Jetzt zur 1. Frage:

Meist möchte man G unabhg. von der Wahl eines Erz.Syst. untersuchen.
Wir untersuchen jetzt, inwieweit $Cay(G,S)$ von der Wahl von S abhängt.
Dazu benötigen wir folgende Definition:

6. Quasi-Isometrie

6.1 Def. quasi-isometrische Einbettung.

X, Y metrische Räume, $f: X \to Y$ eine Abb.
Dann ist f eine (C,D)-quasi-isometrische Einbettung, wenn

$$\frac{1}{C} d(x,y) - D \leq d(f(x), f(y)) \leq C d(x,y) + D$$

$\forall x,y \in X$.
Wir sagen f ist eine (C,D)-quasi-Isometrie, wenn gilt: $\forall y \in Y \ \exists x \in X$ mit $d(f(x), y) \leq D$, d.h. wenn f ein quasi-dichtes Bild in Y hat.

Bem. 1) $f(X)$ ist dann D-dicht in Y, wenn f eine quasi-Isometrie ist.

2) Wir sagen f ist quasi-Isometrie, wenn es (C,D)-qI. ist für eine Wahl von C, D.

3) Eine $(C,0)$-q.isom. Einbettg ist gerade eine Bilipschitz-Einbettung.

Bsp. 6.2

Die Inklusionsabb. $2\mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbb{R}$ sind quasi-isometrische Einbettungen. (mit $C=1$ und $D=0$).

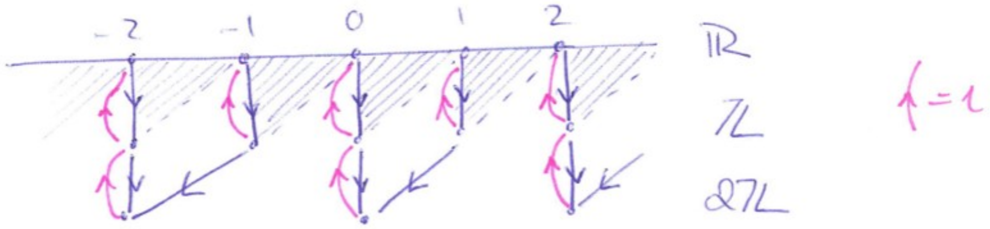
Aber keine bilipschitz-Äquivalenzen, weil nicht surjektiv.

Die Abb. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} : x \mapsto \lfloor x \rfloor$ und

$$g: \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \text{ gerade} \\ x-1 & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

sind auch quasi-isom. Einbettungen mit $C=1=D$.

Sie sind quasi-Inverse von den Inklusionsabb, d.h. $f\circ\iota$ und $\iota\circ f$ haben endlichen Abstand von id (ebenso $\iota\circ g, g\circ\iota$)



Def. 6.3 quasi-Inverse

Sei $f: X \to Y$ Abb. Dann ist $g: Y \to X$ eine quasi-Inverse von f, wenn es $D \geq 0$ gibt mit $d_X((g\circ f)(x), x) \leq D \quad \forall x \in X$ und

$$d_Y((f\circ g)(y), y) \leq D \quad \forall y \in Y.$$

6.4 Eigenschaften von q.i.

(ÜA)

(1) Verkettung von q.i. Einbettgen (quasi-Isometrien) ist wieder eine q.i.E (bzw. q.I.).

(2) Sei f q.i.E. Dann ist f eine q.I genau dann, wenn es eine quasi-Inverse besitzt.

(3) Quasi-Isometrisch zu sein ist eine Äquivalenzrelation.

Insbes. bilden die Menge aller q.I. eines Raumes eine Gruppe.

Beweis:

(1) Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ q.i.E. bzgl (C, D).
Dann gilt $\forall x, y \in X$:

$$d(g(f(x)), g(f(y))) \leq C \cdot d(f(x), f(y)) + D$$

$$(*) \qquad \leq C^2 \cdot d(x, y) + C \cdot D + D.$$

Umgekehrt gilt folgendes:
Für f, g (C, D)-quasi-Isom. wähle $z \in Z$.
Es exist. $y \in Y$ mit $d(g(y), z) \leq D$ (quasi-dicht)
und $x \in X$ mit $d(f(x), y) \leq D$.
Somit ist

$$d((g \circ f)(x), z) \leq d(g(f(x)), g(y)) + d(g(y), z)$$
$$\leq (CD + D) + D.$$

Also ist $g \circ f$ q.i.E. □(1)

(2) vergl. Übungen.

