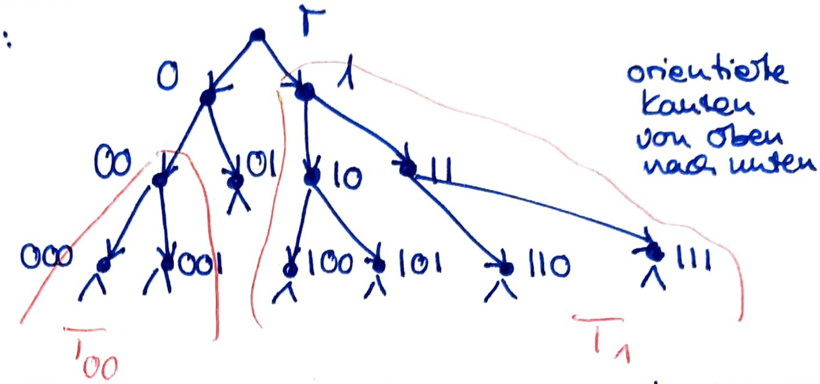
Konstruktion Grigorchuk's group *

"the first construction"

Zunächst: Automorphismen vom infinite rooted binary tree T

Sei T wie folgt:



Ecken in T $\underset{1:1}{\hat{=}}$ Wörtern in $\{0,1\}$

wobei $r \hat{=} \emptyset$

Kanten (v,w) sind Paare v,w mit $w = v0$ oder $w = v1$.

Setze $|v|$ = Abstand von v zu r und nenne $|v|$ das Level von v.

Bezeichne mit T_v den Unterbaum in T, der Wurzel v hat. z.B. T_{00} oben, oder T_1

Die Automorphismen von T seien die Gruppe

$$\mathrm{Aut}(T) = \{ \tau : V \to V \mid \tau \text{ bildet orientierte Kanten wieder auf solche ab} \}$$

Eigenschaften:
- $\tau(r) = r \quad \forall \tau \in \mathrm{Aut}(T)$
- $|\tau(v)| = |v| \quad \forall \tau \in \mathrm{Aut}(T) \;\&\; \forall v \in V(T)$

Schreibe $\mathbb{1}$ für Identität in $\mathrm{Aut}(T)$.

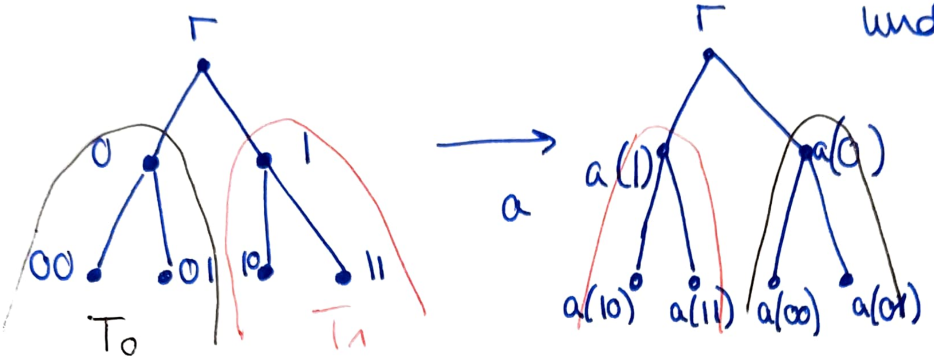
* Based on Grigorchuk - Pak: grps of intermediate growth - an introduction

Konkrete Beispiele für Automorphismen:

1) Sei $a: T \to T$ definiert durch

$$a: (0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (1, x_1, x_2, \dots)$$

d.h. a vertauscht die Teilbäume T_1 und T_0



Es ist $a^2 = \mathbb{1}$.

2) Analog definiere $a_v: T \to T$ durch

$$a: (v\,0\,x_1\,x_2 \dots) \mapsto (v\,1\,x_1\,x_2 \dots)$$

$$w \mapsto w$$

w nicht von obiger Form

d.h. a vertauscht Teilbäume T_{v0} mit T_{v1} und ist Identität auf dem Rest

Untergruppen von und Abbildungen auf $Aut(T)$:

3) Definiere $Aut(T_v) :=$ UG von $Aut(T)$, Autom. die T_v auf T_v abbildet und außerhalb die Identität ~~ist~~ sind.

Der natürliche Graph-Isomorphismus

$$\iota_v: T \to T_v \quad : \quad (x_1 x_2 x_3 \dots) \mapsto (v\, x_1 x_2 x_3 \dots)$$

induziert einen Gruppen-Isomorphismus

$$\iota_v: Aut(T) \to Aut(T_v).$$

4) Definiere eine Abbildung

$$\varphi : \mathrm{Aut}(T) \times \mathrm{Aut}(T) \longrightarrow \mathrm{Aut}(T)$$

$$(J_0, J_1) \longmapsto J := \varphi(J_0, J_1)$$

wobei $J := \underbrace{\iota_0(J_0)}_{\in \mathrm{Aut}(T_0)} \circ \underbrace{\iota_1(J_1)}_{\in \mathrm{Aut}(T_1)} \in \mathrm{Aut}(T)$

Die Gruppe $\mathrm{Aut}(T)$ hat selbst eine spannende Struktur! Zum einen kann sie nicht endlich erzeugt sein und ist überabzählbar, zum anderen gilt:

Prop. $\mathrm{Aut}(T) \cong \mathrm{Aut}(T) \wr \mathbb{Z}_2$

wobei das Kranzprodukt (wreath product) einer Gruppe G mit $\mathbb{Z}_2$ geg. ist durch das semidirekte Produkt $(G \times G) \rtimes \mathbb{Z}_2$ wobei $\mathbb{Z}_2$ die beiden Kopien vertauscht.

