Thema 09 Das Wort- und Konjugationsproblem

Montag, 22. November 2021 15:15

Kap. 9 Das Wortproblem

(Max Dehn * 1878 + 1952)

Def 9.1 $G = \langle S | R \rangle$ endlich präsentiert.

Das Wortproblem (WP) für G ist lösbar, wenn es einen Algorithmus gibt, der für jedes Wort $w \in (S \cup S^{-1})^*$ entscheidet, ob w in G das neutrale Element repräsentiert.

Bem. genauer: die Mengen
$\{ w \in (S \cup S^{-1})^* \mid w \text{ repräs. } 1\!\!1 \in G \}$ und
$\{ \quad -\text{"}- \quad \mid w \text{ repräs. nicht } 1\!\!1 \in G \}$
sind rekursiv aufzählbar.

(→ Berechenbarkeitstheorie, Turing Maschinen; Entscheidungstheorie)

(ÜA) freie Gruppen haben lösbares WP.

Bem. 9.2 i.A. ist das WP nicht lösbar. Aber es gibt Klassen von Gruppen, die lösbares WP haben.
zB (trivialerweise) endliche Gruppen, Coxetergruppen, Zopfgruppen, π_1 (geschl. orientierb. Flächen)
Dehn (1911)

← folgt direkt aus 9.5 und 9.6!

9.3 Satz

Hyperbolische Gruppen haben lösbares WP.
Genauer: Ist G von S endl. erzeugt und

← folgt direkt aus 9.5 und 9.6!

9.3 Satz

Hyperbolische Gruppen haben lösbares WP.
Genauer: Ist G von S endl. erzeugt und hyperbolisch, so existiert $R \subset (S \cup S^{-1})^*$ mit $|R| < \infty$ s.d. $G \cong \langle S \mid R \rangle$ und das WP ist für $\langle S \mid R \rangle$ lösbar.

Wir werden folgendes Hilfsmittel für den Beweis verwenden:

9.4 Def. Eine endliche Präsentierung $\langle S \mid R \rangle$ heißt Dehn-Präsentierung, wenn für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ Wörter u_i, v_i $i = 1, \dots, n$ existieren mit

(1) $R = \{ u_1 v_1^{-1}, \dots, u_n v_n^{-1} \}$

(2) $\forall j$ ist v_j kürzer als u_j ($v_j = \varepsilon$ ist erlaubt)

(3) $\forall w \in (S \cup S^{-1})^* \setminus \{ \overset{\text{leeres Wort}}{\varepsilon} \}$, die das neutrale Element präsentieren in $\langle S \mid R \rangle$, existiert ein $j \in \{1, \dots, n\}$ s.d. u_j ein Teilwort von w ist.

Bsp. 1) $\langle x, y \mid \underbrace{x x^{-1}}_{u_1} \underset{v_1}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon}}, \underbrace{x^{-1} x}_{u_2} \underset{v_2}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon}}, \underbrace{y y^{-1}}_{u_3} \underset{v_3}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon}}, \underbrace{y^{-1} y}_{u_4} \underset{v_4}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon}} \rangle$

ist Dehn-Präsentierung für F_2.

2) $\langle x, y \mid x y x^{-1} y^{-1} \rangle$ ist endl. Präs. von $\mathbb{Z}^2$, aber keine Dehn-Präsentierung. (Warum?)

9.5 Satz

2) $\langle x,y \mid xyx^{-1}y^{-1}\rangle$ ist endl. Präs. von $\mathbb{Z}^2$, aber <u>keine</u> Dehn-Präsentierung. (Warum?)

<u>9.5 Satz</u>

Ist $\langle S|R\rangle$ Dehn-Präsentierung, so ist das WP lösbar.

Mit diesem Satz bleibt uns dann nur noch z.z., dass hyperb. Gruppen immer eine Dehn-Präsentierung haben.

<u>Beweis 9.5</u> Wir geben einen Algorithmus an:

$R=\{u_1v_1,\dots,u_nv_n\}$ wie in Def 7.4.

Sei $w\in(S\cup S^{-1})^*$ beliebiges Wort.

1.Fall: $w=\varepsilon$, dann präsentiert w das triv. Wort

2.Fall: $w\neq\varepsilon$, dann betrachte

a) ist keines der u_i als Teilwort in w enthalten
$\Rightarrow$ w ist nicht das triv. Wort in $\langle S|R\rangle$, wegen (3) von 7.4.

b) existiert j s.d. u_j Teilwort von w ist:

Schreibe dann $w=w'u_jw''$ für geeignete Wörter $w',w''\in(S\cup S^{-1})^*$.

Nach Def 7.4 ist $u_jv_j^{-1}\in R$, also ist $u_j=v_j$ in $\langle S|R\rangle$ und $w=w'v_jw''$ als Elemente von $\langle S|R\rangle$.

Genauer: $\pi: F(S)\to\langle S|R\rangle = F(S)/\underbrace{\ker(\pi)}_{=\langle R\rangle^{\triangleleft}_{F(S)}}$

Es ist $\pi(w)=\pi(w')\,\pi(u_j)\,\pi(w'')$

$= \pi(w')\,\underbrace{\pi(u_jv_j^{-1})}_{\shortparallel}\,\pi(v_j)\,\pi(w'')$

Genauer: $\pi: F(S) \to \langle S | R\rangle = F(S)/\underbrace{\ker(\pi)}_{=\langle R\rangle^{\triangleleft}_{F(S)}}$

Es ist $\pi(w) = \pi(w')\,\pi(u_j)\,\pi(w'')$
$$= \pi(w')\,\underbrace{\pi(u_j v_j^{-1})}_{=1\!\!1_{\langle S|R\rangle}}\,\pi(v_j)\,\pi(w'')$$
$$= \pi(w')\,\pi(v_j)\,\pi(w'') = \pi(w' v_j w'').$$

$\Rightarrow$ w präsentiert $1\!\!1$ gdw das kürzere Wort $w'v_jw''$ die $1\!\!1$ präsentiert.

