Montag, 1. November 2021 09:13

4. endlich präsentierte Gruppen

Wir nutzen jetzt freie Gruppen, um neue (Quotienten-) gruppen zu erzeugen.

4.1 Def. (endlich) präsentierte Gruppen.

Sei S eine beliebige Menge und $R \subset (S^{\pm})^*$. (= Wörter über S)

Die von S mit Relationen R erzeugte Gruppe ist gegeben durch

$$\langle S \mid R \rangle := F(S) / \langle R \rangle^{\triangleleft}_{F(S)}$$

Ist G gegeben, die zu $\langle S \mid R \rangle$ isomorph ist, so sagen wir: $\langle S \mid R \rangle$ ist Präsentierung (oder Darstellung) von G.

Ist S und R endlich, so ist G endlich präsentiert.

Bem.: Es gibt Gruppen, von denen man weiß, dass es eine isomorphe endlich präsentierte Gruppe $\langle S \mid R \rangle$ gibt, aber für die man R und S nicht explizit angeben kann.

Bem. Notation in 4.1 leicht unpräzise: R kann nicht-reduzierte Wörter enthalten F(S) aber nicht.

$\rightsquigarrow \langle S \mid R \rangle = F(S)/\langle \overline{R} \rangle$ $\quad \overline{R} = \{ \overline{\omega} \mid \omega \in R \}$. (reduzierte Form von ω)

4.2 Bsp.

1) $\forall n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle x \mid \underbrace{x^n}_{= 1 \text{ im Quotienten}} \rangle$

Beweis Betrachte
$$\varphi : F(x) \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$x \longmapsto 1$$

Dann ist $\langle x^n \rangle^{\triangleleft}_{F(x)} = \langle x^n \rangle = \ker(\varphi)$.

Weiter ist $F(x)$ abelsch, φ surjektiv also gilt $\langle x \mid x^n \rangle = F(x)/\ker(\varphi) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

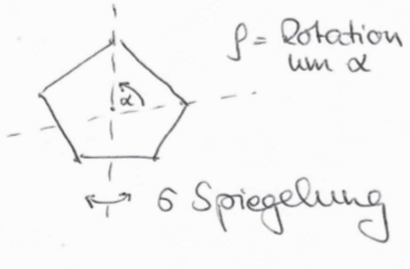
mit Isomorphiesatz: $f : G \to H$ Homom.
$K = \ker(f) \Rightarrow G/K \cong \mathrm{im}(f)$. □

2) Es ist $\mathbb{Z}^2 \cong \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$

3) $G := \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-2}, \; yxy^{-1}x^{-2} \rangle$ ist trivial.
(ÜA)

4) Diedergruppe D_n lässt sich schreiben als:
$$D_n \cong \langle s, t \mid s^n, t^2, tst^{-1}s \rangle =: G$$

Bew-Ansatz: Betrachte $\varphi : D_n \to G$
$$\sigma \longmapsto t$$
$$\rho \longmapsto s$$



□

5) Die Gruppe $\langle s,t \mid [t^n s t^{-n}, t^m s t^{-m}],\ n,m \in \mathbb{Z} \rangle$ ist endlich erzeugt, aber nicht endlich präsentiert. (Baumslag 1961).

<u>Bem.</u>

1) Ob ein geg. $G = \langle S \mid R \rangle$ die triviale Gruppe ist, ist unentscheidbar, d.h. $\nexists$ Algorithmus der (geg. S und R) entscheidet, ob $\langle S \mid R \rangle = \{\mathbb{1}\}$ ist. (Berechenbarkeitstheorie).

2) I.A. ist das Wortproblem nicht lösbar d.h. man kann nicht entscheiden, ob ein geg. Wort w über dem Alphabet $S^{\pm}$ das neutrale Element repräsentiert.
$\rightarrow$ Es gibt Klassen von Gruppen, für die das doch geht.

<u>4.3 Satz</u> (Univ. Eigensch. von Gruppenpräsentationen)

Sei S eine Menge, $R \subset (S \cup S^{-1})^*$.
Dann hat $\langle S \mid R \rangle$ folgende univ. Eigenschaft:

(UE) $\forall G$ Gruppe und $\forall \varphi: S \to G$ mit der Eigenschaft $\varphi^*(r) = \mathbb{1}\ \forall r \in R$ gilt:
(φ^*: kanon. Fo. von φ auf $(S \cup S^{-1})^*$)
$\exists!\ \bar{\varphi}: \langle S \mid R \rangle \longrightarrow G$ mit $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \\ F(S)/\langle R \rangle = \langle S \mid R \rangle \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

Baumslags Bsp: endlich erzeugt aber

Baumslags Bsp: endlich erzeugt aber nicht endl. präsentierte Gruppe.

