

3. freie Gruppen

TÜ 03

## Freie Gruppen: Definition und Eigenschaften

## Def. 3.1 (reduzierte Wörter)

Sei  $A$  eine bel. Menge. Ein Wort  $w$  in  $A$  ist eine endliche Folge von Elementen aus  $A$ . D.h.

$$w = y_1 \dots y_n, \quad y_i \in A.$$

Definiere  $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$  Menge formales Inversen der Elemente in  $A$  und nenne  $A^\pm := A \cup A^{-1}$  ein Alphabet.

Ausdrücke der Form  $w = y_1^{\varepsilon_1} \dots y_n^{\varepsilon_n}$   $y_i \in A, \varepsilon_i \in \{\pm 1\}$  sind Wörter in  $A^\pm$  (wobei  $y_i^{\pm 1} := y_i$ ).

Ein solches Wort heißt reduziert, falls es kein Teilwort der Form  $aa^{-1}$  bzw.  $a^{-1}a$  ~~ist~~ enthält.

Wir nennen  $n$  die Länge von  $w$  und schreiben  $|w|$ .

Bem. Ist  $A$  bereits Teilmenge einer Gruppe, so setzen wir  $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$ .  
 $\uparrow$  Inverse in  $G$

Def. 3.2 Eine Gruppe  $G$  ist frei, wenn es ein Erzeugendensystem  $S$  in  $G$  gibt so, dass jedes <sup>nicht-leere</sup> reduzierte Wort in  $S^\pm$  ein nicht-triviales (!) Element in  $G$  definiert.

Bem:

Wir sagen dann:  $G$  ist frei von  $S$  erzeugt.  
 Und  $S$  heißt freie Basis von  $G$ .

## Def. 3.3 reduzierte Form eines Wortes

Sei  $w = y_1^{e_1} \dots y_n^{e_n}$  ein Wort in  $A^\pm$ .

Ein elementares Reduktionsschritt von  $w$  besteht aus dem Löschen eines Teilwortes der Form  $a \cdot a^{-1}$ ,  $a \in A^\pm$ , aus  $w$ .

$$\begin{array}{c} \text{Bsp. } uyy^{-1}u \\ \downarrow \\ uu \end{array}$$

Eine Reduktion von  $w$  ist eine Folge elementarer Reduktionsschritte

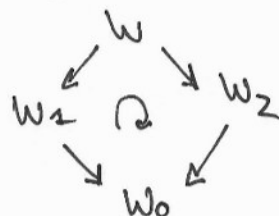
$$w \rightarrow w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_n$$

so dass  $w_n$  ein reduziertes Wort ist.

Wir nennen  $w_n$  reduzierte Form von  $w$  und schreiben  $\bar{w}$ .

Le 3.4 Seien  $w \rightarrow w_1$  und  $w \rightarrow w_2$  elementare

Reduktionsschritte von  $w$ . Dann existieren elementare Reduktionsschritte  $w_i \rightarrow w_0$ ,  $i=1,2$  s.d. das folgende Diagramm kommutiert,



$$\text{oder } w_1 = w_2.$$

d.h. elementare Red.Schritte kommutieren.

Beweis: Seien  $\lambda_1: w \rightarrow w_1$  und  $\lambda_2: w \rightarrow w_2$  die elementaren Red. Schr.

Es gibt zwei Fälle:

1. Disjunkte Red. schritte: Es gilt hier

$w = u_1(y_1 y_1^{-1}) u_2(y_2 y_2^{-1}) u_3$  mit  $u_i$  Wörtern in  $A^\pm$  und  $y_i \in A^\pm$ . Hier bezeichnet  $\lambda_i$  Löschung des Wortes  $y_i y_i^{-1}$ .

Dann ist  $\lambda_1 \circ \lambda_2 = \lambda_2 \circ \lambda_1$  und  $w_0$  das Wort  $u_1 u_2 u_3$ .

2. Überlappende Red. schritte: Es gilt hier

$y_1 = y_2$  und  $w = u_1(y_1 y_1^{-1}) y_2 u_2$ .

Dann ist  $w = u_1 \underbrace{y_1 y_1^{-1}}_{\text{wird gelöscht}} y_2 u_2 \xrightarrow{\lambda_2} u_1 y_2 u_2$  // weil  $y_1 = y_2$

und  $w = u_1 y_1 \underbrace{y_1^{-1}}_{\text{wird gelöscht}} y_2 u_2 \xrightarrow{\lambda_1} u_1 y_2 u_2$

d.h.  $w_1 = w_2 = w_0$ . □

Le 3.5 Sei  $w$  Wort in  $A^\pm$ , dann besitzt  $w$  eine eindeutige reduzierte Form.

Beweis: mit Induktion über  $|w| = \text{Länge von } w$ .

- Ist  $|w| = 0$ , so ist  $w$  das leere Wort, also ist  $w$  reduziert.

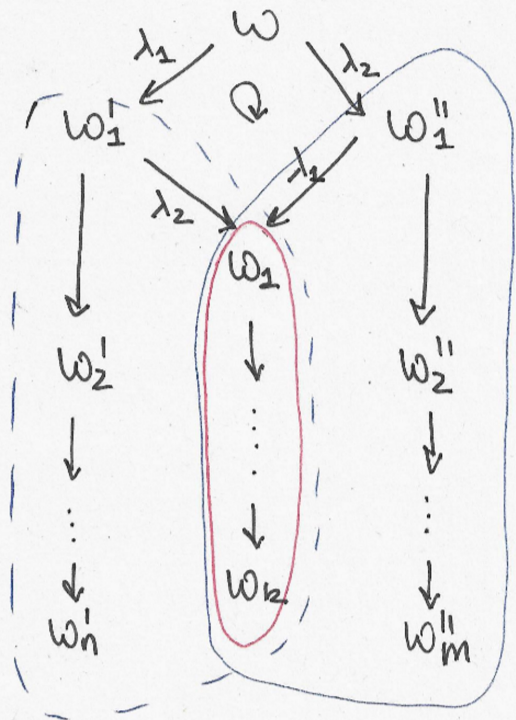
Sei jetzt  $|w| > 1$  und seien

$$w \xrightarrow{\lambda_1} w_1' \rightarrow \dots \rightarrow w_n'$$

$$w \xrightarrow{\lambda_2} w_1'' \rightarrow \dots \rightarrow w_m''$$

zwei Reduktionen.

Dann gilt mit Le 3.4 :



Sei nun

$$w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow \dots \rightarrow w_k$$

Reduktion von  $w_1$ .

Diese ist nach

Ind. Hyp. eindeutig,

weil  $|w_1| < |w|$ .

Es ist nach Ind. Hyp. aber auch die Reduktion von  $w_1'$  und die von  $w_1''$  eindeutig.

$$\Rightarrow w_n' = w_k \text{ und } w_k = w_m'' \Rightarrow w_n' = w_m''$$

und insbes. ist  $n=m$ .

□

Def. 3.6 Konstruktion einer freien Gruppe. -34-

Sei  $A$  eine beliebige Menge.

Sei  $A^{-1} := \{\text{formale Inversen}\}$

Setze  $\underline{F(A)} := \underline{F_{|A|}} := \{ \text{reduzierte Wörter in } A^{\pm} \} = \underline{\text{freie Gruppe über } A}$

manchmal sagen wir nur Wörter in A meinen aber  $A^{\pm}$

und definiere eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} w \cdot u &:= \text{Hintereinanderschreiben} + \text{Reduktion} \\ &= \text{reduzierte Form von } wu. \\ &= \overline{wu}. \end{aligned}$$

Satz 3.7

Für eine bel. Menge  $A$  ist  $F(A)$  eine Gruppe bzgl. " $\cdot$ " und  $F(A)$  ist frei durch  $A$  erzeugt.