Wende das Verfahren nun (rekursiv) auf $w'v_jw''$ an. Dieses Vorgehen terminiert nach endl. vielen Schritten, da die Länge immer echt verkleinert wird.

$\Rightarrow$ WP ist lösbar. $\square$

9.6 Satz (hyperbolisch $\Rightarrow \exists$ Dehn Präsentierg.)

G hyperbolische Gruppe.
Für alle endl. Erzsyst. S von G existiert eine endliche Menge $R \subset (S \cup S^{-1})^*$ s.d. $\langle S | R\rangle$ Dehn-Präsentierung von G ist.

insbes. zeigt das, dass hyp. Gruppen endlich präsentiert sind!

Jetzt wird es technisch!

Lemma 9.7 ("Trapping" für lokale Geodäten)

Jetzt wird es technisch!

Lemma 9.7 („Trapping" für lokale Geodäten)

Sei $\delta \geq 0$, $c > 8\delta$ und (X,d) ein δ-hyp. Raum. Sei $\gamma : [0,\ell] \to X$ eine <u>c-lokale Geodäte</u>, d.h. $\forall t,t' \in [0,\ell]$ mit $|t-t'| < c$ gilt: $d(\gamma(t),\gamma(t')) = |t-t'|$.
Sei weiter $\gamma' : [0,\ell'] \to X$ Geodäte mit $\gamma'(0) = \gamma(0)$ und $\gamma'(\ell') = \gamma(\ell)$, so gilt:

$$\operatorname{Im}(\gamma) \subseteq U_{2\delta}(\operatorname{Im}(\gamma')).$$

↑ lokale Geodäten sind „nahe bei" Geodäten.

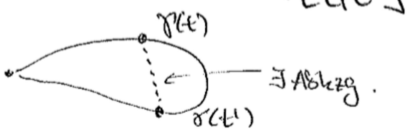
Bew. ÜA.

Wir verwenden 7.7 um z.z.

Lemma 9.8 (Abkürzungen)

G hyperb. Gruppe, S endl. Erz.syst. von G und $\overset{(\to)}{Cay}(G,S)$ δ-hyperb. für ein $\delta > 0$.
Sei $\gamma : [0,n] \to \overset{(\to)}{Cay}(G,S)$ ein stückweise lineare nach Bogenlänge parametrisierter, geschlossener Weg, so existiert $t,t' \in [0,n]$ mit

$$\ell(\gamma|_{[t,t']}) \leq 8 \cdot \delta \quad \text{und} \quad \gamma|_{[t,t']} \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ geodätisch.}$$



Beweis 9.8

Sei OE γ nach Bogenl. parametr. (d.h. $\left|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right| = 1 \;\; \forall t$)
Wir zeigen, dass γ für ein $c > 8\delta$

Beweis 9.8

Sei OE γ nach Bogenl. parametr. (d.h. $\left|\frac{d}{dt}\gamma(t)\right| = 1$ $\forall t$)

Wir zeigen, dass γ für ein $c > 8\delta$ keine c-lokale Geodäte sein kann (durch $\lightning$).

Ann: $\exists c > 8\delta$ mit γ c-lokale Geodäte in $Cay(G,S)$.

Weil $\gamma(0) = \gamma(n)$ muss dann $n > 8\delta$ sein (weil sonst γ Geodäte von $\gamma(0) \rightsquigarrow \gamma(n) = \gamma(0)$ ist $\lightning$).

Nach Le 9.7 ist γ 2δ-nahe an jeder Geodäten, die in $\gamma(0)$ beginnt und in $\gamma(n) (= \gamma(0))$ endet.

Die konstante Abb. ist eine solche Geodäte.

$\Rightarrow \operatorname{Im}(\gamma) \subset U_{2\delta}(\gamma(0)) = B_{2\delta}(\gamma(0))$.

$$\Rightarrow 4\delta \geq \operatorname{diam}(B_{2\delta}(\gamma(0))) \underset{\gamma = \text{geschlossen}}{\geq} d_S(\gamma(0), \gamma(5\delta)) \overset{\text{weil } \gamma \text{ eine c-lokale Geodäte mit } c > 8\delta \text{ ist.}}{=} 5 \cdot \delta$$

$\lightning$

Also kann für $c > 8\delta$ die Kurve γ keine c-lokale Geodäte sein.

$\Rightarrow \exists t, t' \in [0,n]$ mit der Eigenschaft, dass $|t - t'| \leq 8\delta$ und $d(\gamma(t), \gamma(t')) \neq |t - t'|$.

Insbes. ist $\gamma|_{[t,t']}$ <u>keine</u> Geodäte und $\ell(\gamma|_{[t,t']}) = |t - t'| \leq 8 \cdot \delta$. $\square$

Beweis 9.6 (hyperb. $\Rightarrow$ Dehn-Präs.)

Sei $\pi : F(S) \to G$ die natürliche Projektion.

Definiere (inspiriert vom Abkürzungslemma 7.8)

<u>Beweis **9.6**</u> (hyperb. $\Rightarrow$ Dehn-Präs.)

