Thema 03 (Fortsetzung) Freie Gruppen II

Montag, 18. Oktober 2021 12:38

TdW: $\boxed{\text{Freie Gruppen II}}$

Wir sehen Anwendungen von 3.12 und nutzen Cayleygraphen um algebraische Eigenschaften zu zeigen.

3.16 Korollar (S.v. Nielsen-Schreier)

Untergruppen freier Gruppen sind frei.

Beweis: F freie Gruppe, $G < F$.
Mit 3.12 wirkt F dann frei auf einem Baum T.
Dann wirkt aber auch G frei auf T und somit ist G frei (mit 3.12) □

3.17 Korollar (quantitative Version von 3.16)

Sei F freie Gruppe vom Rang n und $G < F$ UG vom Index $k \in \mathbb{N}$.
Dann ist G frei vom Rang $k(n-1)+1$.

Insbes. sind also UG von endl. Index in freien Gruppen von endl. Rang endlich erzeugt.

Index: $|F : G| = \#$ NK von G in F

Beweis Sei S freies EZS von F. Sei $\Gamma := Cay(F, S)$.
G und F wirken frei auf Γ durch Linkstranslation.

Aus dem Bew. von 3.12 sehen wir, dass
$\text{Rang}(G) = \frac{1}{2} \cdot E$ wobei $E = \#$ wesentl. Kanten eines ~~Fu~~ Fundamentalbaumes T_0 sind

Weil $|F:G| = k$ hat T_0 genau ~~$\$$~~ k Ecken.
Index $\hat{=}$ # Orbiten bzw # NK,

Es gilt: $d_T(v) = 2n = 2 \cdot |S| \quad \forall v \in V(T)$.
$\quad$ " Eckengrad von v in T $\quad$ (T ist regulär)

Somit ist $\sum_{v \in V(T_0)} d_{T_0}(v) = k \cdot 2n$. $\quad (*)$

Andererseits ist T_0 endlich und besitzt $(k-1)$ Kanten, die in $(*)$ alle doppelt gezählt werden. Somit ist

$$\sum_{v \in V(T_0)} d_T(v) = \underbrace{2(k-1)}_{2 \cdot \text{ kanten in } T_0} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kanten von } T_0 \text{ nach } T \setminus T_0}}{E}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \text{Rang}(G).}}{\tfrac{1}{2} E} = k \cdot n - (k-1) = k(n-1)+1$$

$E = \sum d_T(v) - 2(k-1)$ $\quad \square$

3.18 Korollar (ÜA)

Sei F frei vom Rang $m \geq 2$.
Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ existiert eine (freie) UG G von F mit $\text{rang}(G) = n$.

3.19 Ping-Pong Lemma

Sei G von $S = \{a, b\}$ erzeugte Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Wenn gilt:

(1) X besitzt disjunkte Teilmengen $A, B \subset X$ und

(2) $a^k(B) \subset A$ und $b^k(A) \subset B$ $\forall k \neq 0$ in $\mathbb{Z}$

dann ist G frei von S erzeugt.

Beweis: z.z. kein nicht-leeres reduziertes Wort entspricht der $\mathbb{1}$ in G.

Sei $g \in G$ geg. durch ein Wort der Form

$a^* b^* a^* \dots b^* a^*$ $*$ bedeutet: Exponent in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Dann ist $g(\cancel{B}) \subseteq A$ mit (2).

$\Rightarrow g \neq \mathbb{1}$ weil $B \cap A = \emptyset$ mit (1).

Jedes andere Gruppenelement $g' \in G$ ist konjugiert zu einem g obiger Form. ⊗

Da aber $G \mathbb{1} G^{-1} = \mathbb{1}$ ist g nicht-trivial gdw es durch ein nicht-triviales reduziertes Wort geg. ist.

