Thema 10 Gruppenwachstum

Mittwoch, 5. Januar 2022 12:07

10. Gruppenwachstum

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Frage ob man die Größe einer Gruppe (bis auf Quasi-Isometrie) messen kann.

Def. 10.1

G endl. erz. Gruppe und $S \subset G$ ein endliches Erzeugendensystem. Dann heißt

$$\beta_{G,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$r \mapsto |B_r^{G,S}(e)|$$

Wachstumsfunktion von G bzgl S.

Hierbei ist $B_r^{G,S}(e) := \{ g \in G \mid d_S(g,e) \leq r \}$

ist endlich, wenn S endlich ist

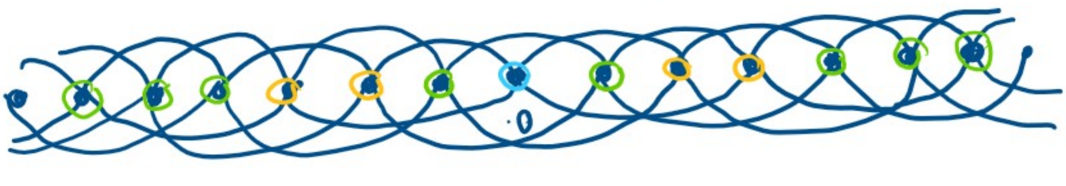
Bsp. 10.2

1) $G = \mathbb{Z}$, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2,3\}$

Dann ist

$$\beta_{\mathbb{Z},S_1} = (r \mapsto 2r+1)$$

$$\beta_{\mathbb{Z},S_2} = \left(r \mapsto \begin{cases} 1 & r=0 \\ 5 & r=1 \\ 6r+1 & r \geq 2 \end{cases}\right.$$



Abstand 0 Abstand 1 Abstand 2

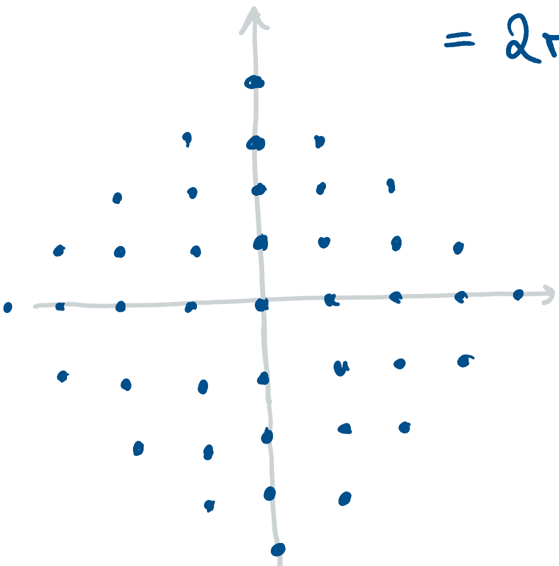
für $r=2$ ist $\beta_{\mathbb{Z},S_2}(2) = 1 + 4 + 8 = 13$

für $r = 2$ ist $\beta_{\mathbb{Z},S_2}(2) =$

$\rightsquigarrow$ verschiedene Erzeugendensysteme liefern also verschiedene Wachstumsfunktionen.

2) $\mathbb{Z}^2$ hat bzgl $\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\} = S$ eine quadratische Wachstumsfunktion:

$$\beta_{\mathbb{Z}^2,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$r \mapsto 1 + 4 \cdot \left(\sum_{j=1}^{r} (r+1-j)\right)$$
$$= 2r^2 + 2r + 1$$



4-Ball in $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^2, S)$

3) Die Wachstumsfunktion von $\mathbb{Z}^n$ wächst polynomiell vom Grad n

4) Freie Gruppen:

F_2 mit Erzeuger $S = \{a, b\}$

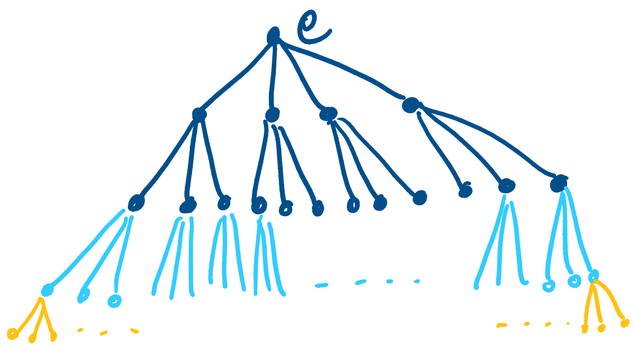
$$\beta_{F_2,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : r \mapsto 2 \cdot 3^r - 1$$

$$= 1 + 4 \cdot \left(\sum_{j=0}^{r-1} 3^j\right)$$

3-Ball in $\mathrm{Cay}(F_2, S)$:

4-Ball:

5-Ball:



allgemeiner für $F = F_n$:

$$\beta_{F,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$r \mapsto 1 + 2n\left(\sum_{j=0}^{r-1} (2n-1)^j\right)$$
$$= 1 + \frac{n}{n-1}\left((2n-1)^r - 1\right)$$

wobei $n = \mathrm{rk}(F)$

und S Standarderz.syst. mit n Erzeugern.