(3) Die Identität ist q.I. von X auf sich. Transitivität folgt mit (1) und Reflexivität folgt mit (2). $\square$

Jetzt können wir zeigen, dass "der" Cayleygraph von G wohldefiniert ist bis auf Quasi-Isometrie:

Satz 6.5 "Der" Cayleygraph ist q.I-invariant

Sei G Gruppe mit S, S' endliche Erz.syst. von G. Dann erweitert $id : G \to G$ zu einer quasi-Isometrie
$$Cay(G,S) \longrightarrow Cay(G,S').$$

Beweis: Betrachte folgende Abb:
$$Cay(G,S) \xrightarrow[\varphi]{} (G, d_S) \xrightarrow[id]{} (G, d_{S'}) \xrightarrow[\iota]{} Cay(G,S')$$

wobei φ so gewählt, dass $x \in Cay(G,S)$ auf $g \in G$ abgebildet wird mit $d_S(x,g) \leq \frac{1}{2}$. Die Abb ι ist die Inklusionsabb.

Die Abb. φ und ι sind $(1,1)$-q.I. Also ist $\varphi \circ id \circ \iota$ eine q.I, wenn id ist.

Da id surjektiv ist rechnen wir nach, dass id_G eine $(C,0)$-q.I. Abb. ist.

Setze $c := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_{S'}(1\!\!1, s) < \infty$ weil S endlich.

Seien $g, h \in G$ und $d_S(g,h) =: n$.

Dann existieren $s_i \in S \cup S^{-1}$ s.d.

$$g^{-1}h = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n .$$

Dann ist aber

$$\begin{aligned}
d_{S'}(\mathrm{id}_G(g), \mathrm{id}_G(h)) &= d_{S'}(g,h) \\
&= d_{S'}(g, gs_1 \cdots s_n) \\
&\underset{\Delta\text{-Ungl}}{\leq} d_{S'}(g, gs_1) + d_{S'}(gs_1, gs_1s_2) \\
&\quad + \ldots + d_{S'}(gs_1 \ldots s_{n-1}, gs_1 \ldots s_n). \\
&\underset{d_{S'} \text{ ist links-invar.}}{=} d_{S'}(1\!\!1, s_1) + d_{S'}(1\!\!1, s_2) + \ldots + d_{S'}(1\!\!1, s_n) \\
&\leq n \cdot c = c \cdot d_S(g,h).
\end{aligned}$$

Vertausche Rolle von S und S' und erhalte

$$d_S(\mathrm{id}_G(g), \mathrm{id}_G(h)) \leq \tilde{c} \cdot d_{S'}(g,h)$$

wobei $\tilde{c} := \max\{ d_S(1\!\!1, s') \mid s' \in S' \}$.

Setze nun $C_0 := \max\{c, \tilde{c}\}$. Dann ist id_G bilipschitz bzgl. $(C_0, 0)$. $\square$

<u>Bem.</u> D.h. aus der Ferne sehen alle Cayley-graphen von G gleich aus.

Bem 6.6

Satz 6.5 ist i.A. falsch für unendliche Ez.syst:

z.B. $(\mathbb{Z},+)$ mit Ez $\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ $Cay(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\setminus\{0\})$
hat endlichen
Durchmesser

aber $(\mathbb{Z},+)$ mit $\{1\}$ $\rightsquigarrow$ hat ∞ = Diam.

aber ein Raum mit endl. Durchmesser
kann nicht zu einem quasi-isom sein, der
unendlichen Durchmesser hat.

Milnor - Švarč - Lemma | TdW 6

Folgender Satz ist das fundamentale Lemma der GGT und ein wesentlicher Grund warum man sich für Gruppen bis auf QI interessiert.

