Thema 02 Gruppenwirkungen

Montag, 11. Oktober 2021 22:45

2. Gruppenwirkungen

$\rightarrow$ Präzisieren der Idee, dass Gruppen Mengen von Symmetrien sind

Beispiele für Räume:

Graphen, metrische Räume, Vektorräume, Simplizial- oder Polyedrische Komplexe, Mannigfaltigkeiten, ...

Def 2.1 Gruppenwirkungen

Sei G eine Gruppe, X ein Raum*.
Eine Wirkung von G auf X ist ein Homomorphismus

$$\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$$

Schreibe $G \underset{\rho}{\circlearrowright} X$ oder nur $G \circlearrowright X$.

*Objekt in einer kleinen Kategorie $\mathcal{C}$, d.h. $\mathrm{Mor}(X,Y)$ ist Menge $\forall X,Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

Bem 1) Eine Wirkung ist eine Familie $(f_g)_{g\in G}$ von Abbildungen $f_g : X \rightarrow X$

(*) mit $f_g \circ f_h = f_{g\cdot h}$, $f_e = id_X$ $\forall g,h \in G$.

2) Eine Wirkung lässt sich auch als Abbildung

$$G \times X \longrightarrow X \quad \text{schreiben}$$
$$(g,x) \longmapsto g.x$$

wobei $e.x = x$ und $(gh).x = g.(h.x)$ $\forall g,h \in G$ und $\forall x \in X$

Bsp. 2.3

1) Jede Gruppe G hat auf jedem X die <u>triviale Wirkung:</u>
$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{f} \mathrm{Aut}(X) \\ g &\longmapsto id_X \quad \forall g \in G \end{aligned}$$

2) $G := \mathrm{Aut}(X) \underset{f}{\curvearrowright} X$ wobei $f: G \to \mathrm{Aut}(X)$ die Identität sei

$\leadsto$ Gruppenwirkungen sind verallgemeinerte Symmetrien

3) $D_n \curvearrowright \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecken} \\ \text{Kanten} \\ \text{Diagonalen} \end{array} \text{des regulären } n\text{-Ecks} \right\}$

4) Rotationswirkung auf Einheitskreis
Sei θ festes Drehwinkel.
$G := \mathbb{Z}$, $X = S^1 \cong \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$
$G \curvearrowright X$ via
$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \times S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (n, z) &\longmapsto e^{2\pi i \theta \cdot n} \cdot z \end{aligned}$$

$(0, z) \longmapsto z \qquad 0 = e \text{ in } \mathbb{Z}$

$f(n+m, z) = f(n, z) \cdot f(m, z)$

5) Translationswirkung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$:

$\mathbb{Z} \circlearrowright \mathbb{R}$ via $(n, x) \longmapsto n+x$

Gruppe Raum

6) Gruppenwirkungen von G auf sich selbst:

a) Links-Multiplikation:

$G \circlearrowright G$ durch $(g, h) \longmapsto g \cdot h$

b) Konjugationswirkung:

$G \circlearrowright G$ durch $(g, h) \longmapsto g h g^{-1}$

Def. 2.4 Eine Wirkung $G \circlearrowright X$ heißt

- frei falls $g \cdot x \neq x$ $\forall x \in X$ und $\forall g \in G \setminus \{e\}$
  d.h. $\mathrm{Stab}_G(x) = \{e\}$ $\forall x \in X$
- treu falls $\rho: G \to \mathrm{Aut}(X)$ injektiv ist,
  d.h. $\forall g \in G \setminus \{e\}$ $\exists x \in X$ mit $g \cdot x \neq x$
- transitiv falls $\forall x \in X$ der Orbit (Bahn) von x unter G ganz X ist
  d.h. $\forall x \in X$ ist $G \cdot x = X$.

Bsp. Linksmultipl.: frei, transitiv und treu
Konjugation: i.A. weder frei noch transitiv

Bsp. Rotation um Θ ist
- frei $\Leftrightarrow \Theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- i.A. nicht treu und transitiv

Bsp. $\mathrm{Isom}(S^1) \curvearrowright S^1$ transitiv aber nicht frei (Spiegelungen haben Fixpkte)

2.5 Wdh Graphen

Ein Graph ist ein Tripel (V, E, δ) mit
V: Ecken, E: Kanten
Randabbildung $\delta : E \to \binom{V}{2}$ = ungeordnete Paare aus V

Eine Schleife ist eine Kante e mit $\delta(e) = \{e, e\}$

Eine Doppelkante zwei Kanten e, e' mit $\delta(e) = \delta(e')$.

Ein Graph ohne Schleifen und Doppelkanten heißt simplizial.

