends}(\Gamma_1) = \#\mathrm{Ends}(\Gamma_2)$ ist f_E auch injektiv. $\square$

Def 11.8

Die (Anzahl der) Enden $E(G)$ einer endl. erz. Gruppe G sind (ist) die (Anzahl der) Enden eines ihrer Cayleygraphen.

Satz 11.9 (Freudenthal – Hopf, 1930)

Satz 11.9 (Freudenthal – Hopf, 1930)

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe.
Dann ist $E(G) \in \{0, 1, 2, \infty\}$.
Es gilt $E(G) = 0 \iff G$ endlich

Beweis: 0 Enden $\iff$ G endlich

Sei $E(\Gamma) = 0$:
Dann existiert in Γ kein eigentlicher Strahl.
Somit ist ganz Γ beschränkt, also endlich.
$\Rightarrow$ G ist endlich.

Sei G endlich: Dann ist Γ beschränkt und $E(\Gamma) = 0$.

Beweis Rest:
Wir zeigen $E(G) \in \{0, 1, 2, \infty\}$ mit Widerspruch.
Sei $\Gamma = Cay(G, S)$ mit S endl. Erz. Syst.

Ann. $k := E(\Gamma) \geq 3$ und $k < \infty$.
Dann ist G unendlich und es existiert ein $R > 0$ s.d. $\Gamma \setminus B_R(1)$ k Zusammenhangskomponenten hat.
Wir finden daher ein $g \in G$ mit $d(1, g) > 2R$

Wir finden daher ein $g \in \Gamma$ [illegible]
und g liegt in einer unbeschränkten Komponente von $\Gamma \setminus B_R(\mathbb{1})$.

Außerdem ist (weil Links-translation eine isom. Wirkung ist)

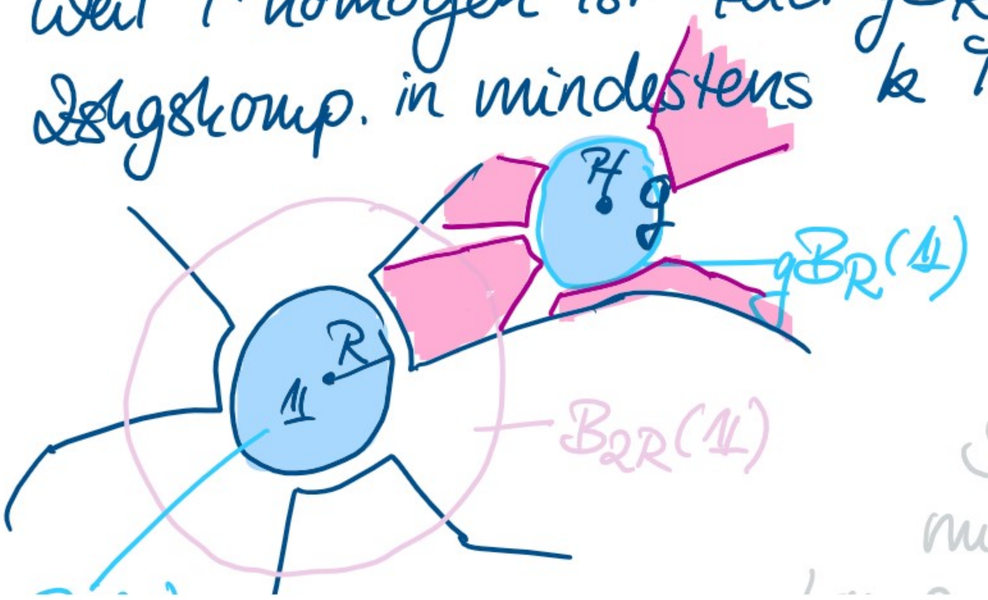
$$B_R(\mathbb{1}) \cap B_R(g) = \emptyset.$$

Denn $d(gb, \mathbb{1}) \geq \overbrace{d(\mathbb{1}, g) - d(gb, g)}^{= d(b,\mathbb{1})}$
$> 2n - n = n$

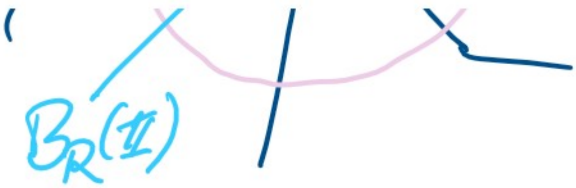
$\forall b \in B_R(\mathbb{1})$.