Bew. klar nach Konstr. 3.6 und Def von "frei".  $\square$

Universelle Eigenschaft (UE)

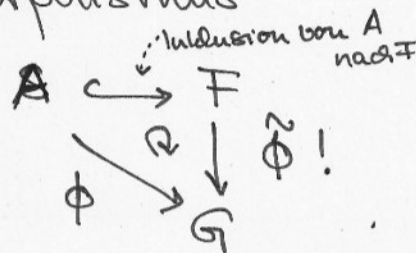
Satz 3.8 (universelle Eigenschaft)

$F$  Gruppe mit  $\in S A \subset F$ . Dann ist  $F$  frei von  $A$  erzeugt, genau dann, wenn gilt:

Jede Abb.  $\phi: A \rightarrow G = \text{Gruppe}$  erweitert zu einem eindeutigen Homomorphismus

$\hat{\phi}: F \rightarrow G$  s.d. folgendes

Diagramm kommutiert:



Beweis: " $\Rightarrow$ " Sei  $F$  frei von  $A$  erzeugt.

Sei weiter  $\phi: A \rightarrow G$  Abbildung. Jedes  $g \in F$  ist reduziertes Wort in  $A^\pm$ . Sei also

$$g = s_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots s_{i_n}^{\varepsilon_n} \quad s_j \in A, \varepsilon_i \in \{1, -1\}.$$

Definiere  $\tilde{\phi}(g) := (\phi(s_{i_1}))^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot (\phi(s_{i_n}))^{\varepsilon_n}$  (\*).

Dann ist leicht nachzuerkennen, dass  $\tilde{\phi}$  tatsächlich Homomorphismus ist. ÜA

◻ Außerdem ist  $\tilde{\phi}$  gerade so definiert, dass das Diagramm kommutiert.

Da aber jedes Homom. für den das Diagramm kommutiert die Gleichheit in (\*) erfüllen muss, ist  $\tilde{\phi}$  eindeutig.

" $\Leftarrow$ " Sei jetzt  $F$  Gruppe, die die univ.

◻ Eigenschaft erfüllt bzgl. einem ES  $A$ .

Sei  $G := F(A)$  freie Gruppe über  $A$ .

Z.z.  $G \cong F$ .

Wir definieren eine Abb.  $\phi: A \rightarrow G$  durch

$\phi(a) = a$  für alle  $a \in A$ . Durch die univ.

Eigenschaft erweitert  $\phi$  eindeutig zu einem Homom.  $\tilde{\phi}: F \rightarrow G = F(A)$ .

Sei  $w$  nicht-leeres, reduziertes Wort in  $A$ .

Dann definiert  $w$  ein  $g \in F$  mit  $\tilde{\phi}(g) = w \in G$ .

- 28 -

insbes. ist  $\tilde{\phi}(g) \neq 1$  und somit  $\ker(\tilde{\phi}) = \mathbb{1}$ .  
 Klar, dass  $\tilde{\phi}$  surjektiv ist.  $\Rightarrow$  Beh.  $\square$

### 3.9 Satz (Cayleygraphen freier Gruppen)

Sei  $G$  frei erzeugt von  $S$ . (d.h.  $G \cong F_S$ )  
 Dann ist  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  ein Baum.

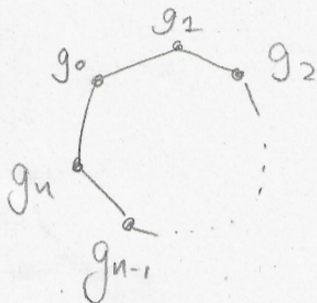
Beweis: Als Menge ist  $G$  die Menge aller reduzierten Wörter in  $S$ .

Weil  $S$  die Gruppe  $G$  frei erzeugt ist  $e \notin S$ .

$\Rightarrow \Gamma := \overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$  ist zusammenhängend und  
 Schleifenfrei

Anm.:  $\exists$  Kreis in  $\Gamma$ , (no vgl Def 2.11 für Kreis)

d.h.  $\exists g_0, g_1, \dots, g_n$  s.d. Kanten  $e_i$   $i=0, \dots, n$   
 existieren mit  $\partial(e_i) = \{g_i, g_{i+1}\} \quad \forall i=0, \dots, n-1$   
 und  $\partial(e_n) = \{g_n, g_0\}$ .



Setze  $s_0 := g_0^{-1} g_1$

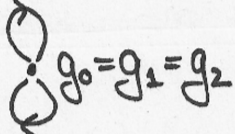
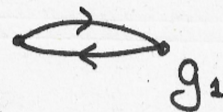
$s_j := g_j^{-1} g_{j+1} \quad \forall j=0, \dots, n-1$

$s_n := g_n^{-1} g_0$

$\Rightarrow s_i \in S \cup S^{-1}$  (nach Def von  $\overrightarrow{\text{Cay}}(G, S)$ ).