6.8 Milnor - Švarč - Lemma

Sei G eine Gruppe, die eigentlich diskontinuierl. und ko-beschränkt auf einem geodätischen metrischen Raum (X,d) durch Isometrien wirkt. Dann gilt:

(1) G ist endlich erzeugt und

(2) G ist quasi-isometrisch zu X.

<u>Bem</u>: Außer der Existenz der Wirkung $G \curvearrowright X$ und deren Eigenschaften nehmen wir nichts über G an!

6.9 Kor

Sei G und X wie in 6.8 und S ein endliches EZ für G. Dann ist $\overleftrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ q.i. zu X.

<u>Beweis:</u> Das folgt aus der Eigenschaft, dass $(G,d_S) \sim_{q.i.} \overleftrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ ist. $\square$

Beweis 6.8:

Wir zeigen zunächst: (1) G ist endl. erz.

Sei dazu $x_0 \in X$ ein (beliebig gewählter) Basispunkt in X. Sei $R>0$ so, dass

$X = \bigcup_{g\in G} g.B_R(x_0)$. Sei $B := B_R(x_0)$.

Wir setzen $S := \{ g\in G \mid g.B_R(x_0) \cap B_R(x_0) \neq \emptyset \}$.

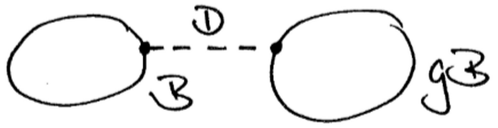
Weil G auf X ~~[illegible]~~ eigentl. diskont. wirkt ist S endlich.

Beh. S erzeugt G.

Beobachte zunächst, dass B kompakt ist und somit die Konstante

$$c := \inf\{ d(B, gB) \mid g\in G\setminus S\} = \inf\{ d(x, gy) \mid x,y\in B,\ g\in G\setminus S\}$$

definiert und >0 ist.

Denn: 

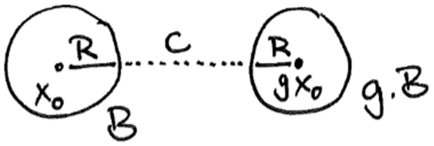
$D = \mathrm{dist}(B, gB)$

und es gibt höchstens endlich viele $g'.B$ mit Abstand $\leq D$ zu B.

$\Rightarrow$ c ist eigentl. ein Minimum über endlich viele $g\in G\setminus S$.

Wähle jetzt ein $g\in G\setminus S$. Wir wollen g mit Hilfe der $s\in S$ ausdrücken.

Es gilt: $d(x_0, g.x_0) \geq 2R + c \geq R+c$.

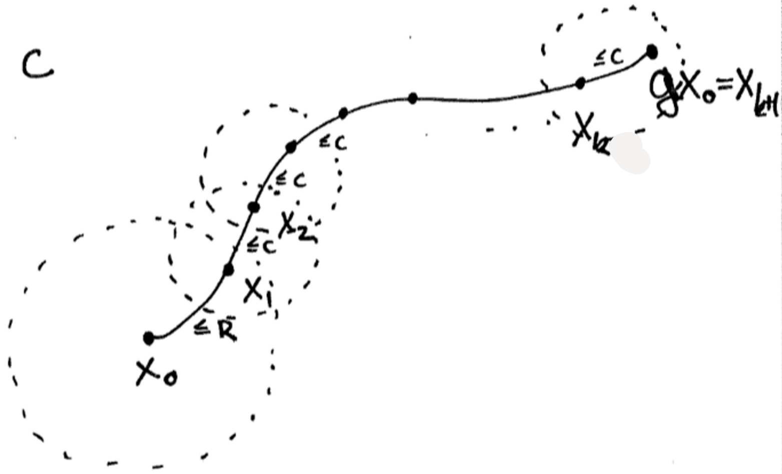


c = kleinstmögl. Abst.

Es existiert also ein $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ s.d.