Weiter gilt: $gB_R(\mathbb{1})$ ist in einer (unbeschr.) Zshgskomponente enthalten, weil $B_R(\mathbb{1})$ zushgd ist und somit auch $gB_R(\mathbb{1})$ zushgd sein muss.

Weil Γ homogen ist teilt $gB_R(\mathbb{1})$ diese Zshgskomp. in mindestens k Teile.



$\Gamma \setminus gB_R(\mathbb{1})$ hat auch k Teile.
Schneide diese mit der Zshgs-



mit des Zshgs-komp. von g in $\Gamma \setminus B_R(1)$ so entstehen möglicherweise mehr Teile.

Mindestens $(k-1)$ dieser Teile sind unbeschränkt.

Beweis davon: ÜA auf nächstem Blatt.

Setze $B := B_R(1) \cup gB_R(1)$.

Dann hat $\Gamma \setminus B$ mindestens
$$(k-1)+(k-1) = 2k-2$$
unbeschränkte Zushgskomponenten.

Also ist $E(\Gamma) \geq 2k-2 > k$.
weil $k \geq 3$

$\lightning$ $E(\Gamma) = k$.

Somit gilt $E(\Gamma) \in \{0,1,2,\infty\}$. $\square$

Bem/Satz 11.10

$E(G) = 2 \iff G$ eine UG von endlichem Index besitzt, die isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Beweis-Skizze

„$\Leftarrow$" <u>Ann:</u> Es existiert $H < G$ mit $[G:H] < \infty$ und $H \cong \mathbb{Z}$.

Dann ist $Cay(\mathbb{Z}, T) \cong_{QI} Cay(G, S)$ für beliebige endl. Er.Syst. T von $\mathbb{Z}$ und S von G.

Weil $E(\mathbb{Z}) = 2$ und Enden eine QI-Invariante gilt $E(G) = 2$.

„$\Rightarrow$" <u>Ann $E(G) = 2$:</u>

Jede quasi Isom. induziert eine Bijektion auf den Enden.

Die Linksmultiplikation $G \curvearrowright \Gamma$ liefert $\forall g \in G$ eine Isometrie $f_g : \Gamma \to \Gamma$.

Also induziert f_g eine Bijektion $(f_g)_E : Ends(\Gamma) \to Ends(\Gamma)$, wobei $\Gamma = Cay(G, S)$.

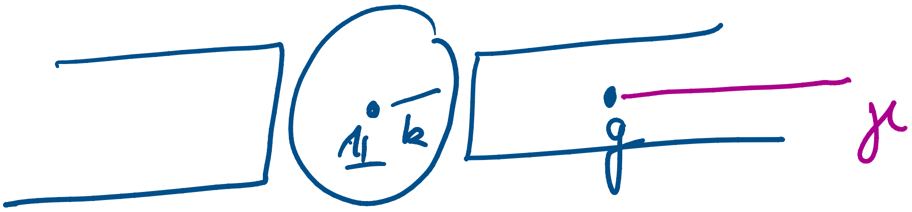
Sei $B = B_k(\mathbb{1})$ wobei k groß genug gewählt sei, dass $\Gamma \setminus B$ zwei Zusligskomp. hat.

D.h. B separiert die Enden von Γ bzw. G.

Wähle $g \in V \setminus B$ so, dass die induzierte

Wähle $g \in V \setminus B$ so, dass die induzierte Abb. $(f_g)_E = id_{Ends(\Gamma)}$.

ÜA: so eine Wahl ist möglich



Sei γ geod. Strahl, der in g startet und B nicht schneidet.