Sei $\pi: F(S) \to G$ die natürliche Projektion.
Definiere (inspiriert vom Abkürzungslemma 7.8)

$$R := \{ uv^{-1} \mid u,v \in (S \cup S^{-1})^*,\ |u| \le D,\ |u| > d_S(\mathbb{1}, \pi(u)),$$
$$\pi(v) = \pi(u),\ |v| = d_S(\mathbb{1}, \pi(u)) \}$$
$$\cup \underline{\{ s s^{-1} \varepsilon \mid s \in (S \cup S^{-1}) \}}.$$

wobei $D := \lceil 8 \cdot \delta \rceil + \underline{2}$, G δ-hyperbolisch.

stellt sicher, dass schon in

Betrachte $\varphi: \langle S \mid R \rangle \xrightarrow{\text{Hom.}} G$ induziert durch $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$. Weil $\langle S \rangle = G$ ist, ist φ surjektiv.

<u>Beh.</u> $\underbrace{\varphi \text{ ist injektiv}}_{\Leftrightarrow\ \ker(\pi) = \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}}$ und $\langle S \mid R \rangle$ ist eine Dehn-Präsentierung für G.

<u>Bew.</u> Def von R beinhaltet, dass $\pi(v) = \pi(u)$ ist. Also ist $\langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)} \subset \ker(\pi)$.
Es bleibt also noch z.z., dass „$\supset$" gilt.

Sei dazu $w \in (S \cup S^{-1})^*$ ein Wort mit $\pi(w) = \mathbb{1}$.
Wir zeigen mit Induktion über $l(w)$, dass $w \in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$ ist und w ein Teilwort wie in der Def. von Dehn-Präsentierung gefordert hat.

<u>$l(w) = 0$</u> $\leadsto$ $w = \varepsilon$ leeres Wort ✓

Sei also $l(w) > 0$ und gelte die Beh. $\forall$ Wörter, die kürzer sind als w.

<u>1. Fall</u> w enthält ein Teilwort st mit $s,t \in S \cup S^{-1}$ und $\pi(st) = \mathbb{1}$.

Dann ist $st \in R$ und $st = u$, $v = \varepsilon$ ist das ... Paar für die Dehn-Präsentierung.

Dann ist $st \in R$ und $st = u$, $v = \varepsilon$ ist das gesuchte Paar für die Dehn Präsentierung.
Lösche st aus w und erhalte $w' \in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$ nach Induktion
Multipliziert man w mit einem geeigneten Konjugat von st, so erhält man $w \in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$

$w = w_1 st w_2 \qquad w' = w_1 w_2$

$$w = w_1 w_2 w_2^{-1} st w_2 = \underset{\in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}}{w'} \cdot \underbrace{w_2^{-1} st w_2}_{\in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}}$$

$\Rightarrow w \in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$.

<u>2. Fall</u> w enthält kein Teilwort wie im 1. Fall.

Dann definiert w einen geschlossenen Pfad in $Cay(S, G)$ weil $\pi(w) = \mathbb{1}$.
Mit Abkürzungslemma 9.8 existieren Teilwörter w_1, u, w_2 von w so, dass $w = w_1 u w_2$ und $d_S(\mathbb{1}, \pi(u)) < |u| \leq D$.
Wähle v mit $\pi(u) = \pi(v)$, $|v| = d_S(\mathbb{1}, \pi(u))$.
Dann ist u, v das Paar für die Dehn-Präsentierung.
Nach Def von R gilt dann

$$\mathbb{1} = \pi(w) = \pi(w_1)\pi(u)\pi(w_2)$$
$$= \pi(w_1)\pi(v)\pi(w_2) = \pi(w_1 v w_2).$$

Das Wort $w_1 v w_2$ ist echt kürzer als w und somit $w_1 v w_2 \in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$.

Weil $$w = w_1 \underbrace{uv^{-1}}_{\in R} w_1^{-1} \cdot \underbrace{w_1 v w_2}_{\in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}}$$

folgt $w \in \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$.
Somit ist $\ker(\pi) = \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$ und daher

folgt ... $\mathcal{F}(S)$.

Somit ist $\ker(\pi) = \langle R \rangle^{\trianglelefteq}_{\mathcal{F}(S)}$ und daher mit Isomorphiesatz

$$G \cong \mathcal{F}(S)/_{\ker(\pi)} = \mathcal{F}(S)/_{\langle R \rangle^{\trianglelefteq}_{\mathcal{F}(S)}} = \langle S \mid R \rangle.$$

$\square$

Bem 9.9 Es gilt eigentlich: hyperbolisch $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Dehn-Präsentierung.

Def. 9.10 Verwandt mit dem Wortproblem ist das Konjugationsproblem:

Entscheide mittels endl. Algorithmus, ob u, v in G konjugiert sind.

Bsp. 9.11 Freie Gruppen haben lösbares Konjugationsproblem:

Wir nennen ein Wort $w = s_0 \dots s_n$ in $\mathcal{F}(S)$ zyklisch reduziert, wenn $s_i^{-1} \neq s_{i+1}$ $\forall i$ und $s_0^{-1} \neq s_n$.

Sei w beliebiges Wort. So können wir w wie folgt zyklisch reduzieren:

- lösche Teilwörter ss^{-1}, $s \in S \cup S^{-1}$.
- lösche s_0 und s_n falls $s_0^{-1} = s_n$.

wiederhole, bis nichts mehr möglich ist.