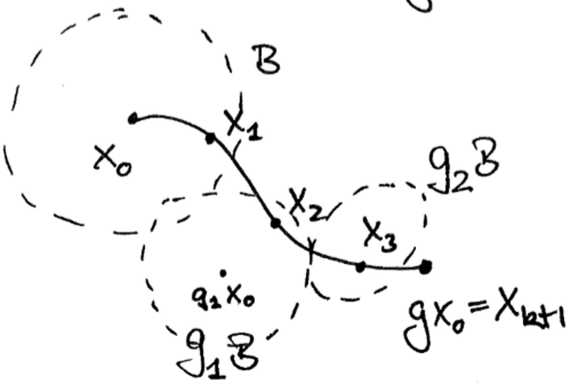
$$R + (k-1)\cdot c \leq d(x_0, gx_0) < R + k\cdot c.$$

Sei nun γ Geodäte von x_0 nach gx_0.
Wähle Punkte x_i auf γ s.d. $x_{k+1} = gx_0$
und s.d. $d(x_0, x_1) \leq R$
und $d(x_i, x_{i+1}) < c$
$\forall i = 1..k$.



Nach Def von c
gibt es dann
$g_i \in G$ mit
$\mathbb{1} = g_0$, $g_k = g$
s.d. $\underline{\underline{x_{i+1}}} \in g_i B$ (gilt weil außerdem $X = \bigcup_{g \in G} gB$).

Damit $x_1 \in g_0 B = B$ ist muss $d(x_0, x_1) \leq R$ sein.



Setze $s_i := g_{i-1}^{-1} \cdot g_i$ für $i = 1 \dots k$. Dann ist

$$d(B, s_i B) = d(g_{i-1}B, g_i B) \leq d(x_i, x_{i+1}) < c$$

$\Rightarrow s_i \in S$.

Es ist aber jetzt:

$$s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_k = (\underbrace{g_0^{-1}}_{=1 \text{ weil } g_0 = 1} g_1)(g_1^{-1} g_2) \cdots (g_{k-1}^{-1} g_k)$$

$$= g_k = g$$

und somit g durch S darstellbar. $\Rightarrow (1)$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass (G, d_S) zu X quasi-isometrisch ist:

Wir definieren die <u>Bahn-Abbildung</u> $f: G \to X : g \mapsto g x_0$ für festes $x_0 \in X$.

Nach Konstruktion hat diese Abbildung f quasi-dichtes Bild in X (jeder Pkt in X hat höchstens Abst. R zu einem $g x_0$).

Bleibt noch z.z., dass f eine q.i. Einbettg ist.

D.h. finde $K \geq 1$ und $C_1 \geq 0$ s.d. $\forall g, h \in G$ gilt:

$$\boxed{\frac{1}{K} d_S(g,h) - C_1 \leq d(g x_0, h x_0) \leq K d_S(g,h) + C_1} \quad (*)$$

Wir können uns aus folgendem Grund auf den Fall $g = 1$ beschränken:

$$d(g x_0, h x_0) = d(x_0, (g^{-1}h) x_0) \quad \text{(Wirkg ist durch Isometrie)}$$

und auch $d_S(g,h) = d_S(1, g^{-1}h)$. (Links-inv. der Wort-Metrik)

Sei also $h \in G$ beliebig und setze
$$L := \max\{ d(x_0, sx_0) \mid s \in S \}.$$
Sei $K := \max\{\frac{1}{c}, L, 2R\}$ und $C := \max\{\frac{1}{K}, c\}$.
Wir werden im Laufe der Rechnung sehen, warum das die richtige Wahl für K und C ist.

$\underline{h = 1}$: Dann ist $d(x_0, hx_0) = 0 = d_S(1, h)$ und die Ungleichung $(*)$ ist erfüllt.

$\underline{h = s \text{ für } s \in S}$: Nach Def von S ist dann $d(x_0, sx_0) \leq 2R$. Weiter ist $d_S(1, s) = 1$ und nach Definition oben $K \geq 2R$, $C \geq \frac{1}{K}$.
Somit
$$\frac{1}{K} d_S(1, s) - C = \frac{1}{K} - C \leq 0 \leq d(x_0, sx_0) \ldots$$
$$\ldots \leq 2R \leq K \leq K \cdot \underbrace{d_S(1, s)}_{=1} + \underbrace{C}_{\geq 0}$$

also gilt $(*)$.