$\leadsto$ ∞-viele solche existieren!

4.4 Satz (2-erzeugte Gruppen)

Es gibt überabzählbar viele (Isomorphie-klassen von) Gruppen, die von zwei Elementen erzeugt werden.

Bew-Skizze später.

4.5 Korollar (endl. erzeugte, nicht endl.-präs. Gruppen)

Es gibt überabzählbar viele (Isomorphie-klassen von) endlich erzeugten Gruppen, die nicht endlich präsentiert sind.

Beweis: $\exists$ nur abzählbar viele endliche Darstellungen / Präsentierungen von Gruppen.

Mit Satz 4.4 folgt Beh. $\square$

Die nächsten zwei Propositionen beweisen Satz 4.4.

4.6 Proposition

Es gibt eine 2-erzeugte Gruppe G, die überabzählbar viele paarw. nicht-isomorphe normale Untergruppen hat.

Bew. Skizze 4.6

Betrachte $G := \langle s,t \mid R \rangle$ mit

$$R := \{ [[s, t^n s t^{-n}], s] \mid n \in \mathbb{Z} \} \cup \{ [[s, t^n s t^{-n}], t] \mid n \in \mathbb{Z} \}.$$

Sei C Untergr. von G erzeugt von der Menge $\{[s, t^n s t^{-n}] \mid n \in \mathbb{Z}\} =: S_C \subset C < G$.

Dann ist C zentral in G, d.h. alle Elemente in C sind invariant unter Konjugation mit s und t (und somit $g \in G$) nach Def von R.

zB. ist $s[\cdot,\cdot]s^{-1} = [\cdot,\cdot]ss^{-1} = [\cdot,\cdot]$ für $[\cdot,\cdot] \in S_C$.

Man kann zeigen: $C \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.

Diese Summe enthält überabzb. viele UG:
Betrachte zB UG erzeugt von „Einheits-vektoren" zu verschiedenen Teilmengen von $\mathbb{Z}$.
Alle solche sind normal in G, weil sie UG von C sind und C zentral ist. □

4.7 Prop. G endlich erzeugt. Dann gilt:

(1) G enthält überabzb. viele paarw. nicht-isomorphe normale UG.

$\Updownarrow$

(2) G hat überabzb. viele paarw. nicht-isomorphe Quotienten.

<u>Beweis</u>: (1) $\Rightarrow$ (2):

Wir zeigen $\neg(2) \Rightarrow \neg(1)$:

<u>Ann.</u>: G hat nur abzb. viele paarw. versch. Quotienten.

Sei Q so ein Quotient. Weil G endlich erzeugt ist, ist Q selbst abzählbar.

$\Rightarrow \exists$ abzb. viele Homom. $G \xrightarrow{\varphi} Q$.

$\Rightarrow \exists$ abzb. viele normale UG N von G mit $G/N \cong Q$ (d.h. $\ker(\varphi) = N$).

Damit kann G aber nur abzb viele versch. normale UG haben, wenn es nur abzb. viele versch. Quotienten hat. ↯ zu (1) $\square$

„$\Rightarrow$"

(2) $\Rightarrow$ (1): Jeder Quotient Q besitzt einen Homom. $G \xrightarrow[\varphi]{} Q$. Sei $N := \ker(\varphi)$.

Dann sind für paarw. versch. Q, Q' auch die normalen UG N, N' in G verschieden.

(Sonst $\underset{Q \cong}{G/N} \cong \underset{\cong Q'}{G/N'}$ ↯ zu $Q \ncong Q'$). $\square$

<u>Beweis 4.4</u>:

Aus 4.6 und 4.7 folgt 4.4:

liefert überabzb. viele normale UG

liefert aus überabzb. vielen UG die zugeh. (versch.) Quotienten.

$\square$

4.8 Beispiele endlich präsentierter (Klassen von) Gruppen

1) Coxetergruppen = Abstraktion von Spiegelungsgruppen, 2-erzeugt

Eine Coxetergruppe ist eine Gruppe, die eine Präsentierung der Form

$$\langle s_1, \dots, s_n \mid (s_i s_j)^{m_{ij}} \ \forall i,j \rangle$$

Konvention: falls $m_{ij} = \infty$ so steht hier keine Relation

besitzt, wobei $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \ \forall i,j$ und $m_{ii} = 1 \ \forall i$, sowie $m_{ij} \geq 2 \ \forall i \neq j$.