Man erhält so eine (bis auf zykl. Permutation) eindeutige zyklisch reduzierte Form von w.

Bsp. $bab^{-1}babb^{-1}$ kann zu baa oder aab zyklisch reduziert werden.

Bsp. $bab^{-1}bab\,b^{-1}$ kann zu baa oder aab zyklisch reduziert werden.

ÜA Man kann zeigen, dass u und v in $F(S)$ genau dann bis auf zyklische Permutation die selben zyklisch reduzierten Formen besitzen, wenn u und v konjugiert sind.

Wir zeigen jetzt, dass hyperbolische Gruppen lösbares Konjugationsproblem haben.

Ergänzung zu 9.7 "Trapping für lok. geod."

Prop. 9.12

(X,d) δ-hyperbolisch, $\overset{c}{\gamma}:[a,b]\to X$ $\overset{k}{c}$-lokale Geod. mit $c>8\delta$. Dann gilt:

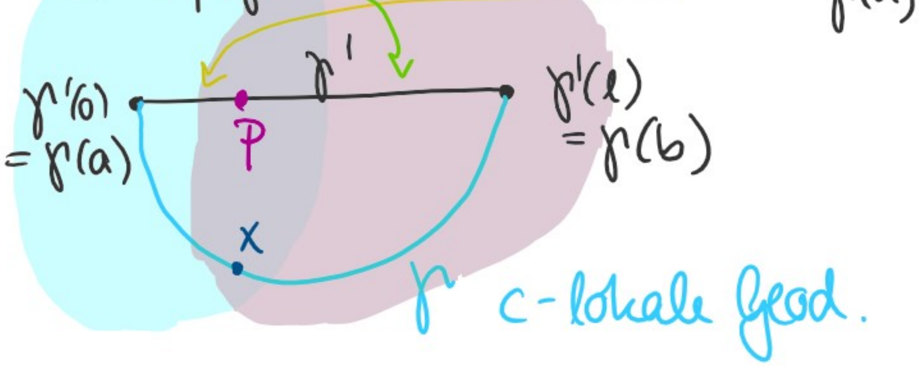
(1) Jede Geodätische $\gamma':[0,\ell]\to X$ mit $\gamma'(0)=\gamma(a)$ und $\gamma'(\ell)=\gamma(b)$ erfüllt
$$\mathrm{Im}(\gamma')\subset U_{3\delta}(\mathrm{Im}(\gamma))$$

(2) γ ist eine (λ,ε)-quasi-Geodätische wobei $\lambda=(c+4\delta)/(c-4\delta)$, $\varepsilon=2\delta$.

Beweis:

(1) Sei p ein Punkt auf $\mathrm{Im}(\gamma')$.
Wegen 9.7 Trapping für lok. Geod. ist jeder Punkt von $\mathrm{Im}(\gamma)$ in der 2δ-Umgebung vom geodätischen Segment $[\underbrace{\gamma'(0)}_{=\gamma(a)},p]$ oder $[p,\underbrace{\gamma'(\ell)}_{=\gamma(b)}]$.

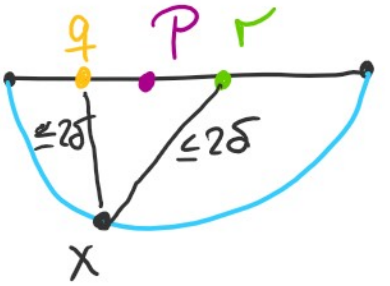
oder $[p, \gamma'(\ell)]$.



Weil γ stetig und $\mathrm{Im}(\gamma)$ zusammenhängend ist existiert $x \in \mathrm{Im}(\gamma)$ mit

$$x \in U_{2\delta}([\gamma(a), p]) \cap U_{2\delta}([p, \gamma(b)]).$$

Sei $q \in [\gamma(a), p]$ und $r \in [p, \gamma(b)]$ mit $d(x,q) \leq 2\delta$ und $d(x,r) \leq 2\delta$.



Nach Konstruktion liegt p auf einer Geodätischen von q nach r.

Dann gilt $p \in U_\delta([q,x] \cup [r,x])$ weil X δ-hypob. ist.

Und es gilt:

$$d(p, \mathrm{Im}(\gamma)) \leq d(p, [q,x] \cup [r,x]) + \max\{d(q,x), d(r,x)\} \leq \delta + 2\delta = 3\delta.$$

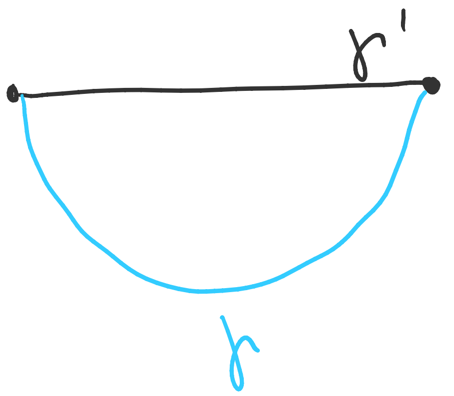
<u>Beweis (2):</u> z.z. γ ist quasi-Geodätische.

Weil γ c-lokale Geodätische ist folgt $d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq |t - t'| \quad \forall t, t' \in [a,b]$.

$d(\gamma(t),\gamma(t')) \leq |t-t'| \quad \forall\, t,t' \in [a,b]$.

Dies ergibt bereits die obere Schranke für die quasi-Isometrie.

<u>Ziel:</u> Untere Schranke (linear in $|t-t'|$) für $d(\gamma(t),\gamma(t'))$ finden.