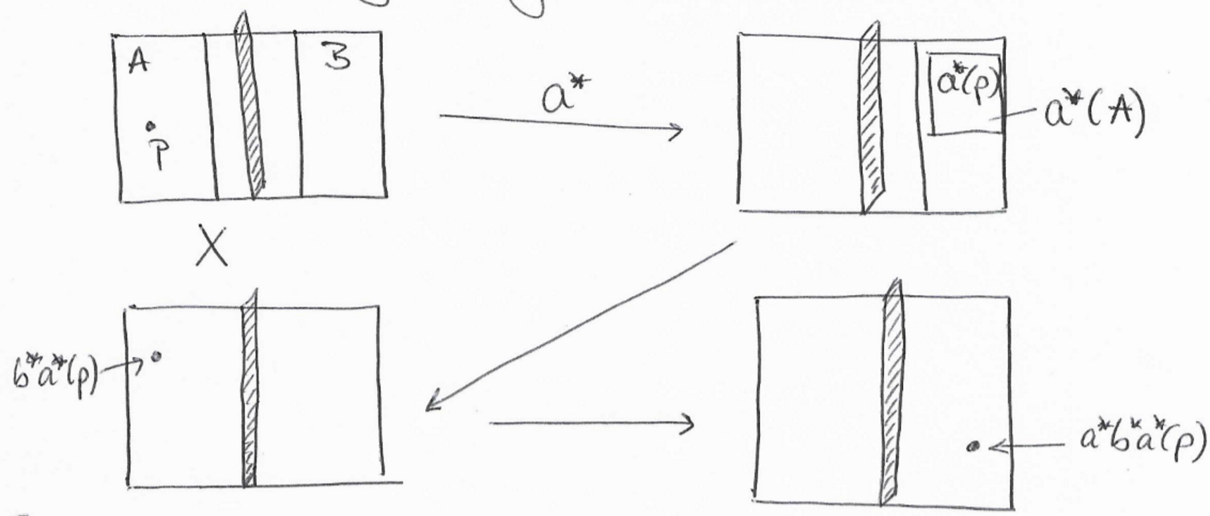
$\square$

⊗ Bsp: a) $a^* b^* a^* b^* \dots b^*$ konjugiere mit a^k

s.d. $a^k a^* b^* \dots b^* a^k = a^* b^* \dots b^* a^*$

b) $b^* a^* b^* \dots b^*$ konjugiere mit a.

Warum "Ping-Pong"?



3.20 Bsp. Wir konstruieren eine freie UG in $SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \mid ad-bc = \det(..) = 1 \right\}$

Beh: Die Gruppe $G := \langle M_1, M_2 \rangle_{SL(2,\mathbb{Z})}$ mit $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist frei vom Rang 2.

Bew: Wir spielen Ping-Pong!

Betrachte lineare Wirkung $SL(2,\underset{\mathbb{Z}}{\mathbb{R}}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$(M, \binom{x}{y}) \longmapsto M\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} m_{11}x + m_{12}y \\ m_{21}x + m_{22}y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Mx-mult mit Vektor

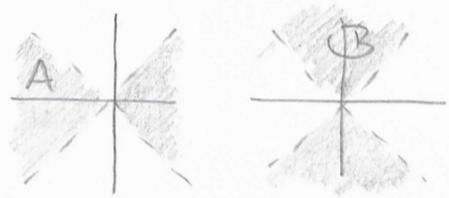
Dann gilt $\forall\, n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ und $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, dass

$$M_1^n \binom{x}{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \binom{x}{y} = \binom{x+2ny}{y}.$$

Definiere

$A := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y| \}$

$B := \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid |y| > |x| \}$



Es ist $(B \not\subset A$ und$)$ $A \cap B = \emptyset$.

Für $\binom{x}{y} \in B$ gilt: $|x + 2ny| \geq |2ny| - |x|$ (△-Ungl.)

und $|2ny| - |x| > |2y| - |y| = |y|$. (für $n \geq 1$ und $|y| > |x|$)

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+2ny \\ y \end{pmatrix} \in A$ und somit $M_1^n B \subset A$, $\forall n \neq 0$

Analog rechnet man nach, dass $M_2^n A \subset B$ $\forall n \neq 0$.

Mit Ping-Pong Lemma folgt die Beh. $\square$

3.21 Satz (Rang ist wohldefiniert)

Zwei freie Gruppen $F(A)$ und $F(B)$ sind genau dann isomorph, wenn $|A| = |B|$.

Beweis: „$\Leftarrow$" Sei $|A| = |B|$. Dann $\exists$ Bijektion $\varphi: A \to B$, die mit der univ. Eigenschaft freier Gruppen eindeutig zu einem Homomorphismus $\bar{\varphi}: F(A) \to F(B)$ erweitert. Da A und B Erzsyst. sind und φ eine Umkehrabb. φ^{-1} besitzt ist $\bar{\varphi}$ ein Iso.

„$\Rightarrow$" Sei $F(A) \cong F(B)$, sei $\varphi: F(A) \to F(B)$ ein Isomorphismus.

Sei $N(A) \leq F(A)$ normale UG erzeugt von $\{ g^2 \mid g \in F(A) \}$.

Die Gruppe $\varphi(N(A)) =: N(B)$ ist normal in $F(B)$ und erzeugt von $\{ h^2 \mid h \in F(B) \}$.

$\Rightarrow$ φ induziert einen Iso $\psi: F(A)/N(A) \xrightarrow{\cong} F(B)/N(B)$.

Es ist aber $F(A)/N(A)$ isomorph zu $\bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $F(B)/N(B) \cong \bigoplus_{b \in B} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ A und B die selbe Kardinalität haben. $\square$

Warum?
Quadrate werden rausgeteilt