Bew. Das Wort  $s_0 \dots s_n$  ist reduziert. -37-

Bew. Wäre das Wort nicht reduziert und z.B.  $s_0 = s_1^{-1}$ ,  
dann ist  $g_0^{-1} g_1 = g_2^{-1} g_1$  und somit  $g_0 = g_2$

also a)  oder b) 

$\Rightarrow$  a)  $s_0 = s_1 = e$  oder b)  $e_0 \neq e_2$  und es existiert

ein  $s \in S$  mit  $s^{-1} \in S$   $\hookrightarrow$  zu  $G$  frei von  $S$  erzeugt.

(vgl. Abgabebblatt)

□

Bem (ÜA)

a)  $s, s^{-1} \in S \Rightarrow S$  ist kein freies EZS.

b)  $e \in S \Rightarrow S$  ist kein freies EZS.

Satz 3.10 (~~fast~~ Umkehrung von 3.9)

$G$  Gruppe,  $S$  EZS.

Ist  $\vec{\text{ Cay}}(G, S)$  ein <sup>(gerichteter)</sup> Baum, dann ist  $S$  freies  
EZS. und  $G$  ist frei.

Def 3.11 Ein Erzeugendensystem  $S$  für das

gilt:  $s \cdot t \neq e \ \forall s, t \in S$  heißt reduziert.



Es genügt zz, dass  $G \cong F_S$ .

Aus der (UE) von freien Gruppen erhalten wir einen Homom.  $\varphi: F_S \rightarrow G$  mit  $\varphi|_S = \text{id}$ .

$G$  ist von  $S$  erzeugt, also ist  $\varphi$  surjektiv.

Ann.:  $\varphi$  sei nicht injektiv.

Sei  $s_1 \dots s_n$  reduziertes Wort in  $F_S$  mit  $s_i \in S \cup S^{-1}$  und  $\varphi(s_1 \dots s_n) = e \in G$ .

$\text{Cay}(G, S)$  ist Baum  $\Rightarrow$

$\nexists$  Schleifen  $\Leftrightarrow e \notin S$

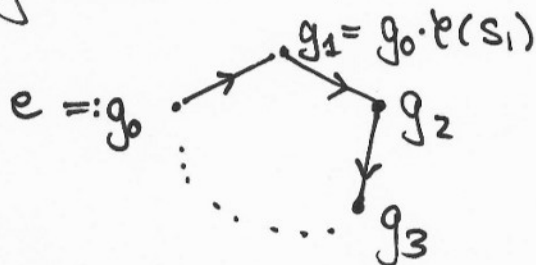
$\nexists$  Doppelkanten  $\Leftrightarrow \forall s \in S$  ist  $s^{-1} \notin S$

Somit ist  $\forall s, t \in S$   $s \cdot t \neq e$ . (ein solches  $e \in S$  heißt

Da  $\varphi|_S$  injektiv und  $e \notin S$  ist reduziert)

$n > 2$  für das Wort  $s_1 \dots s_n$  von oben.

Sei also  $n > 2$ : Das Wort  $s_1 \dots s_n$  definiert einen geschlossenen Pfad in  $\text{Cay}(G, S)$ :



setze  $g_0 := e$  und

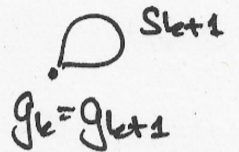
$$g_k := g_{k-1} \varphi(s_k) \quad \forall k = 1, \dots, n$$

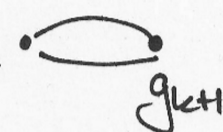
$$\begin{aligned} \text{Es ist } g_n &= g_{n-1} \varphi(s_n) \\ &= \varphi(s_1 \dots s_n) = e = g_0 \end{aligned}$$

Ist ~~dieser~~ Weg ein Kreis sind wir fertig.

Andernfalls gibt es  $k \neq l \pmod{n}$  mit  $k < l$

Und  $g_k = g_l$ .