<u>Idee:</u>
Unterteile γ in Teilpfade der Länge $\frac{c}{2}+2\delta =: c'$.
Projeziere Enden dieser Teilstrecken auf γ', d.h. wähle Punkte, die den Abstand minimieren. Man erhält die untere Schranke dann durch Abschätzen der Abstände dieser (projezierten) Punkte.

$>8\delta \Rightarrow c' > 6\delta$

Betrachte eine Teilkurve von γ der Länge $2\cdot c'$ $(2c' = c+4\delta)$ zwischen Endpunkten x und y und sei m Mittelpkt* zwischen x und y.
Seien x', y', m' Punkte in γ' mit Abstand $\leq 2\delta$ zu x, y, m.

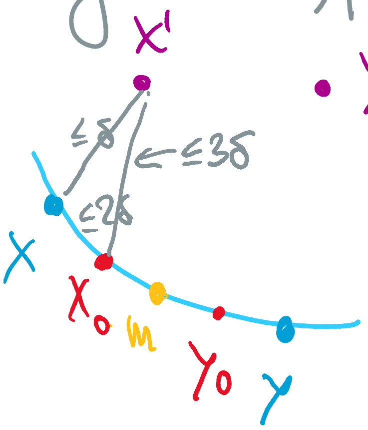
* liegt auf halber Länge; $d(x,m) = c' = d(y,m)$

Da m' liegt zwischen x' und y'.

Beh. m' liegt zwischen x' und y'.

Sei x_0 Punkt auf γ in Richtung m von x mit $d(x,x_0)=2\delta$.
Sei y_0 Pkt auf γ in Richtg m von y mit $d(y,y_0)=2\delta$.

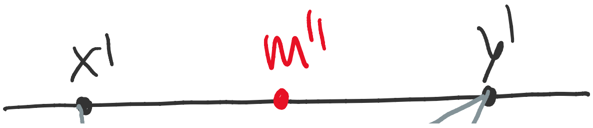
Dann ist jedes geodätische Dreieck auf x, x_0, x' enthalten in $U_{3\delta}(x)$.
(wegen δ-Hyperbolizität und Le 9.7 Mapping)



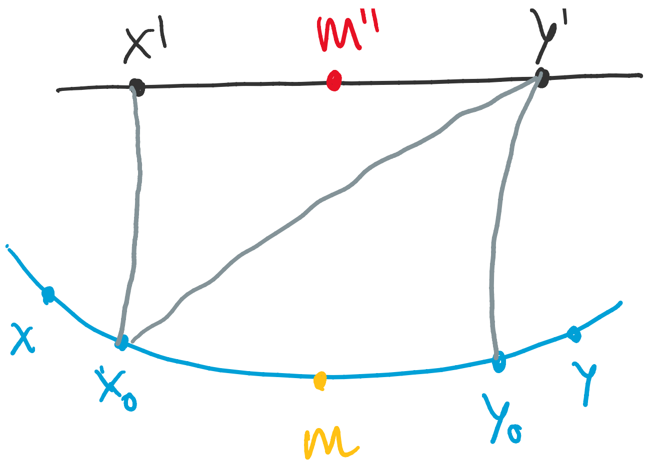
Weil $d(x,m)=c'>6\delta$
$c>8\delta$
und wegen der Wahl von x_0 gilt somit $d(x_0,m)>3\delta$.

Damit liegt jedes geod. Dreieck auf den Punkten x,x_0,x' außerhalb von $U_{3\delta}(m)$.
γ ist c-lokalgeod. also ist x_0 der Punkt des Dreiecks, der am nächsten an m ist.

Analog folgt, dass jedes geod. Dreieck mit Ecken y,y',y_0 komplett außerhalb von $U_{3\delta}(m)$ liegt.



Betrachte jetzt geodätisches



geodätisches 4-Eck mit Ecken x', y' x_0, y_0.

Doppeltes Anwenden des δ-hyperbolizität von X liefert $m \in U_{2\delta}([x_0, x'] \cup [x', y'] \cup [y', y_0])$.

Bilder der verbindenden Geodätischen

Es sind aber $[x_0, x']$ und $[y_0, y']$ Seiten der beiden Dreiecke auf x_0, x, x' und y_0, y, y' und haben Abstand $\geq 3\delta$ zu m.

$\Rightarrow$ Es existiert also $m'' \in [x', y']$ mit $d(m, m'') \leq 2\delta$.

Ist $m'' = m'$ so liegt m' zwischen x' und y'.

<u>Ann</u>: $m'' \neq m'$.

Betrachte geodätisches Dreieck auf m, m', m''.

Es gilt: $d(m, m'') \leq 2\delta$

$d(m, m') \leq 2\delta$

und das Dreieck $\Delta(m, m', m'')$ ist δ-dünn.

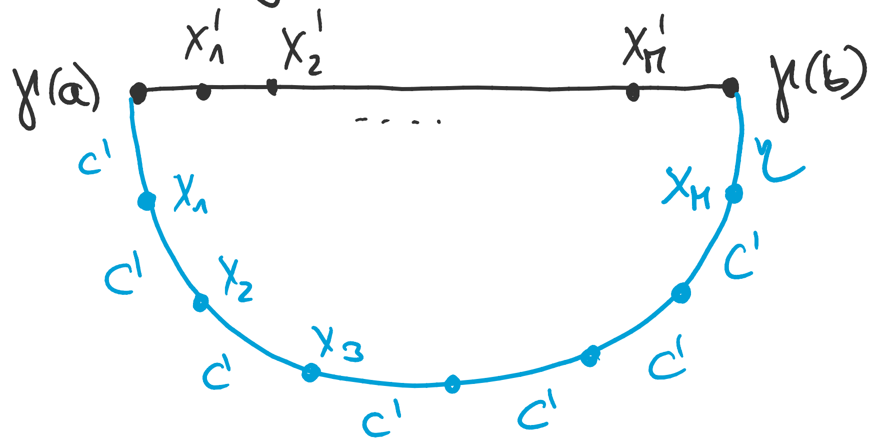
Also ist der Abstand von jedem Punkt auf der Geodätischen zwischen m' und m'' zu m höchstens 3δ.

Insbesondere kann also weder x' noch y'

Insbesondere kann also weder x' noch y' zwischen m' und m'' liegen aus Abstandsgründen.

$\Rightarrow m' \in [x', y']$. $\square$ Beh.

Wir drücken jetzt γ als Verknüpfung von $M \le (b-a)/c'$ Geodätischen der Länge c' und einem kleineren Stück der Länge η am Ende aus.



Die zu den x_i nächsten Punkte x'_i auf γ' bilden eine Folge mit Indizes in der selben Reihenfolge nach der Zwischenbehauptung.

Seien $p' = x'_i$, $p = x_i$ und $q' = x'_{i+1}$, $q = x_{i+1}$ zwei aufeinanderfolgende solche Punkte.

Wir schätzen den Mindestabstand von p und q ab:

Mit Le 9.7 Trapping folgt: $d(p,p') \le 2\delta$ und $d(q,q') \le 2\delta$.

Mit Lemma folgt: ...

$d(q,q') \leq 2\delta$.

Weiter ist nach Konstruktion $d(p,q) = c' > 6\delta$.
Und p' ist Punkt auf der Geodätischen γ, der p am nächsten ist.
Mit wiederholter umgekehrter Δ-Ungl. folgt:

$$\begin{aligned} d(p',q') &\geq |d(p',p) - d(p,q')| \\ &= d(p,q') - d(p',p) \\ &\geq |d(p,q) - d(q,q')| - d(p,p') \\ &\geq |c' - 2\delta| - 2\delta \\ &\overset{\substack{c'>6\delta \\ \text{Betrag also positiv}}}{=} \underline{c' - 4\delta} = \frac{c}{2} + 2\delta \end{aligned}$$

$c' = \frac{c}{2} + 2\delta$

Mit Δ-Ungl. erhalten wir außerdem:

$$\begin{aligned} d(x'_n, \gamma(b)) &\geq |d(x'_n, x_n) - d(x_n, \gamma(b))| \\ &\geq |2\delta - \eta| \end{aligned}$$

Sowie aus der Tatsache, dass x'_n am nächsten an x_n liegt von den Punkten auf γ':

$$d(x'_n, \gamma(b)) \geq \eta - 2\delta.$$

Nach Wahl von n und η folgt daher:

$$\underline{b - a = n c' + \eta}$$

und nach Verketten der Pfade:

[illegible]

und, nach Verketten der Pfade:

$$d(\gamma(a),\gamma(b)) \geq m(c'-4\delta)+\eta-2\delta$$
$$= (b-a)-4\delta m-2\delta.$$

Weil aber gilt $m \leq (b-a)/c'$ so folgt

$$d(\gamma(a),\gamma(b)) \geq (b-a)-\frac{4\delta(b-a)}{c'}-2\delta$$
$$= \frac{c'-4\delta}{c'}(b-a)-2\delta$$

Nach Def von $c'=\frac{c}{2}+2\delta$ folgt:

$$d(\gamma(a),\gamma(b)) \geq \frac{c/2-2\delta}{c/2+2\delta}(b-a)-2\delta$$
$$= \frac{c-4\delta}{c+4\delta}(b-a)-2\delta.$$

Für beliebige $t,t' \in [a,b]$ erhält man die selbe untere Schranke:

- für t,t' mit $|t-t'|>c$ die selbe Argumentation führen
- für t,t' mit $|t-t'|<c$ ist nichts zu zeigen weil γ c-lokal-geod. ist.

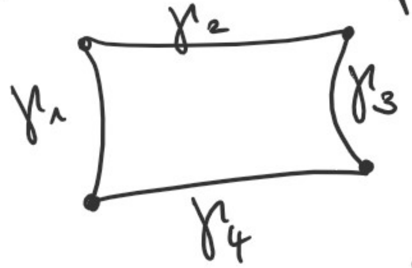
$\square$

c-lokal-geod. ist. $\square$

Diese Prop. werden wir verwenden um das Konjugationsproblem zu lösen.

<u>Prop. 9.13</u>

(X,d) δ-hyperbolisch.
Es seien $(8\delta+1)$-lokal Geodätische γ_i, $i=1\ldots4$, gegeben, die sich wie folgt treffen:

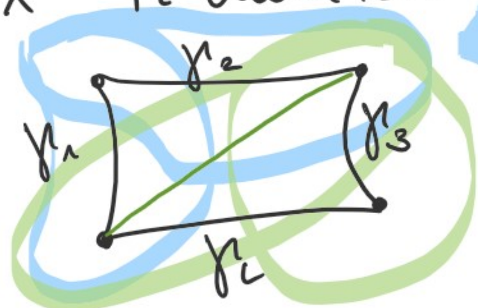


Q = quadrilateral

Dann existiert eine Konstante $C' = C'(\delta)$, so dass $\mathrm{Im}(\gamma_i) \subset U_{C'}(\mathrm{Im}(\gamma_j) \cup \mathrm{Im}(\gamma_k) \cup \mathrm{Im}(\gamma_\ell))$ für $\{i,j,k,\ell\} = \{1,2,3,4\}$.
D.h. jede der 4 Seiten liegt in der C'-Umgebung der 3 anderen Seiten.