Sei jetzt $\underline{h \in G \setminus S}$: Aus dem Beweis von (1) wissen wir, dass $d_S(1, h) \leq k$ ist, wobei k hier so gewählt ist, dass
$$R + (k-1) \cdot c \leq d(x_0, hx_0).$$
$$\Rightarrow R + (d_S(1, h) - 1) \cdot c \leq d(x_0, hx_0)$$
$$\Rightarrow c \cdot d_S(1, h) - c \leq d(x_0, hx_0) - R \underset{R \geq 0.}{\leq} d(x_0, hx_0)$$

<u>Beh:</u> $d(x_0, h x_0) \leq L \cdot d_S(1\!\!1, h)$.

Gilt die Beh., so haben wir insgesamt, dass

$$c \cdot d_S(1\!\!1, h) - c \leq d(x_0, h x_0) \leq L \cdot d_S(1\!\!1, h).$$

Weil $K \geq L$ und $K \geq \frac{1}{c}$ und $C_1 \geq c$

ist somit (*) erfüllt.

Es bleibt also nur noch die Beh. zu zeigen:

Wir schreiben $h = s_1 \cdots s_k$, $s_i \in S$ $\forall i$.
(minimal)

Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_0, h x_0) &= d(x_0, s_1 \ldots s_k x_0) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} d(x_0, s_1 x_0) + d(s_1 x_0, s_1 \ldots s_k x_0) \\ &\overset{\substack{\text{multiple times} \\ \Delta\text{-Ungl.}}}{\leq} d(x_0, s_1 x_0) + d(s_1 x_0, s_1 s_2 x_0) + \\ &\quad + \ldots + d(s_1 s_2 \ldots s_{k-1} x_0, s_1 \ldots s_k x_0) \\ &= d(x_0, s_1 x_0) + d(x_0, s_2 x_0) + \ldots + d(x_0, s_k x_0) \\ &\underset{s_i \in S}{\leq} L \cdot k = L \cdot d_S(1\!\!1, h). \end{aligned}$$

Somit gilt (2) und wir sind fertig $\square$

<u>Bem.</u> Milnor-Švarc liefert nur eine Quasi-Isometrie, keine Bilipschitz-Äquivalenz!

<u>6.10 Bem.</u> Die Voraussetzungen des Milnor-Švarč Lemmas lassen sich wie folgt abschwächen:

⌈ $G \curvearrowright X$, mit (X,d) metr. Raum, durch Isometrien.
Sei weiter X (C,D)-quasi-geodätisch, d.h. für alle $x,y \in X$ existiert eine (C,D)-quasi-Geodäte von x nach y, also eine (C,D)-quasi-Isometrische Abbildung (Einbettg) $[0,l] \xrightarrow{\gamma} X$ mit $\gamma(0)=x$, $\gamma(l)=y$.
mit $D>0$

Außerdem existiere $B \subset X$ mit $\mathrm{diam}(B)<\infty$ und $X = \bigcup_{g \in G} gB$ sowie der Eigenschaft, dass

$S := \{ g \in G \mid gB' \cap B' \neq \emptyset \}$ endlich ist

für $B' := B_{2D}(B) = \{ x \in X \mid y \in B \text{ mit } d(x,y) \leq 2D \}$.

⌊ Dann ist G von S erzeugt und q.i. zu X.

<u>6.11 Bsp.</u> Sei $X = \mathbb{R}^2$ mit eukl. Metrik.

verwendet Notation von 6.10

ist geodätisch und alle geodätischen Räume sind quasi-geodätisch mit $C=1$, $D=0$

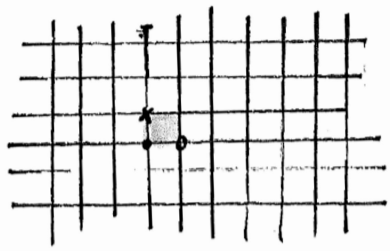
Sei $G = \mathbb{Z}^2 \curvearrowright X$ durch Translationen,

d.h. $\left(\underbrace{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}_{\in G}, \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\in X}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x+n \\ y+k \end{pmatrix} \in X$.