<u>Proposition 10.3</u>

G von S endl. erzeugt. Dann gilt:

1. Sub-multiplikativität

$\forall r, r' \in \mathbb{N}$ ist $\beta_{G,S}(r+r') \leq \beta_{G,S}(r) \cdot \beta_{G,S}(r')$

2. untere Schranke

Ist G unendlich, dann ist $\beta_{G,S}$ streng monoton wachsend und

$\beta_{G,S}(r) \geq r \quad \forall r \in \mathbb{N}$.

3. obere Schranke

$\forall r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\beta_{G,S}(r) \leq \beta_{F(S),S}(r) = 1 + \frac{|S|}{|S|-1}\left((2|S|-1)^r - 1\right)$$

s.o. im Bsp.

s.o. im Bsp.

Beweis

Eigenschaften 1 & 2 können direkt aus den Eigenschaften der Wortmetrik bzgl. S auf G abgeleitet werden.

zu 3)

Betrachte Homom. $\varphi : F(S) \longrightarrow G$ mit $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$. Es gilt:

$$d_S(\varphi(g), \varphi(h)) \leq d_S(g,h) \quad \forall g,h \in F(S).$$

Insbesondere ist φ surjektiv, weil S die Gruppe G erzeugt. Damit gilt:

$$\beta_{G,S}(r) = |B_r^{G,S}(e)| = |\varphi(B_r^{F(S),S}(e))|$$
$$\leq |B_r^{F(S),S}(e)| = \beta_{F(S),S}(r)$$

$\forall r \in \mathbb{N}$.

$\square$

Wie hängen die Wachstumsfunktionen zu verschiedenen Erzeugendensystemen zusammen? Was haben sie gemeinsam?

Def. 10.4

Eine versallgemeinerte Wachstumsfunktion (vWF) ist eine wachsende Funktion $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Wir sagen die vWF f quasi-dominiert g, wenn es Konstanten b und c gibt in $\mathbb{R}_{>0}$ s.d. gilt:

$\forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist $g(r) \leq c \cdot f(c \cdot r + b) + b$.

Schreibe $g \prec f$.

Zwei vWF f und g sind quasi-äquivalent, wenn gilt $f \prec g$ und $g \prec f$.

Wir schreiben dann $g \sim f$.

Man kann zeigen, dass quasi-äquivalent zu sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller vWF ist.

Quasi-Dominanz definiert eine partielle Ordnung auf den Äquivalenzklassen.

Bsp. 10.5 Verallgemeinerte Wachstumsfkt.

Monome

Die Abbildung $x \mapsto x^a$ ist für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ fest gewählt eine vWF.

Es gilt: $(x \mapsto x^a) \prec (x \mapsto x^{a'}) \Longleftrightarrow a \leq a'$.

Beweis: Ist $a \leq a'$, dann ist $\forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

Beweis: Ist $a \leq a'$, dann ist $\forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$r^a \leq r^{a'+1} + 1 \,. \quad (*)$$

1) $r \geq 1$

weil $e^{\ln(r^a)} = e^{a \cdot \ln(r)}$

$\leq e^{(a'+1)\ln(r)}$

$\uparrow$

wenn $\ln(r) > 0$ d.h. $r \geq 1$

2) $r < 1$

r^a und $r^{a'+1} < 1$

und somit gilt $(*)$

weil rechte Seite > 1.

Somit ist $(x \mapsto x^a) \preceq (x \mapsto x^{a'})$ mit $c = b = 1$.

Ist umgekehrt $a > a'$, dann ist $\forall c, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r^a}{c(cr+b)^{a'} + b} = \infty$$

$\Rightarrow \forall c, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert ein $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$r^a \geq c \cdot (cr+b)^{a'} + b$$

$\Rightarrow \quad (x \mapsto x^a) \not\preceq (x \mapsto x^{a'})$. $\square$

Insbesondere ist also $(x \mapsto x^a) \sim (x \mapsto x^{a'})$

$\Leftrightarrow a = a'$.

Exponentialfkt

Ist $a \in \mathbb{R}_{>1}$, dann ist $(x \mapsto a^x)$ eine vWF.

Man kann zeigen:

- $(x \mapsto a^x) \sim (x \mapsto b^x) \quad \forall a, b > 1$
- $(x \mapsto a^x) \succ (x \mapsto x^b) \quad \forall a > 1$ und $\forall b \geq 0$

- $(x \mapsto a^x) \not\sim (x \mapsto x^b)$ — " —

Bsp 10.6

WF liefern vWF durch folgende Zuordnung: gegeben $\beta_{G,S} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für Gruppe G, die von S endlich erzeugt ist. Dann ist

$$r \longmapsto \beta_{G,S}(\lceil r \rceil)$$

eine vWF von $\mathbb{R}_{\geq 0}$ nach $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Bem 10.7

Gegeben zwei WF $\beta_{G,S}$ und $\beta_{H,T}$ für zwei von S bzw T endlich erzeugte Gruppen G & H. Dann sagen wir $\beta_{G,S}$ quasi-dominiert bzw ist quasi äquivalent zu $\beta_{H,S}$, wenn die assoziierten vWF diese Eigenschaften haben.

Genauer: $\beta_{G,S}$ quasi-dominiert $\beta_{H,T}$, wenn es Konstanten $c, b \in \mathbb{N}$ gibt s.d.

$$\forall r \in \mathbb{N} : \beta_{H,T}(r) \leq c \cdot \beta_{G,S}(cr+b) + b.$$

Prop. 10.8 Wachstumsfkt. & quasi-Isometrie

Seien G bzw H von S bzw T endlich erzeugt.

Seien G bzw H von S bzw T endlich erzeugt.

1. Wenn es eine quasi-isometrische Einbettung von G nach H gibt, dann gilt:

$$\beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$$

2. Sind G und H quasi-isometrisch, dann sind $\beta_{G,S}$ und $\beta_{H,T}$ quasi-äquivalent.

Beweis:

Teil 2 folgt aus Teil 1 und den Definitionen von quasi-isometrisch und quasi-äquivalent.

Wir zeigen 1.:

Sei $f: H \to G$ quasi-isometrische Einbettung.

Dann gibt es $c>0$ s.d. $\forall g, g' \in G$ gilt:

$$\frac{1}{c} d_S(g,g') - c \leq d_T(f(g), f(g')) \leq c \cdot d_S(g,g') + c.$$

Setze $e' := f(\mathbb{1})$. Dann ist für $g \in B_r^{G,S}(\mathbb{1})$

$$d_T(f(g), e') \leq c \cdot d_S(g, \mathbb{1}) + c \leq c \cdot r + c$$

und somit

$$f(B_r^{G,S}(\mathbb{1})) \subset B_{c \cdot r + c}^{H,T}(e'). \quad (*)$$

Weiter gilt $\forall g, g' \in G$ mit $f(g) = f(g')$, dass weiter gilt $\forall g, g' \in G$ mit $f(g) = f(g')$, dass

$$d_S(g,g') \leq c\big(\underbrace{d_T(f(g), f(g'))}_{=0} + c\big) = c^2. \quad (**)$$

Die beiden Metriken d_S und d_T sind invariant unter Linkstranslation.
Damit erhalten wir:

Abschätzg nach oben der nicht-Injektivität

$$\begin{aligned}
\beta_{G,S}(r) &= \left|B_r^{G,S}(\mathbb{1})\right| \\
&\leq \left|B_{c^2}^{G,S}(\mathbb{1})\right| \cdot \left|B_{cr+c}^{H,T}(e')\right| \\
\overset{\text{wegen } (*) \text{ und } (**)}{} &= \left|B_{c^2}^{G,S}(\mathbb{1})\right| \cdot \left|B_{cr+c}^{H,T}(\mathbb{1})\right| \\
\overset{\text{Translationsinvarianz}}{} &= \underbrace{\beta_{G,S}(c^2)}_{=\text{const}} \cdot \beta_{H,T}(cr+c)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \beta_{G,S} \prec \beta_{H,T}$ weil der Term $\beta_{G,S}(c^2)$ nicht vom Radius r abhängt. $\square$

Prop. 10.8 liefert insbesondere, dass quasi-Äquivalenzklassen von WF eine quasi-Isometrie-Invariante für endl. ez. Gruppen liefert. Die Werte dieser Invariante sind quasi-Äquiv. kl. von VWF.

Def 10.9 Typen von Wachstum

Sei G eine endl. erz. Gruppe.
Der Wachstumstyp von G ist die (gemeinsame) quasi-Äquivalenzklasse aller WF von G bzgl endlichen Erzeugendensystemen.