<u>Beweis</u>:
Mit obiger Prop. 9.12(2) folgt, dass die γ_i alle (λ,ε)-quasi-Geodätische sind, mit λ,ε wie in der Proposition. γ quasi-geod.
Unterteile Q in zwei Dreiecke mittels einer (λ,ε)-quasi-geod. Diagonalen.

Es gibt dann eine Konstante M, die nur von $\delta,\lambda,\varepsilon$ abhängt und für die jedes (λ,ε)-quasi-geod. Dreieck und für die jedes (λ,ε)-quasi-geod. Dreieck in X M-dünn ist.



M Umgebung von γ_1 & γ_2

M Umgebung der Diagonalen & γ_3

$\overset{2x}{\Longrightarrow}$ anwenden Jede Seite ist in der G-Umgebung der drei anderen enthalten für $G > 2M$.

Wie findet man M?
Aus Beweis Satz 8.8. folgt insbesondere:
X δ-hyperbolisch und $\lambda \geq 1$, $\varepsilon > 0$, dann ist X auch $(\lambda, \varepsilon, 2k+\delta)$-quasi-hyperb.
(dabei hängt k von λ, ε und δ ab).
Wähle also $M = 2k + \delta$ um die M-Dünnheit des quasi-Dreiecks zu bekommen.

Weil M nur von $\lambda, \varepsilon, \delta$ abhängt und λ, ε nur von δ abhängen, so hängt M und somit G nur von δ ab. $\square$

← macht Algorithmus möglich!

Lemma 9.14

Sei G δ-hyperb. bzgl. Erz.syst. S.
Dann existiert $K = K(\delta) > 0$ s.d. gilt:
$\forall$ Paare $u, v \in F(S)$ deren Bilder $\pi(u), \pi(v)$ (hier $\pi: F(S) \to G$ natürl. Proj.) nicht-trivial in G konjugiert sind (d.h. $\exists\, w \in F(S) \setminus \{1\}$ $\wedge$

in G konjugiert sind (d.h. $\exists\, w \in F(S) \setminus \{1\}$ s.d. $\pi(w)\pi(u)\pi(w^{-1}) = \pi(v)$ und $\pi(w) \neq 1$)
und deren zyklische Permutationen von u und v $(8\delta+1)$-lokal geodätische in $Cay(G,S)$ sind, gilt entweder

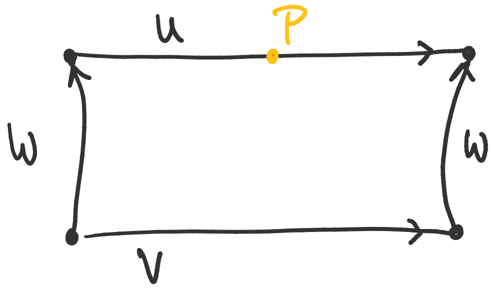
(1) $\max\{|u|, |v|\} \leq K$ ($\uparrow$ Wortlänge bzgl. S in $F(S)$)

oder

(2) $\exists\, \tilde{w} \in F(S)$ der Länge $\leq K$ so, dass $\pi(\tilde{w}^{-1})\pi(u')\pi(\tilde{w}) = \pi(v')$ (in G)
wobei u' und v' zykl. Permutationen von u und v sind.

<u>Beweis</u>:

Sei $w \in F(S)$ mit $\pi(w)\pi(u)\pi(w^{-1}) = \pi(v)$.
Betrachte geodätisches Quadrilateral Q in $Cay(S,G)$ mit Seiten w, u, w^{-1}, v^{-1}.



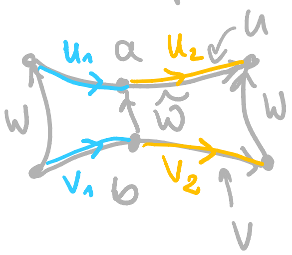
Wir können Q so wählen, dass alle 4 Seiten $(8\delta+1)$ lokal geodätisch sind.

Die Seiten u, v sind sowieso $8\delta+1$ lokal-geod. nach Vor. Wähle für w ein reduziertes Wort (möglich weil $\pi(w) \neq 1$), dann sind die durch w gegebenen Seiten sogar geodätisch.

<u>Bem</u>:
Durch Ersetzen von u, v durch zyklische Perm. kann man weiter annehmen, dass jeder

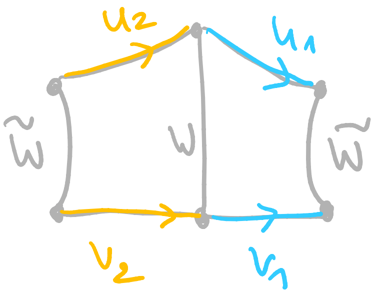
— Durch Ersetzen von u, v durch zyklische Perm. können wir weiter annehmen, dass jeder Punkt auf u mind. Abst. $|w|$ zu v hat.

Bew: Angenommen es gibt Ecken a und b auf u bzw v mit Abstand $< |w|$.



Sei $\tilde{w} \in F(S)$ ein Wort das eine Geodäte von b nach a darstellt, insb. $|\tilde{w}| < |w|$.

Die Ecken a, b unterteilen u und v in Teilwörter u_1, u_2 bzw v_1, v_2.
Dann sind $u_2 u_1$ und $v_2 v_1$ zyklische Permutationen von u bzw v.
Ersetze w durch $\tilde{w}$ und erhalte ein neues quasi-Viereck $\tilde{Q}$ der Form:



Dann ist $\tilde{Q}$ immer noch $(8\delta+1)$-quasi-geodätisch aber die Außenseiten kürzer.

Wiederhole gegebenenfalls das Verfahren bis die Außenkanten die gewünschte Eigenschaft haben.

Prop. 9.13 liefert: Jede Seite von Q liegt in der C-Umgebung der 3 anderen.

Sei p Mittelpunkt der oberen Seite.
Dann ist der Abstand zu den anderen 3 Seiten höchstens C' nach 9.13.

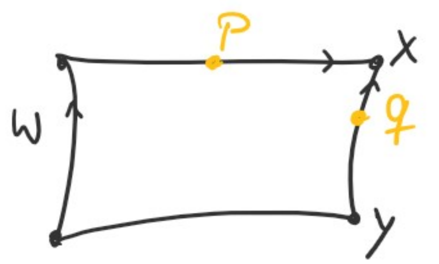
höchstens G' nach 9.13.

Es gibt also einen Punkt q auf einer der 3 anderen Seiten mit $d(p,q) \leq G$.

<u>Ann: $|w| > G'+1$:</u>

In diesem Fall kann q nicht auf v liegen. Denn: wenn es p' auf v mit $d(p,p') \leq G'$ gibt, dann ist der Abstand der Ecken, die p und p' (auf u bzw. v) am nächsten sind höchstens $G'+1 < |w|$.

Der Punkt q liegt also auf einer der Seiten und $d(p,q) \leq G'$.



Seien x, y die beiden Enden der Seite (wie in Abb). Dann gilt:

$$(a)\quad |w| - \frac{1}{2} \leq d(p,y) \leq \underbrace{d(p,q)}_{\leq G'} + d(q,y) \leq G' + d(q,y)$$

und somit

* weil w reduziert

$$(b)\quad d(q,y) \underset{(*)}{=} |w| - d(x,q) \underset{(a)}{\leq} G' + d(q,y) + \frac{1}{2} - d(x,q)$$

Aus (b) folgt:

$$\begin{aligned}(c)\quad d(x,q) &= d(x,q) - d(q,y) + d(q,y) \\ &\underset{(b)}{\leq} \cancel{d(x,q)} - \cancel{d(q,y)} + G + \cancel{d(q,y)} + \frac{1}{2} - \cancel{d(x,q)} \\ &= G' + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$= 4 + \frac{1}{2}$$

Mit Δ-Ungl. folgt dann:

$$d(p,x) \leq d(p,q) + d(q,x) \overset{(c)\ \&\ d(p,q) < C}{\leq} 2C + \frac{1}{2}.$$

Weil p die Mitte der oberen Seite ist gilt

$$d(x,p) = \frac{1}{2}|u|$$

und $|u|$ ist nach oben durch $4C+1$ beschränkt.

Wir können mit ähnlichen Argumenten folgern, dass

$$|v| \leq 4C+1.$$

Setze $K := 4C+1$.

Dann ist entweder $|w| > C+1$ und dann auch $\max\{|u|,|v|\} \leq K = 4C+1$ wie oben argumentiert.

Oder es gilt $|w| \leq C+1 \leq 4C+1 = K$ und wir haben die nur von σ abhängige Schranke für w.

$\Rightarrow K = 4C+1$ erfüllt die Behauptung. $\square$

9.15 Der Algorithmus

zum Feststellen ob u,v in G konjugiert sind zum Feststellen ob u,v in G konjugiert sind für G δ-hyperbolisch bzgl Erzsyst S.

gegeben u,v Wörter über $S^{\pm}$

- Betrachte u,v und alle zyklischen Permutationen dieser Wörter.
- Suche nicht-geodätische Teilwörter der Länge $\leq 8\delta+1$ und ersetze sie durch geodätische Teilwörter kürzerer Länge, die das selbe Gruppenelement repräsentieren.
- Wiederhole die vorangegangenen Schritte bis alle zykl. Permutationen $8\delta+1$ lokal-geodätisch sind.

(kann mit höchstens $|u|+|v|$ Anwendungen von Relationen einer Dehn-Präsentierung erreicht werden)

- Le 9.14 liefert dann eine endliche Menge an Wörtern Σ so, dass gilt:

u zu v konjugiert in der Gruppe G $\Longleftrightarrow$ $\exists\, w \in \Sigma$ mit $w^{-1}u'w = v'$ $(*)$
(u',v' zykl. Perm. von u,v)

Mit Hilfe des Dehn-Algorithmus zur Lösung des Wortproblems kann entschieden werden, ob $(*)$ erfüllt ist.

Eine mögl. Wahl für Σ ist die Menge aller Wörter der Länge $\leq K$ = Konstante aus

Eine mögl. Wahl für Σ ist die Menge aller
Wörter der Länge $\leq K$, $=$ Konstante aus
Lemma 9.14.

vereinigt mit
einer Wahl eines konjugierenden Elements
u für jedes Paar konjugierter Elemente d.h. $u v_0 u^{-1} = u_0$
u_0, v_0 mit $\max\{|u_0|, |v_0|\} \leq K$.