Setze $\mathcal{B} := [0,1] \times [0,1]$, dann ist

$S = \{ \binom{n}{k} \in \mathbb{Z}^2 \mid \binom{n}{k} . \mathcal{B}' \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset \}$

ein Erzeugendensystem (aber nicht minimal).



$x = \binom{0}{1}$ $\quad \bullet = \binom{0}{0}$ $\quad o = \binom{1}{0}$

- hier ist $D = 0$ also ist $\mathcal{B}' = B_{2D}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$.

$\Rightarrow S = \{ \binom{1}{0}, \binom{0}{1}, \binom{-1}{0}, \binom{0}{-1}, \binom{1}{1}, \binom{-1}{-1}, \binom{-1}{1}, \binom{1}{-1}, \binom{0}{0} \}$

Die Menge $S.\mathcal{B}$ ist gelb dargestellt.

(Es geht auch: x_0 als Mittelpkt des grünen Kästchens und $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und dann Wahl von S wie im Bew 6.8).

Thema 07 (und Fortsetzg 06) Milnor-Svarc und QI Invarianten

Montag, 8. November 2021 11:02

Wir werden uns jetzt ein paar direkte Folgerungen daraus anschauen:

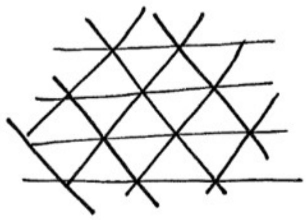
Abkürzend schreiben wir:

Def. 6.12 Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ heißt *geometrisch*, falls sie eigentlich diskontinuierlich, ko-beschränkt und durch Isometrien wirkt.

Das sind genau die Wirkungen, auf die wir Švarc-Milnor anwenden können!

Bsp. 6.13 (Geometrische Wirkungen)

1) Translationswirkung von $\mathbb{Z}^2$ auf $\mathbb{R}^2$.
2) Die Spiegelungsgruppe W in $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, die durch die Spiegelungen am Aufspann der drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks erzeugt wird.



3) Die Linkstranslationswirkung einer Gruppe G auf jedem ihrer Cayleygraphen $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$, wenn G endl. erzeugt und S endl. EZ ist.

Wir können Milnor-Švarc auf Bsp 1)-3) anwenden und erhalten:
$\mathbb{Z}^2 \sim_{q.i.} \mathbb{R}^2$, $W \sim_{q.i.} \mathbb{R}^2$ und (als Bsp. im Sinne von 3)) die freie Gruppe F_k mit k Erzeugern ist q.i. zu einem $2k$-regulären Baum.

Wir schauen uns jetzt noch eine topologische Variante des Milnor-Švarc-Lemmas an. Dazu benötigen wir folgende Definitionen:

6.14 Quotientenräume

Sei (X,d) eigentlicher metr. Raum.
Sei $\alpha: G \to \mathrm{Isom}(X)$ eine Wirkung von G auf X.
Sei weiter $p: X \to {}_G\backslash^X$ die natürliche Proj. auf den Quotienten.
Setze $\bar{d}(\bar{x},\bar{y}) := \inf\{ d(x,y) \mid p(x)=\bar{x},\ p(y)=\bar{y}\}$.
für $\bar{x},\bar{y} \in {}_G\backslash^X$. Dann gilt:

(i) "inf = min": $\exists\, x,y \in X$ mit $\bar{d}(\bar{x},\bar{y}) = d(x,y)$.
und $p(x)=\bar{x}$, $p(y)=\bar{y}$.

(ii) $\bar{d}$ ist Metrik auf ${}_G\backslash^X$.

Bew. ÜA .

<u>6.15 Def.</u> Eine Wirkung $G \curvearrowright X$, mit X topologischer Raum, ist <u>kokompakt</u>, wenn ${}_G\backslash^{X}$ kompakt ist (bzgl der Quotiententopologie).

<u>6.16 Bsp.</u> 1) X kompakt, wegzushgd, $\tilde{X}$ univ. ÜL

Dann ist $\pi_1(X) \curvearrowright \tilde{X}$ durch Decktransformationen eine ko-kompakte Wirkung. (und eigentliche)

Es ist ${}_{\pi_1(X)}\backslash^{\tilde{X}} \cong X$.

2) $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ durch Translation längs x-Achse ist nicht kokompakt.