Wir können die m_{ij} in eine Matrix schreiben $(m_{ij})_{i,j=1,\dots,n} = M$, genannt Coxetermatrix. Wir schreiben dann auch Γ_M für die durch M definierte Coxetergruppe.

z.B. a) ist die Diedergruppe $D_n = \Gamma_{\left(\begin{smallmatrix}1 & n\\ n & 1\end{smallmatrix}\right)}$

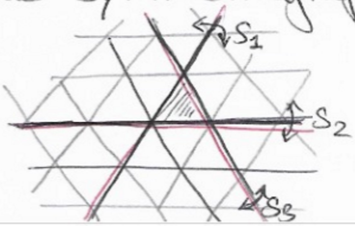
oder b) S_n = symm. Gruppe = $\Gamma_{M_{n-1}}$

mit $M_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 1 & 3 & & \vdots \\ 2 & 3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 3 \\ 2 & \cdots & & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$(n-1)\times(n-1)$ Matrix

$\frac{\pi}{m_{ij}}$ = Winkel zwischen H_i & H_j

c) für $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ist Γ_A die Symmetriegruppe der Parkettierung von $\mathbb{R}^2$ mit gleichseitigen Dreiecken.



Es ist zB $D_3 = \Gamma_{\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}}$ kanonisch in Γ_Γ eingebettet.

2) Artingruppen

$$\langle s_1,\dots,s_n \mid \underbrace{s_is_js_i\dots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_js_is_j\dots}_{m_{ij}} \ \forall i,j \rangle$$

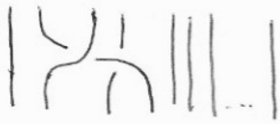
mit $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und $m_{ij} \geq 2$ wenn $i \neq j$.

- Artingruppen haben als Quotienten die Coxetergruppe mit zusätzl. Relationen (s_is_i) d.h. $m_{ii} = 1 \ \forall i$.
- freie Gruppen sind Artingruppen (setze $m_{ij} = \infty \ \forall i,j$).
- freie abelsche Gruppen ($\cong \mathbb{Z}^n$) sind Artingruppen (setze $m_{ii} = \infty \ \forall i$ und $m_{ij} = 2 \ \forall i \neq j$).

rechtwinklige Artingruppen (RAAGs) sind Artingruppen mit $m_{ij} \in \{2, \infty\} \ \forall i,j$.

3) Zopfgruppen B_n, $n \geq 1$

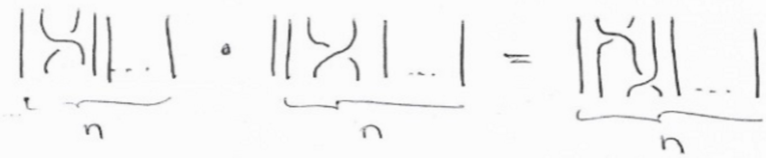
Elemente in B_n: n verknotete Stränge

zB 

triv. Element: $\hat{=}$ kein Knoten 

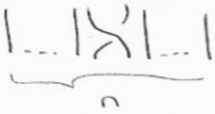
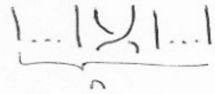
n Stück

Verknüpfung $\hat{=}$ Stapeln der Elemente



$B_{n+1} = < x_1, \dots, x_n \mid x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$ falls $j \neq i+1$
und $x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \;\; \forall i \in \{1, \dots, n-1\} >$

i-ter Strang

$x_i \;\hat{=}$  mit Inversem $x_i^{-1} =$ 

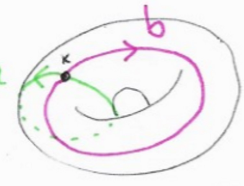
(⇝ geom. Bedeutung der Relationen erklären).

4) Flächengruppen

Sei S_g geschlossene, orientierbare Fläche vom Geschlecht g. Dann gilt:

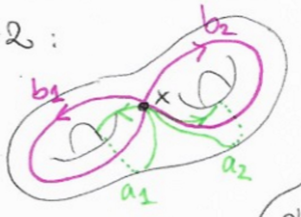
$$\pi_1(S_g) = < a_1, b_1, \dots, a_g b_g \mid \overbrace{\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i]}^{= 1 \text{ in } \pi_1(S_g)} >$$

$g=1$:



x = Basispkt für $\pi_1(S_g)$

$g=2$:



$g=n$: