Thema 05 Teil 2 Cayleygraphen revisited

Montag, 1. November 2021 09:15

TdW5: $\boxed{\text{Cayleygraphen revisited}}$

Wir schauen uns nochmal genauer Eigenschaften von $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ an.

5. metrische Graphen und geodätische metrische Räume

5.1 Fakt: (metrische Graphen)
Wir können einen Graphen $\Gamma = (V, E, \delta)$ als metrisches Objekt betrachten:
Versehe jede Kante e mit einer Länge $l(e)$.
Dann ist die metrische Realisierung $|\Gamma|$ von Γ folgender Raum:

$$|\Gamma| = \bigsqcup_{e \in E} [0, l(e)] \Big/ \sim$$ wobei wir

die Enden zweier Intervalle identifizieren, wenn die zugehörigen Kanten eine gemeinsame Ecke haben.

Definiere $d(x,y)$ für $x,y \in |\Gamma|$ wie folgt:

$$d(x,y) = \inf_{\substack{\gamma : x \rightsquigarrow y \\ \text{Pfad}}} l(\gamma), \quad \text{mit } l(\gamma) = \sup_{\substack{\text{Zerlegungen} \\ \text{von } [0,1]}} \sum_{i=0}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$$

$\gamma : [0,1] \to |\Gamma|$ stetig

$\geq d(\gamma(0), \gamma(1))$

5.2 Def. / Konvention:

Wir realisieren $\overset{(\longrightarrow)}{Cay}(G,S)$ immer mit Kantenlänge 1 für alle Kanten und schreiben statt $|\overset{(\longrightarrow)}{Cay}(G,S)|$ auch einfach nur $\overset{(\longrightarrow)}{Cay}(G,S)$.

Bem. Def 5.2 induziert eine Metrik auf $|\overset{(\longrightarrow)}{Cay}(G,S)|$, sowie eine Metrik auf G = Ecken vom Cayleygraph durch Einschränken der Metrik.
Bezeichne diese Metrik durch d_S.

(ÜA) Zeige: $\forall g,h \in G$ ist

$$d_S(g,h) = \min\{n \mid \exists s_1 \cdots s_n \text{ mit } g^{-1}h = s_1 \cdots s_n,\ s_i \in S\}$$

und $d_S(g,h) = 0 \Leftrightarrow g = h$.

D.h. $d_S(g,h)$ ist die Wortlänge von $g^{-1}h$ bezüglich S.

5.3 Eigenschaft der Linkstranslation:

G wirkt durch Isometrien auf $\overset{(\longrightarrow)}{Cay}(G,S)$.

Beweis: $\forall g \in G$ definiere eine Isometrie ϕ_g von $Cay(G,S)$ durch:

$$\phi_g(x) = gx \quad \forall x \in G, \text{ sowie}$$

für ein x auf der Kante h_1 —— $h_2 = h_1 s$

Setze $\Phi_g(x) :=$ eind. Pkt x' auf gh_1 —— gh_2

für den gilt: $d_S(gh_1, x') = d_S(h_1, x)$.

Nachrechnen: Φ_g ist Isometrie mit

$$\Phi_g \circ \Phi_h = \Phi_{gh} .$$

□

<u>Cay(G,S) ist schön:</u>

<u>5.4 Eigenschaften</u> von Cay(G,S):

1) $\overset{(\rightarrow)}{\mathrm{Cay}}(G,S)$ ist eigentlich, d.h. abgeschl. Bälle sind kompakt.

2) $\mathrm{Cay}(G,S)$ ist geodätisch.

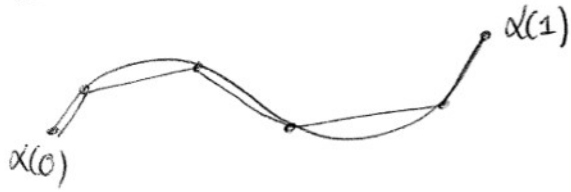
<u>Bew 1)</u>: Klar, da jeder Ball von endlichem ganzzahligen Radius Vereinigung endlich vieler Kanten ist. □

Bew 2) kommt!