(i)  $k = l + 1$ :   $\exists$  Schleife  $\Downarrow e \notin S$

(ii)  $l = k + 2$ : so ist  $g_k = g_{k+2}$  

und  $g_k = g_k \varphi(s_{k+1} s_{k+2})$   
 $\Downarrow$

$\Rightarrow s_{k+1} \cdot s_{k+2} = e \quad \Downarrow S$  reduziert

(iii)  $l > k + 2$ : Dann ist

$$g_k = g_l = g_{l-1} \varphi(s_l) = \dots = g_k \varphi(\underbrace{s_k s_{k+1} \dots s_l}_{\text{Wort der Länge } l-k < n})$$

dann können wir  $s_1 \dots s_n$

ersetzen durch  $s_k \dots s_l$  und erhalten induktiv einen Kreis oder wieder Fälle (i) und (ii).

$\Downarrow$   
 $\Rightarrow \varphi$  ist injektiv und somit  $S$  freies EZS für  $G$ .  $\square$

### 3.12 Satz (Charakterisierung freier Gruppen via Wirkung auf Bäumen)

Eine Gruppe ist genau dann frei, wenn sie frei auf einem Baum wirkt.

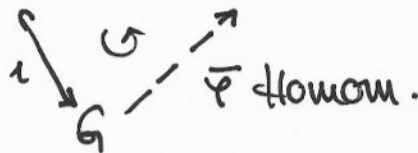
Beweis " $\Rightarrow$ " Ist  $G$  frei von  $S$  erzeugt, so ist  $\vec{\text{Cay}}(G, S) \stackrel{=: T}{=} \text{nach Satz 3.9}$  ein Baum auf dem  $G$  wirkt. Um zu sehen, dass die Wirkung  $G \curvearrowright T$  frei ist genügt es zu zeigen, dass  $S$  keine Elemente der Ordnung 2 besitzt (mit 2.21).

(Beachte, dass hier  $\vec{\text{Cay}}(G, S) = \text{Cay}(G, S)$  mit vergessener Orientierung.)

Ann  $\exists s \in S$  mit  $s^2 = 1$ .

Betrachte  $\varphi: S \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$  mit  $\varphi(s) = \varphi(s^{-1}) = 1$ .

Aus UE erhalten wir  $\bar{\varphi}$



insbes. gilt:  $0 = \bar{\varphi}(\underbrace{s \cdot s^{-1}}_{=1 \text{ in } G}) = \bar{\varphi}(s) + \bar{\varphi}(s^{-1}) = 2 \quad \Leftarrow$

" $\Leftarrow$ " um diesen Teil zu zeigen benötigen wir Hilfsmittel.

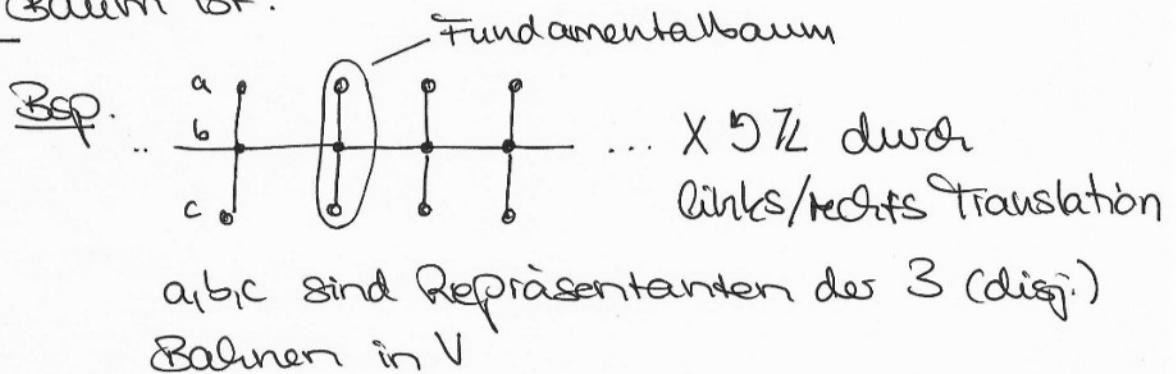
Def. 3.13  $G$  Gruppe,  $G \curvearrowright X = (V, E)$  zshgdes simpl. Graph.