${}_{\mathbb{Z}}\backslash^{\mathbb{R}^2}$ =  nicht kompakt

3) $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ durch Translation ist kokomp.

und ${}_{\mathbb{Z}^2}\backslash^{\mathbb{R}^2}$ =  flacher Torus.

4) $G \curvearrowright Cay(G,S) =: \Gamma$ ist ko-kompakt

und ${}_G\backslash^{\Gamma}$ = Rose mit $n = \#S$ Blättern.

Es gilt folgender Satz:

Es gilt folgender Satz:

6.17 topologischer Švarč-Milnor

G wirke eigentlich, ko-kompakt und durch Isometrien auf einem eigentl. geodätischen metrischen Raum X, dann ist G endlich erzeugt und $G \to X : g \mapsto gx_0$ $\forall x_0 \in X$ eine Quasi-Isometrie.

ÜA: beweise 6.17 mit 6.8 oder mit Bem 6.10.

Wir sehen jetzt noch ein paar direkte erste Anwendungen von Milnor-Švarč.

6.18 Korollar

Sei G endlich erzeugt und $H < G$ UG mit $[G:H] < \infty$. Dann ist H endlich erzeugt und $G \sim_{q.i.} H$.

Beweis: Sei S endliches Erzsyst dann wirkt $H \curvearrowright Cay(G,S)$ isometrisch durch Linksmultiplikation. Diese Wirkg erfüllt die Vor. von 6.8: Die Wirkg ist eigentlich diskontinuierlich weil G bereits so wirkt. Da der Index von H in G endlich ist,

gibt es ein endliches Vertretersystem B von $H \backslash G$, das insbes. beschränkt ist.
Also ist $H \curvearrowright Cay(G,S)$ ko-beschränkt.
Darüber hinaus ist $Cay(G,S)$ geodätisch.
Satz 6.8 liefert also die Beh: denn $\square$

$$H \underset{6.8}{\sim_{q.i.}} Cay(G,S) \sim_{q.i.} G \Rightarrow H \sim_{q.i.} G.$$

6.19 Korollar

Sei G endlich erzeugt und N endliche normale UG von G, dann ist $G/N \sim_{q.i.} G$.

Bew. ÜA .

Bem:
Man kann 6.18 & 6.19 so lesen:

„Endliche Gruppen beeinträchtigen den q.i.-Typ einer Gruppe nicht."

Wir sagen G unterscheidet sich von G' durch eine endliche Gruppe, wenn entweder G isomorph zu einer UG von G' von endl. Index ist, oder umgekehrt.
Dann bedeutet 6.18 & 6.19:

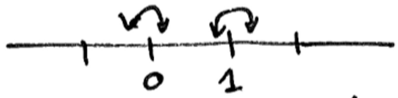
Unterscheiden sich G und G' um eine endliche Gruppe, so ist $G \sim_{q.i.} G'$.

Als Konsequenzen aus obiger Bem erhalten wir:

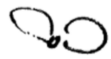
6.20 Bsp.

1) Jede endliche Gruppe ist q.i. zur trivialen Gruppe.
2) D_∞ ist q.i. zu $\mathbb{Z}$.
3) $\forall\, k \geq 2$ ist F_k q.i. zu F_2.

Beweis:

1) klar
2) sieht man entweder aus der Tatsache, dass D_∞ eine UG vom Index 2 hat, die zu $\mathbb{Z}$ isomorph ist, oder über die Wirkg $D_\infty \curvearrowright \mathbb{R}$, 
   die kokompakt, eigentl. disk. und via Isometrien ist; Milnor-Švarč liefert Beh.

3) konstruiere explizite Quasi-Isometrie der zugehörigen Caylaygraphen zu freien EZ, d.h. T_{2k} und T_4. $\square$

Oder:  $\xrightarrow{\text{endl. ÜL}}$ 

k - Blätter   2 Blätter

$\pi_1(R_k) = F_k < \pi_1(R_2) = F_2$ induced embedding

ÜA Im Gegensatz zu 6.20 3) zeige:
Ist $\phi : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ Homomorphismus und $m > n$, dann kann ϕ nicht injektiv sein.