Betrachte $g^n \cdot \gamma$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Weil G isom. wirkt ist $\gamma_n := g^n \gamma$ $\forall n \in \mathbb{N}$ wieder ein geod. Strahl in Γ.

Insbes. ist $end(\gamma) = end(g^n \gamma)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (weil $(f_g)_E = id_{Ends(\gamma)}$).

Man kann zeigen:
g hat unendliche Ordnung und die Folgen $\gamma_n = g^n \gamma$ und $\gamma_{-n} = g^{-n} \gamma$ konvergieren gegen verschiedene Enden von Γ. $\Rightarrow$ $\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}$.

Um noch zu zeigen, dass $H := \langle g \rangle$ in G

Um noch zu zeigen, dass $H := \langle g \rangle$ in G endlichen Index hat muss man dann noch zeigen, dass alle Ecken von V beschränkten Abstand zu $\langle g \rangle$ haben.

$\square$

Def 10.11 freie amalgamierte Produkte

Sei A eine Gruppe, G_i Gruppen mit injektiven Homomorphismen $\alpha_i : A \hookrightarrow G_i$, $i = 1,2$.

Definiere als

freies Produkt

$$G_1 *_A G_2 := \langle G_1 * G_2 \mid \alpha_1(a) = \alpha_2(a), a \in A \rangle$$
$$= (G_1 * G_2) / \langle \{ \alpha_1(a)\alpha_2^{-1}(a), a \in A \} \rangle^{\triangleleft}_{G_1 * G_2}$$

das freie amalgamierte Produkt von G_1 und G_2 bzgl. A.

Bem: Ist $A = \{1\}$ die triviale Gruppe, so ist $G *_A H$ gerade das freie Produkt von G und H.

Bsp. 10.12

1) Freie Gruppen mit n Erzeugern sind freie amalgamierte Produkte von n Kopien von $\mathbb{Z}$ über

„Produkte" von n Kopien von $\mathbb{Z}$ und der trivialen Gruppe.

2) D_∞ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$.

3) $SL(2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/6 *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/4$

vergleiche Bsp. I.4.2 in [BH]

Man zeigt: $G_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{SL(2,\mathbb{Z})}$

$G_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{SL(2,\mathbb{Z})}$

$$A := G_1 \cap G_2 .$$

Dann ist $G_1 \cong \mathbb{Z}/6$, $G_2 \cong \mathbb{Z}/4$, $A \cong \mathbb{Z}/2$.

Die Inklusionsabbildungen $A \hookrightarrow G_i$ induzieren einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/6 *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}_4 \cong G_1 *_A G_2 \cong SL(2,\mathbb{Z}) .$$

<u>Bem 10.13</u>

Auch in freien amalgamierten Produkten gibt es Darstellungen aller Elemente als „reduzierte Wörter". Jedes Element g in $G_1 *_A G_2$ besitzt eine Darstellung der folgenden Form:

folgenden Form:

$g = g_0 h_0 g_1 h_1 \dots g_n h_n$ mit $g_i \in G_1$, $h_i \in G_2$

und $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist $g_i \notin \mathrm{im}(\alpha_1)$

$\forall i \in \{0, \dots, n-1\}$ ist $h_i \notin \mathrm{im}(\alpha_2)$.

Umgekehrt liefert jedes solche Wort ein nicht-triviales Element in $G_1 *_A G_2$.

Beweis: Siehe Bogopolski „Introduction to group theory", EMS, 2008

Graham Higman Bernhard & Hanna Neumann

Def 10.14 HNN-Erweiterungen

G Gruppe, $A, B < G$ Untergruppen und $\varphi: A \to B$ Isomorphismus.

Die **HNN-Erweiterung** von G bzgl φ ist definiert durch

$$G *_\varphi := \langle \underbrace{G}_{\text{Basis der Erweiterung}}, \underbrace{t}_{\text{stabiler Erzeuger}} \mid t^{-1} a t = \varphi(a),\ a \in A \rangle .$$

(neu, zusätzlich)

In der HNN-Erweiterung sind A und B konjugiert (via t).

konjugiert (via t).