Def. 3.13  $G$  Gruppe,  $G \curvearrowright X = (V, E)$  zykloides  
Simpl. Graph.

Ein Fundamentallbaum für diese Wirkung  
ist ein Unterbaum von  $X$ , der genau eine  
Edge aus jeder  $G$ -Bahn in  $V$  enthält.

Ein Untergraph eines Graphen  $(V, E)$  ist dabei  
ein Graph  $(V', E')$  mit  $V' \subseteq V$  und  $E' \subseteq E$ .

Ein Unterbaum ist ein Untergraph, der ein  
Baum ist.



Satz 3.13 Existenz von Fundamentalbäumen

Jede Wirkung auf einem nicht-leeren, zykloiden,  
Simplizialen Graphen besitzt einen  
Fundamentallbaum.

Beweis: Sei  $G$  Gruppe, die auf einem solchen  
Graphen  $X$  wirkt. Sei  $T_G = \left\{ \begin{array}{l} \text{nicht-leere Unterbäume in } X, \\ \text{die aus jeder Bahn} \\ \text{höchstens eine Edge} \\ \text{enthalten.} \end{array} \right\}$

•  $T_G \neq \emptyset$  weil z.B. jede  
Edge in  $T_G$  ist.

•  $T_G$  ist partiell geordnete durch die Teilbaum-  
Relation. D.h. für  $T, T' \in T_G$  ist  $T < T'$ ,  
wenn  $T$  Unterbaum von  $T'$  ist.

Jede totalgeordnete Kette in  $T_G$  hat eine obere Schwänke (= Vereinigung aller Elemente in der Kette).

Mit Zornschem Lemma folgt, dass mindestens ein max. Element  $\underline{1}$  in  $T_G$  existiert.

$$T_0 \neq \emptyset$$

z.z.  $T_0$  ist Fundamentalbaum für  $G \cap X$

Ann  $T_0$  kein " —

Edgen von  $T_0$

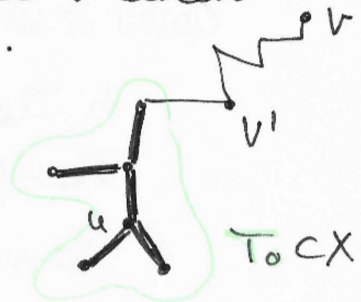
Dann existiert Ecke  $v \in V$  s.d.  $V(T_0) \cap G.v = \emptyset$ .

Bew 1 Wir können annehmen, dass  $v$  einen Nachbarn  $v''$  in  $T_0$  besitzt.

Bew 1: Wähle feste Ecke  $u$  in  $T_0$

und Pfad  $p: u \rightsquigarrow v$  in  $X$ .

Sei  $v'$  erste Ecke auf  $p$ , die nicht in  $T_0$  ist.



1. Fall  $G.v' \cap V(T_0) = \emptyset$

$\rightarrow$  ersetze  $v$  durch  $v'$ , weil dieses die gesuchte Eigenschaft hat.

2. Fall  $\exists g \in G$  mit  $g.v'$  ist Ecke von  $T_0$ .

Betrachte Teilpfad  $p': v' \rightsquigarrow v$ .

Dessen Bild  $g.p': g.v' \rightsquigarrow g.v$  verbindet eine Ecke  $g.v'$  von  $T_0$  mit  $g.v \in G.v$ , die nicht in  $T_0$  liegt (weil  $V(T_0) \cap G.v = \emptyset$ ).

Der Pfad  $p'$  ist kürzer als  $p$

$\rightarrow$  iteriere den Prozess und finde schließlich

eine Ecke mit der gesuchten Eigenschaft.  $\square$  Bew 1

Wir haben also  $v \notin T_0, V(T_0) \cap G.v = \emptyset$

und  $\exists$  Kante  $e, \partial(e) = \{v, v''\}, v'' \in T_0$

Füge dann die Kante  $e$  zu  $T_0$  hinzu.