5.5 Def. Längen von Kurven

Sei $\alpha : [0,1] \to X$, stetig, ein Pfad in einem metr. Raum X. Dann ist die Länge von α geg. durch

$$\ell(\alpha) := \sup_{0 = t_0 \leq \ldots \leq t_n = 1} \sum d(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})).$$



Bem: Es gilt $\forall \alpha$ $\ell(\alpha) \geq d(\alpha(0), \alpha(1))$.

Bem. Schreibe $\alpha * \beta$ für die Verkettung zweier Pfade α, β mit $\alpha(1) = \beta(0)$.
Es ist dann $\ell(\alpha * \beta) = \ell(\alpha) + \alpha(\beta)$.

5.6 Def. (Geodäte und geodätischer Raum)

Ein Pfad γ ist eine Geodäte in X, wenn gilt: $\ell(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$.

Er ist lokale Geodäte, wenn $\forall\, t \in [0,1]$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $\gamma|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ ist Geodäte.

Ein Raum X heißt geodätisch, wenn für alle Paare $x, y \in X$ eine Geodäte von x nach y existiert (d.h. α mit $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$).

<u>Bew. 5.42)</u> : z.z. $Cay(G,S)$ ist geodätisch

Wir wissen, dass für $g,h \in G$ der Abstand $d_S(g,h) =$ Wortlänge von $g^{-1}h$ ist.
Somit existiert eine Geodäte $v \rightsquigarrow v'$ $\forall$ Ecken v, v' in $Cay(G,S)$.
Es ist auch klar, dass Geodäte $x \rightsquigarrow x'$ existiert, wenn x und x' auf einer Kante sind.

Man kann leicht sehen, dass dann gilt:

$$d_S(x,y) = \inf\{ d_S(x,g) + d_S(g,h) + d_S(h,y) \mid d_S(x,g), d_S(y,h) < 1 \text{ und } g,h \in G \}.$$

für x,y, die nicht auf einer gem. Kante sind.

ist ein „min"

Es ist klar, dass die Verkettung dreier Geodäten $x \rightsquigarrow g$, $g \rightsquigarrow h$, $h \rightsquigarrow y$ eine Geodäte von x nach y liefert (weil die Abstände sich entspr. aufaddieren). $\square$

<u>Bem.</u> Wir haben: Jede endlich erzeugte Gruppe wirkt auf einem eigentlichen, geodätischen metr. Raum.

⚠ $G \curvearrowright \{Pkt\}$ $\forall G$

hat auch diese Eigenschaften

Die Wirkg $G \curvearrowright \mathrm{Cay}(G,S)$ ist schön!

Def 5.7 Eine Wirkung $G \curvearrowright (X,d)$ heißt **eigentlich diskontinuierlich**, falls gilt:

$$|\{g \in G \mid B \cap gB \neq \emptyset\}| < \infty \quad \forall \text{ Bälle } B \subseteq X.$$

d.h. $\forall x \in X$ und alle Bälle $B \subseteq X$ ist nur für endl. viele $x \in X$ $g.x$ in B.

5.8 Eigenschaften von eigentl. disk. Wirkgen

Ist $G \curvearrowright X$ eigentl. disk., so gilt:

(i) Punktstabilisatoren sind endlich.

$\quad \hookrightarrow G_x := \{g \in G \mid g.x = x\} \quad x \in X$

(ii) Orbiten haben keine Häufungspunkte.

5.9 Eigenschaften von $G \curvearrowright \mathrm{Cay}(G,X)$, G endl. erzeugt

Die Linkstranslationswirkung ist

(i) eigentlich diskontinuierlich

(ii) ko-beschränkt.