<u>Bem 10.15</u>

1) Auch in HNN-Erweiterungen gibt es eine Normalform / reduzierte Form für alle Elemente:

$$z_0 t^{m_1} z_1 t^{m_2} \dots z_{n-1} t^{m_n} z_n$$

mit $m_i \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $z_i \notin A$ wenn $m_i < 0$
$z_i \notin \varphi(A)$ wenn $m_i > 0$.

2) HNN-Erweiterungen entstehen als Fundamentalgruppen von topol. Räumen, die mit sich selbst verklebt werden.
(Seifert van Kampen Theorem)

3) HNN Erweiterungen verallgemeinern Semidirekte Produkte mit $\mathbb{Z}$, denn ist $G = A$ und $\varphi: G \to G$ ein Automorphismus, dann ist

$$G*_\varphi \cong G \rtimes_\varphi \mathbb{Z}.$$

Die Inklusion $G \hookrightarrow G*_\varphi$ ist injektiv.

4) <u>Bsp:</u> Baumslag Solitar groups

4) Bsp: Baumslag Solitar groups

$$BS(m,n) := \langle a,t \mid ta^n t^{-1} = a^m \rangle$$

Es gilt: $BS(1,1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
und $BS(1,-1)$ die Klein-Bottle grp.

Bem/Satz 10.16 Stallings Theorem (1968)

G hat ∞-viele Enden g.d.w.
G als HNN Erweiterung oder freies amalgamiertes Produkt zerfällt.

D.h. $G \cong A *_C B$ oder $\cong A *_C$
mit C endlich, $|A/C| \geq 3$ und $|B/C| \geq 2$.

Insbesondere wirkt G dann nicht-trivial und mit endlichen Kantenstabilisatoren auf einem Baum. ($\leadsto$ Bass-Serre Theorie)

o. Bew.

Ist G endlich erzeugt und torsionsfrei (d.h. $\nexists$ Elemente endlicher Ordnung) dann hat G ∞-viele Enden gdw

dann hat G ∞-viele Enden gdw
G freies Produkt ist, d.h.

$$G \cong H * K$$

und weder H noch K sind trivial.

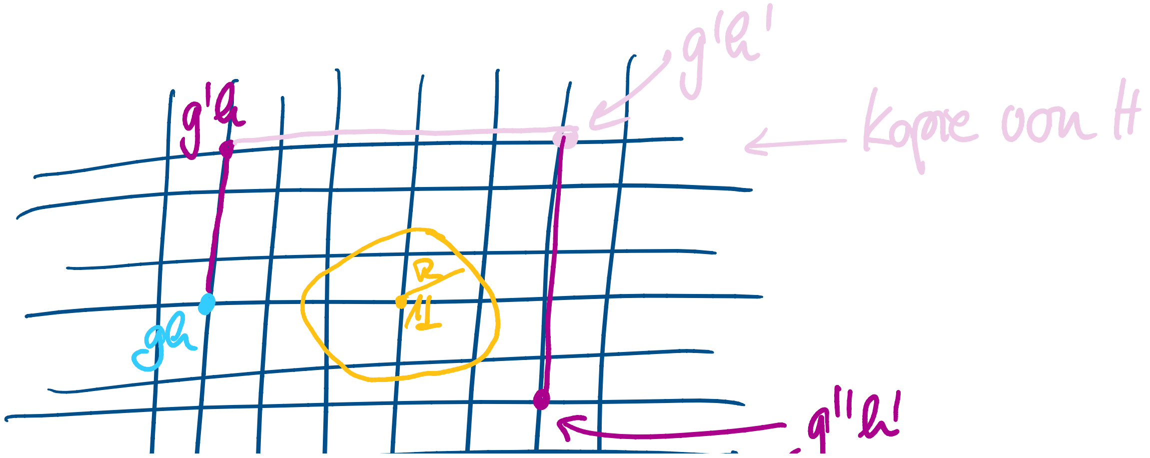
↖ Einfacherer Spezialfall von Stallings' Thm