Das so entstandene Baum  $T_0'$  ist in  $T_G$  und hat  $T_0$  als ersten Unterbaum. Also  $T_0 < T_0'$

$\downarrow T_0$  maximal  
in  $T_G$   $\square$

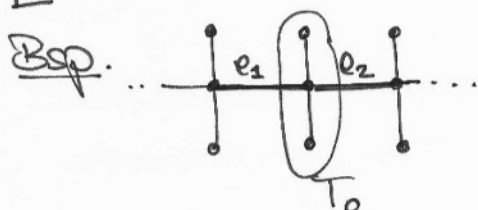
$\Rightarrow T_0$  ist Fundamentalbaum.

Def 3.15

(?)  $\leadsto$  3.11 altes Skript

Sei  $T$  wie in 3.12,  $G \curvearrowright T$  frei,  $T_0$  Fundamentalbaum.

Eine Kante  $e$  in  $T$  heißt wesentlich, wenn  $e \notin E(T_0)$  aber  $\partial(e) \cap V(T_0) \neq \emptyset$ .



$e_1, e_2$  wesentlich

Wir können jetzt " $\Leftarrow$ " von 3.12 beweisen:

$G \curvearrowright T$  frei. Dann existiert nach 3.14 ein Fundamentalbaum  $T_0$  für diese Wirkung

Idee } Wir "schrumpfen" jede Kopie von  $T_0$  unter der  $G$ -Wirkung auf eine Ecke:

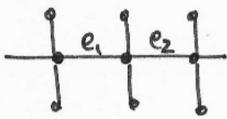
Sei also  $e$  wesentl. Kante von  $T$ ,  $e = \{u, v\}$  mit  $u \in T_0, v \notin T_0$ .

Weil  $T_0$  Fund.baum ist existiert  $g_e \in G$  mit  $g_e^{-1}v$  Ecke von  $T_0$  ( $\Leftrightarrow v$  Ecke von  $g_e T_0$ ).

Es ist  $g_e$  eindeutig, weil  $G.v$  den Baum  $T_0$  in genau einer Ecke trifft und  $G \curvearrowright T$  frei ist.

1. Schritt: Kandidat für Erz. syst.

Setze  $\tilde{S} := \{g_e \text{ in } G \mid e \text{ ist wesentl. Kante von } T \text{ bzgl. } T_0\}$

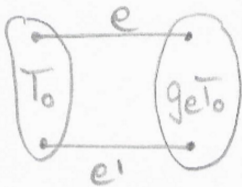
z.B.   $g_{e_1} = -1, g_{e_2} = +1$

Es gilt: (i)  $1 \notin \tilde{S}$  nach Def von "wesentlich".

(ÜA)

(ii)  $\tilde{S}$  enthält keine Elemente der Ordnung 2 (weil  $G$  frei wirkt und jedes Elem. endl. Ordnung einen Fixpunkt besitzt.)

(iii) Sind  $e, e'$  wesentl. Kanten mit  $g_e = g_{e'}$  so ist  $e = e'$ .



Bew. sonst  $\exists$  2 versch. Kanten, die  $T_0$  mit  $g_e T_0 = g_{e'} T_0$  verbinden.  $\downarrow$  zu  $T$  Baum  $\square$

(iv) Ist  $g_e \in \tilde{S}$  so ist  $g^{-1}e \in \tilde{S}$ :

Bew.:  $g = g_e$  für eine wesentl. Kante  $e$ .

Es ist  $g^{-1}e = g_e^{-1}e$  und  $g_e^{-1}e$  ist auch eine wesentliche Kante.  $\square$

Es existiert also eine Teilmenge  $S \subset \tilde{S}$  mit

$S \cap S^{-1} = \emptyset$  (falls  $\neq \emptyset \exists$  Elem der Ordnung 2  $\downarrow$ )

$S \cup S^{-1} = \tilde{S}$  und

$|S| = \frac{1}{2} |\tilde{S}| = \frac{1}{2} \cdot \# \text{ wesentl. Kanten von } T_0 \text{ in } T.$

2. Schritt: zeige  $\tilde{S}$  (und insbes.  $S$ ) erzeugt  $G$ . -45-

Sei  $g \in G$ , sei  $u$  Ecke in  $T_0$ .