(b.w)

5.10 Def. $G \curvearrowright X$ ist **ko-beschränkt**, wenn es einen Ball $B \subseteq X$ gibt mit $G.B = X$.

Beweis 5.9

(i) Sei v Ecke in $\underbrace{Cay(G,S)}_{=:\Gamma}$. Dann ist $G.v = V(\Gamma)$.
Es ist klar, dass jeder Ball um v nur endl. viele andere Ecken v' enthält.
$\Rightarrow$ Beh.

(ii) Hier erfüllt ein Ball mit Radius $=1$ um eine beliebige Ecke die Vor.

$\square$

5.10 Satz (UG von endl. Index isom. zu $\mathbb{Z}$)

Ist G endl. ez. und wirkt eigentl. disk. ~~...~~ und ko-beschränkt durch Isometrien auf $\mathbb{R}$, so besitzt G eine UG von endl. Index, die zu $\mathbb{Z}$ isomorph ist.

Beweis: Sei $\varphi: G \to Isom(\mathbb{R})$ die Wirkg.

Beobachtung: $\mathbb{R}$ ist angeordnet und jeder Isomorphismus ist entweder ordnungserhaltend oder -umkehrend.

$$\rightsquigarrow \quad Isom(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$\phi \longmapsto 1 \quad \text{g.d.w. } \phi \text{ die Ordng umkehrt}$$
$$\phi \longmapsto 0 \quad \text{sonst}$$

das ist ein Homomorphismus mit Kern K.

Dann ist $G' := \varphi^{-1}(K \cap \varphi(G))$ UG von G

und Index von G' in G ist ≤ 2.
Weiter wirkt jedes $g \in G'$ durch Translationen auf $\mathbb{R}$, weil es die Ordng auf $\mathbb{R}$ erhält.

Setze $m := \inf(G'.0 \cap \mathbb{R}_{>0})$
= Infimum des positiven Teils des Orbits der Null.

$G \curvearrowright \mathbb{R}$ ko-beschränkt $\Rightarrow G'.0 \cap \mathbb{R}_{>0} \neq \emptyset$.
eigentl. disk. $\Rightarrow$ inf. ist Minimum.
(weil Orbiten keine HP haben)

Also ist insbesondere $m > 0$.

Betrachte $\varphi : G' \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch
$$\varphi(g) := \psi(g)(0).$$
Dann ist $\varphi(G') \subset m\mathbb{Z}$.

<u>Beh.</u> φ ist Homomorphismus.
<u>Bew.</u> Sei t_g, $g \in G'$ die Zahl in $\mathbb{R}$ s.d.
$\psi(g)(x) = x + t_g \ \forall x \in \mathbb{R}$ ($\exists$ weil G' durch Translationen wirkt).
Insbes. ist also $\underbrace{\psi(g)(0)}_{= \varphi(g)} = t_g$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(gh)}_{= t_{gh}} = \varphi(g) + \varphi(h) = t_g + t_h .$$

Weiter ist $F := \ker(\varphi) = \mathrm{Stab}_{G'}(0)$.

$\uparrow$ endlich, weil $G \curvearrowright \mathbb{R}$ eigentl. disk. (vergl 5.8 (i))

Somit:

$$\mathbb{1} \to F \to G' \xrightarrow{\varphi} m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \to \mathbb{1}$$

ist exakte Sequenz mit Schnitt (exist. immer hierfür)

$s: m\mathbb{Z} \to G'$ mit $\varphi \circ s = \mathrm{id}$.

$\Rightarrow$ $s(m\mathbb{Z})$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}$ und hat in G' (also auch in G) endlichen Index. $\square$

ist die gesuchte Gruppe!

Thema 06 (und Fortstzg 05) Cayleygraphen und Milnor-Svarc

Montag, 8. November 2021 10:58

Wir betrachten jetzt folgende Fragen:

- In welchem Sinn hängt $Cay(G,S)$ (nicht) von S ab?
  D.h. sind $Cay(G,S)$ und $Cay(G,S')$ in irgendeinem Sinne gleich?
- Welche Graphen können Cayleygraphen sein?