Ein Graph ist gerichtet, wenn wir für jede Kante $e \in E$ das Bild $\delta(e) = \{v_1, v_2\}$ ordnen.

$$v_1 \longrightarrow v_2$$

z.B.  und 

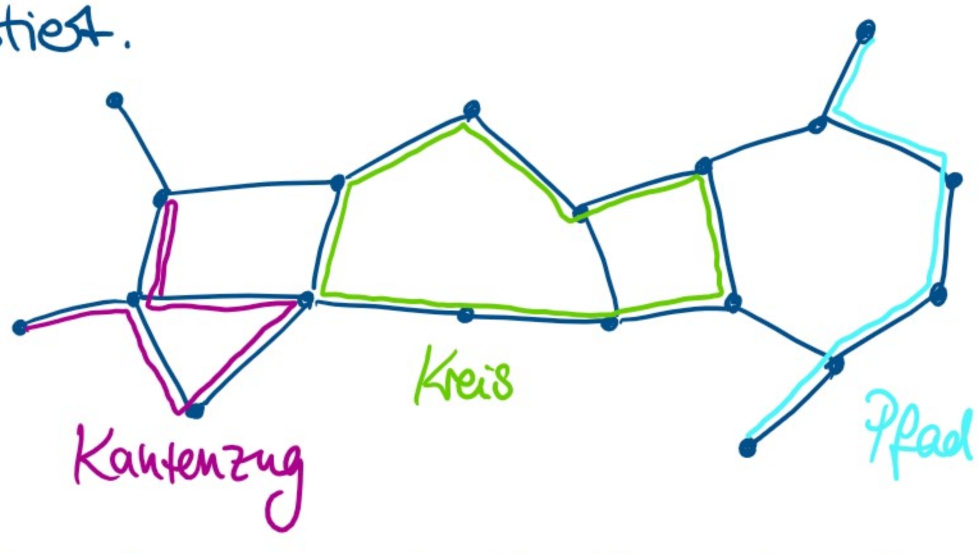
sind als gerichtete Graphen verschieden voneinander.

2.6 weitere Sprechweisen

Ein Kantenzug p der Länge n in einem Graphen $\Gamma = (V, E, \delta)$ ist eine Folge $v_0, \dots, v_n$ von Ecken $v_i \in V$ s.d. es Kanten $e_i \in E$ gibt mit $\delta(e_i) = \{v_{i-1}, v_i\}$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Ein Kantenzug ist ein Pfad, wenn alle Ecken verschieden sind.

Ein Kreis (oder Zykel) ist ein Pfad für den eine weitere Kante e_{n+1} mit $\delta(e_{n+1}) = \{v_0, v_n\}$ existiert.



Analog für gerichtete Graphen mit $\delta(e_i) = (v_{i-1}, v_i)$.

Def. 2.7

Eine Ecke vom Grad 1 ist ein **Blatt**.
Ein **Baum** ist ein simplizialer Graph ohne Kreise.

Lemma 2.8 (Charakterisierung von Bäumen)

Ein zusammenhängender, simplizialer Graph mit mindestens zwei Ecken ist genau dann ein Baum, wenn es zu je zwei Ecken genau einen verbindenden Pfad gibt.

o. Bew.

Def 2.9 (Iso-)Morphismen von Graphen

$\Gamma = (V, E, \delta)$ und $\Gamma' = (V', E', \delta')$ Graphen.
Ein **Morphismus** $\Gamma \xrightarrow{f} \Gamma'$ ist ein Paar von Abbildungen $f_V: V \to V'$ und $f_E: E \to E'$ mit

$$\delta' \circ f_E = (f_V * f_V) \circ \delta.$$

Ein **Isomorphismus** ist ein f zu dem ein Morphismus $f': \Gamma' \to \Gamma$ existiert mit

$$f' \circ f = id_\Gamma \text{ und } f \circ f' = id_{\Gamma'}.$$

Bem. 2.10 Gruppenwirkungen auf Graphen

Eine Wirkung $G \curvearrowright \Gamma$ ist ein Homom. $G \xrightarrow[\rho]{} \mathrm{Aut}(\Gamma)$.

1) Wir können eine solche Wirkung also als Familie von Automorphismen von Γ auffassen.
Dann haben wir:

$(f_g)_{g \in G}$ wobei $f_g = (f_g^V, f_g^E)$

mit $f_g^V : V \to V$, $f_g^E : E \to E$

wobei beide (*) in Bem 1) nach Def 2.1 erfüllen.

Weiter muss gelten:

Ist $\delta(e) = \{u, v\}$ so ist $\delta(f_g^E(e)) = \{f_g^V(u), f_g^V(v)\}$.

"Verträglichkeit mit der Randabbildung."