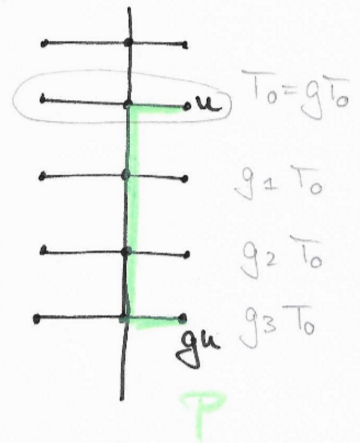
Weil  $T$  zusammenhängend  $\exists$  ein (reduzierter)

Kantenweg  $p$  von  $u$  nach  $gu$ .

Weil  $V(T) = V(\bigcup_{g \in G} gT_0)$  durchläuft

$P$  Kopien von  $T_0$ :

$g_0T_0, g_1T_0, \dots, g_nT_0$  mit



$g_{j+1} \neq g_j \quad \forall j=1, \dots, n-1$  und  $g_0 = 1, g_n = g$ .

Weil  $T_0$  Fund.baum ist, ist  $g_j T_0 \neq g_{j+1} T_0$

und  $g_j T_0$  und  $g_{j+1} T_0$  sind durch eine Kante  $e_j$  verbunden (eine Kante von  $p$ ).

Nach Konstruktion ist daher  $g_j^{-1} e_j$  eine wesentliche Kante und  $s_j := g_j^{-1} g_{j+1}$  ist in  $\tilde{S}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow g = g_n &= \underbrace{g_0^{-1}}_{= s_0} g_n = \underbrace{g_0^{-1} g_1}_{= s_0} \underbrace{g_1^{-1} g_2}_{= s_1} \dots \underbrace{g_{n-1}^{-1} g_n}_{= s_{n-1}} \\ &= s_0 s_1 \dots s_{n-1} \in \langle \tilde{S} \rangle \subseteq G. \end{aligned}$$

Weil  $g$  beliebig gewählt war ist  $\langle \tilde{S} \rangle = G$ .

Bem. Um  $\text{Cay}(G, \tilde{S})$  aus  $T$  zu erhalten kontrahiere jede Kopie  $gT_0$  auf eine Ecke.



3. Schritt:  $S \subset \tilde{S}$  erzeugt  $G$  frei.

Es reicht z.z., dass  $\text{Cay}(G, S)$  keine Kreise enthält. (Satz 3.10)

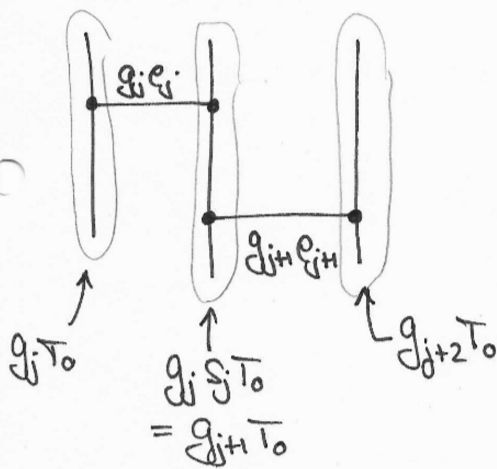
Ann: Sei  $g_0, \dots, g_{n-1}$  Zykel in  $\text{Cay}(G, S)$ .  $g_n = g_0$ .

Setze  $s_j := g_j^{-1} g_{j+1} \quad \forall j = 0, \dots, n-1$ .

Es ist  $s_j \in S$  (oder sei  $S$  so gewählt).

Weiter sei  $e_j$  eine wesentliche Kante zwischen  $T_0$  und  $s_j T_0 \quad \forall j = 0, \dots, n-1$ .

Weil jede Kopie von  $T_0$   $\cong$  Teilbaum von  $T$  ist, lassen sich die Ecken der Kanten  $g_j e_j$  und  $g_j s_j e_{j+1} = g_{j+1} e_{j+1}$ , die in  $g_{j+1} T_0$  liegen, durch einen eindeutigen Weg in  $g_{j+1} T_0$  verbinden.



So konstruiert man einen Kreis in  $T$ , weil  $g_n = g_0 = 1$  also  $t_0 = g_n T_0$  ist.

↳ T-Baum

$\Rightarrow S$  erzeugt  $G$  frei.

□  
Satz 3.12