Zuerst die zweite Frage:

5.11 Satz von Sabidussi (1958)

Sei Γ kombinatorischer Graph. Dann gilt:

(1) Eine Wirkung $\rho : G \to Aut(\Gamma)$ ist äquivalent zur Linkstranslationswirkg von G auf $Cay(G,S)$ für ein reduziertes S, genau dann, wenn ρ_V transitiv und fixpunktfrei ist

(2) Γ ist Cayleygraph (von einem G bzgl einem red. S) g.d.w. $Aut(\Gamma)$ eine UG enthält, die transitiv und fixpunktfrei auf $V(\Gamma)$ wirkt.

Bem. $\rho_1 : G \to Aut(X_1)$ und $\rho_2 : G \to Aut(X_2)$ sind äquivalent, wenn gilt: $\exists$ Iso $f : X_1 \to X_2$, s.d. $\forall g \in G, \forall x_1 \in X_1$ ist $g.f(x_1) = f(g.x_1)$. (bzw. $\forall x_2 \in X_2$ ist $g.x_2 = f(g.f^{-1}(x_2))$.)

Beweis (1)

„$\Rightarrow$" folgt aus der Tatsache, dass L_g gerade der Multipl. in G entspricht.

„$\Leftarrow$" $\boxed{\text{Schritt 1: finde } S}$

Setze $\bar{S} := \{ g \in G \mid gx$ ist zu x benachbart in $\Gamma \}$.

Bem a): $\bar{S}$ ist abgeschlossen unter Inversenbildung.

Sei $s \in \bar{S}$, dann ist $e = \{x, sx\}$ eine Kante in Γ. Dann ist auch $\{s^{-1}x, x\}$ eine Kante, weil G durch Automorphismen auf Γ wirkt.

~~B~~ Für ein $s \in \bar{S}$ gilt: g_v fixpktfrei

entweder $s^{-1}x = sx \Rightarrow s = s^{-1} \in \bar{S}$

oder $s^{-1}x \neq sx \Rightarrow s^{-1} \neq s$ und beide in $\bar{S}$.

Definiere S wie folgt:

Für $s = s^{-1}$ in $\bar{S}$ sei $s \in S$.

Für $s \neq s^{-1}$ in $\bar{S}$ wähle eines der beiden aus (zB s) und sei dieses in S.

Somit ist $x \sim sx$ g.d.w. s oder s^{-1} in S (beide gdw $s = s^{-1}$).

$\boxed{\text{Schritt 2: definiere Morphismus}}$

Wir suchen: $f : \Gamma' := Cay(G,S) \longrightarrow \Gamma = (V,E)$.
$= (V', E')$

Setze $f(h) := hx$ für selbes, festes x wie oben.

Ist $\{h_1, h_2\}$ Kante in Γ' so existiert (nach Def) ein $s \in S$ mit $h_2 = h_1 s$.

Dann ist $f(h_2) = h_2 x = h_1 s x$

und $f(h_1) = h_1 x$ und $\{h_1 s x, h_1 x\}$ ist Kante

weil $\{\underbrace{sx, x}_{=:e}\}$ Kante ist $\forall s \in S$. $\uparrow = h_1 . e$

Somit ist f Morphismus von Graphen.

$\boxed{\text{Schritt 3: zeige } f \text{ ist Iso}}$

f ist injektiv, weil f_V fixpktfrei ist

$(gx = hx \Rightarrow g^{-1}hx = x \Rightarrow g^{-1}h = \mathbb{1})$.

f ist surjektiv, weil f_V transitiv ist.

$(\exists g \in G$ mit $gx = y \quad \forall y \in V$

Es ist dann aber $y = f(g)$. $)$

Noch z.z. $e = \{y_1, y_2\}$ Kante in Γ, dann ist

$f^{-1}(e)$ auch Kante in Γ'.

(ÜA)

Beweis (2):

„$\Rightarrow$" Linkstranslationswirkg ist transitiv und fixpktfrei auf $V(\Gamma)$.

„$\Leftarrow$" klar mit (1).

$\square$