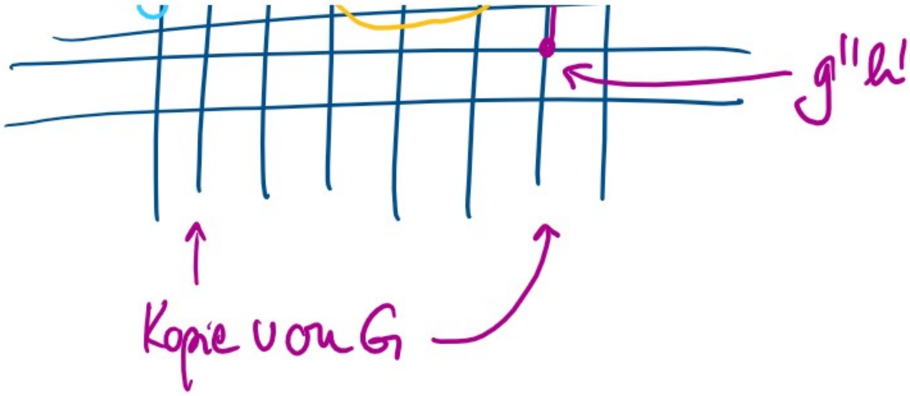
Die Menge der Gruppen mit einem Ende ist groß und wild.

<u>10.17 Satz</u>

Seien G und H endlich erzeugte, unendliche Gruppen. Dann hat das direkte Produkt $G \times H$ ein Ende.

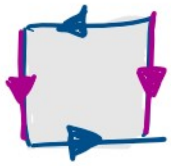
<u>Beweisidee</u>: gehe wie bei $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vor





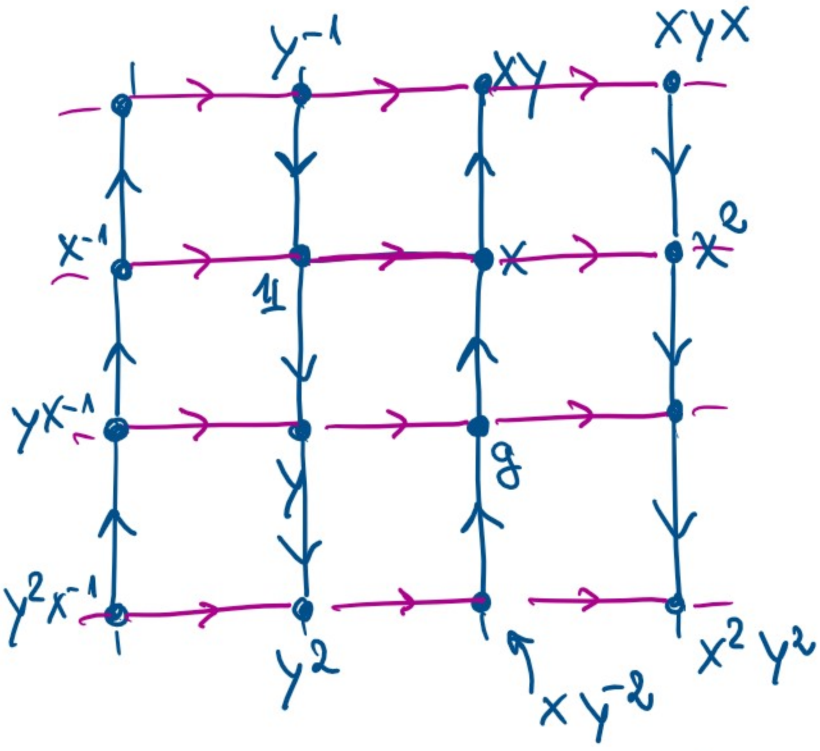
$\square$

10.18 Bsp.

Kleinsche Flasche  $= K$,

$$\pi_1(K) = G := \langle x, y \mid \underbrace{xy = y^{-1}x}_{\hat{=}\; xyx^{-1}y = \mathbb{1}} \rangle$$

$Cay(G, \{x, y\})$:



$g = xy^{-1} = yx$

G besitzt genau ein Ende.