Beweisidee: Erweitere φ aus 4) zu

$$\psi : (\mathrm{Aut}(T) \times \mathrm{Aut}(T)) \rtimes \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(T)$$

durch: $\psi(\tau_0, \tau_1; \sigma) = \begin{cases} \varphi(J_0, J_1) & \text{wie in 4), falls } \sigma = id \\ \varphi(J_0, J_1) \cdot a & \text{falls } \sigma \neq id \text{, } a \text{ wie in 1)} \end{cases}$

Rechne nach, dass Multipl. von Autom. mit dem semidirekten Produkt übereinstimmt und ψ ein Iso von Gruppen ist. $\square$

Die „erste Konstruktion":

Sei $G := \langle a, b, c, d \rangle \leq \mathrm{Aut}(T)$

wobei: a definiert wie in 1) und b, c, d implizit / rekursiv definiert durch

$$(\circ) \qquad b = \psi(a, c), \quad c = \psi(a, d), \quad d = \psi(\mathbb{1}, b)$$

Alternative Beschreibungen von b, c, d:

$$(*) \qquad b := (a_0 \cdot a_{1^3 0} \cdot a_{1^6 0} \cdots)(a_{10} \cdot a_{1^4 0} \cdot a_{1^7 0} \cdots)$$

$$c := (a_0 \cdot a_{1^3 0} \cdot a_{1^6 0} \cdots)(a_{1^2 0} \cdot a_{1^5 0} \cdot a_{1^8 0} \cdots)$$

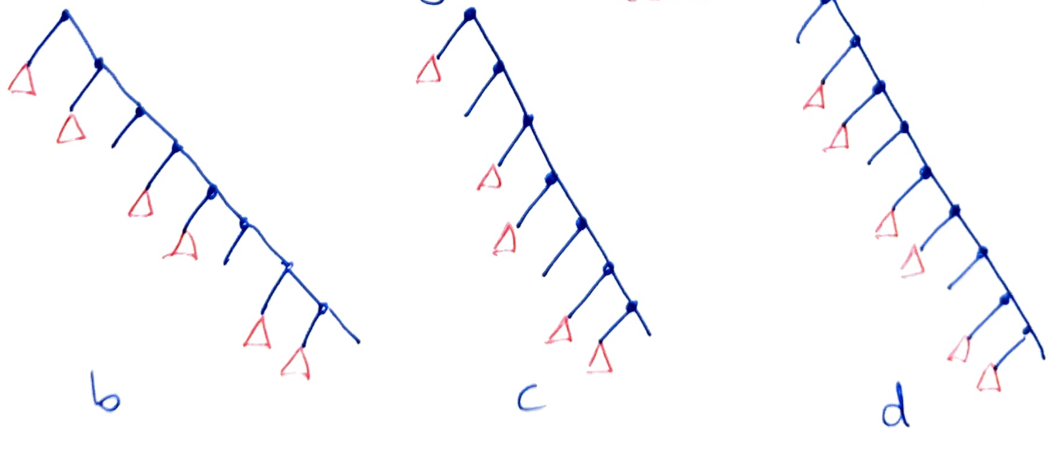
$$d := (a_{10} \cdot a_{1^4 0} \cdot a_{1^7 0} \cdots)(a_{1^2 0} \cdot a_{1^5 0} \cdot a_{1^8 0} \cdots)$$

hier ist a_v wie in 2 und 1^m Kurzschreibweise für $\underbrace{11 \dots 1}_{m\text{-fach}}$.

Die $a_{1^m 0}$ in $(*)$ kommutieren: b, c, d sind also wohldefiniert.

graphische Darstellung:

△ bedeutet: Teilbäume darunter werden vertauscht



Satz: G hat mittleres Wachstum.

weitere Eigenschaften von G:

- G is infinite and finitely generated
- G hat die selbst-Ähnlichkeitseigenschaft, d.h. $G_v = \mathrm{Stab}_G(v)|_{T_v} \cong G$
- G und $G \times G$ sind kommensurabel d.h. $\exists$ UG $H_1 < G$ und $H_2 < G \times G$ s.d. $H_1 \cong H_2$ und $[G : H_1]$ und $[G \times G ; H_2] < \infty$

  (zB $\mathbb{Z}$ kommensurabel zu $D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}_2$)
- G has solvable WP
- the growth of G is subexponential and superpolynomial
- G is <u>not</u> finitely presented

<u>Conj.</u> $\nexists$ a f.p. grp of intermediate growth