- G hat exponentielles Wachstum, wenn es den selben Wachstumstyp hat wie $(x \longmapsto e^x)$
- G hat polynomielles Wachstum, wenn für ein (und somit jedes) Erzeugendensystem S von G ein $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ existiert s.d.

$$\beta_{G,S} \prec (x \longmapsto x^a)$$

- G hat mittleres Wachstum, wenn es weder exponentielles noch polynomielles Wachstum hat.

Bemerkung

1) Wir haben in 10.3.3 gezeigt, dass endlich erzeugte Gruppen höchstens exponentielles Wachstum haben.

2) Gruppen können nicht gleichzeitig zwei verschiedene Wachstumstypen haben.

Mit Prop. 10.8 und Bsp. 10.5 folgt:

Kor 10.10: (QI Invarianz des Wachstumstyps)

Der Wachstumstyp eines endl. erz. Gruppe ist eine QI-Invariante.
Endl. erz. Gruppen von versch. Wachstumstyp können also nicht q.i. sein.

Bsp. 10.11

1) polynomiell:
$\forall n \in \mathbb{Z}$ hat $\mathbb{Z}^n$ den Wachstumstyp von $(x \longmapsto x^n)$

2) exponentiell:
freie Gruppen von endlichem Rang haben alle Wachstumstyp von $(x \longmapsto e^x)$

3) mittleres:
Hier Beispiele anzugeben ist nicht leicht. Grigorchuk konstruierte in den 1980er Jahren Beispiele mittels Automorphismen von Bäumen als sogenannte automatische Gruppen.

automatische Gruppen.

Bsp. 10.12:

Alternativer Beweis für $\mathbb{Z}^n \sim_{q.i.} \mathbb{Z}^m \iff n = m$:

Nach 10.2 ist $(x \mapsto x^a) \sim (x \mapsto x^b)$
gdw $a = b$.
Nach Bsp. 10.11 1) hat $\mathbb{Z}^n$ Wachstumstyp
von $(x \mapsto x^n)$ und $\mathbb{Z}^m$ den von $(x \mapsto x^m)$.
Diese sind äquivalent gdw $n = m$.

Was passiert mit dem Wachstumstyp, wenn man sich Untergruppen anschaut?

Satz 10.13 (Wachstum von UG)

G endl. erz. und H endl. erz. UG von G.
Ist T endl. Erz.syst. von H und
S — " — ———— G
dann ist $\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S}$.

Beweis:

Sei $S' := S \cup T$. Dann ist S' auch ein
endliches Erzeugersystem von G

Sei $S' := S \cup T$. Dann ist S' auch ein endliches Erz.system von G.
Für beliebiges $r \in \mathbb{N}$ und für alle $h \in B_r^{H,T}(\mathbb{1})$ gilt:

$$d_{S'}(h, \mathbb{1}) \leq d_T(h, \mathbb{1}) \leq r.$$

Somit $B_r^{H,T}(\mathbb{1}) \subset B_r^{G,S'}(\mathbb{1})$.

Insbes. ist $\beta_{H,T}(r) \leq \beta_{G,S'}(r)$ und daher auch

$$\beta_{H,T} \prec \beta_{G,S'} \sim \beta_{G,S}$$

quasi-äquiv. nach 10.4 $\square$

<u>Kor 10.14:</u>

Hat eine endl. erz. Gruppe eine UG von exponentiellem Wachstum, dann hat die Gruppe selbst ebenfalls exponentielles Wachstum.

← direkt aus 10.13.

<u>Bem.</u> Nicht jede (endl. erzeugte) Gruppe von exponentiellem Wachstum enthält eine UG isomorph zu einer freien Gruppe!

<u>Bem.</u> Inklusionsabb. einer UG in eine Gruppe ist nicht unbedingt eine quasi-isometrische Einbettung!

z.B. ist $\mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \langle x,y,z \mid [x,z], [y,z], [x,y]z^{-1} \rangle$
def durch $1 \longmapsto z$

<u>keine</u> quasi-isom. Einbettg von $\mathbb{Z}$ in die Heisenberggruppe!

<u>Beweis:</u> $S := \{x,y,z\}$, dann ist $\forall n \in \mathbb{N}$

$$d_S(1\!\!1, z^{n^2}) = d_S(1\!\!1, [x^n, y^n]) \leq 4 \cdot n$$

$\Rightarrow$ $n \mapsto d_S(1\!\!1, z^n)$ wächst <u>nicht</u> linear

$\Rightarrow$ die Inklusion ι kann keine Q.I.-Einbettg sein. $\square$