2) Als Abbildung geschrieben haben wir:

$$\rho_V : G \times V \to V \qquad \text{und} \qquad \rho_E : G \times E \to E$$
$$(g, v) \longmapsto g.v = \rho_V(v) \qquad\qquad (g, e) \mapsto g.e = \rho_E(e)$$

wobei Eigensch. aus Bem 2) nach Def 2.1 gelte.

Zusätzlich gilt: $\delta(\rho_E(e)) = \{\rho_V(u), \rho_V(v)\}$

falls $\delta(e) = \{u, v\}$ für eine Kante $e \in E$.

3) Ein Wirkung $G \overset{\rho}{\curvearrowright} \Gamma = (V, E, \delta)$ heißt **frei**, wenn ρ_E und ρ_V frei sind, d.h. wenn $\forall g \in G \setminus \{1\}$ gilt:

(i) $\forall v \in V$ ist $(\rho_V(g))(v) \neq v$ — ρ_V ist **fixpunktfrei**

und

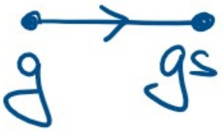
(ii) $\forall e \in E$ ist $(\rho_E(g))(e) \neq e$ — ρ_E ist **inversionsfrei**

2.11 Def. Cayleygraphen

Sei G eine Gruppe mit $S \subset G$ Erz.syst. $1 \notin S$.

a) Der (ungerichtete) Cayleygraph $\mathrm{Cay}(G,S)$ von G bzgl S ist geg. durch
$$V = G, \quad E = \{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S\}$$

b) Der gerichtete Cayleygraph $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ von G bzgl S ist geg. durch $V = G$ und Kanten (g, gs) mit $g \in G, s \in S$.



Wir beschriften (optional) Kanten $\{g, gs\}$ mit s.

Bem 1) Sind S, S' verschieden so i.A. auch $\mathrm{Cay}(G,S)$ und $\mathrm{Cay}(G,S')$. Ebenso für orientierte.

2) $\mathrm{Cay}(G,S)$ ist nicht immer $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S)$ mit vergessener Orientierung auf Kanten.

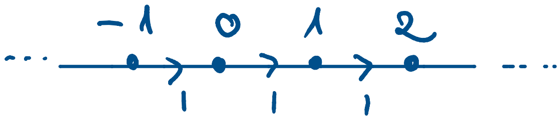
z.B. $G = \{1, s\}$ mit $s^2 = 1$, $S = \{s\}$.

Dann ist $\mathrm{Cay}(G,S) =$ 

$\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S) =$ 

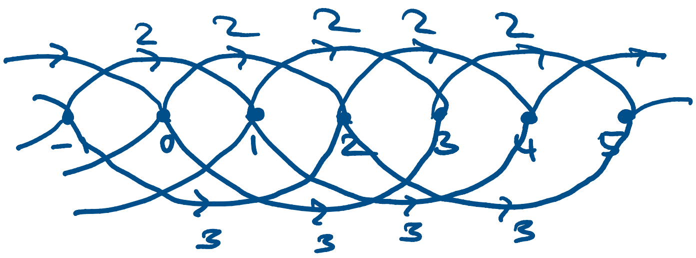
Bsp. 2.12

1) $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbb{Z},\{1\})$

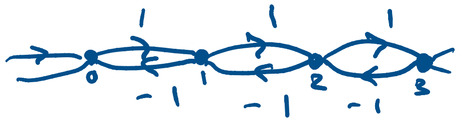


$= \mathrm{Cay}(\mathbb{Z},\{1\})$

$\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbb{Z},\{2,3\})$

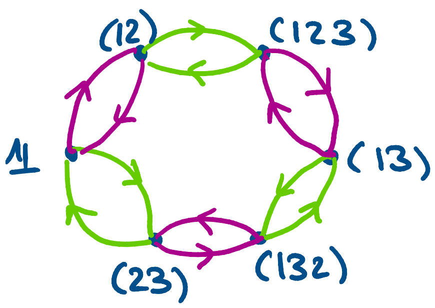


$\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbb{Z},\{1,-1\})$

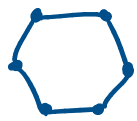


Doppelkanten durch verschiedene Erzeuger

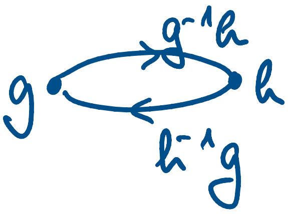
2) $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(S_3,\{(1,2),(2,3)\})$



gleichfarbige Doppelkanten

$\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(S_3,\{\dots\}) =$ 

3) $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G, G\setminus\{1\})$ ist doppelt vollst. Graph auf $\#G$ Ecken mit Kanten



$\forall g,h \in G.$

2.13 Eigenschaften von Caylеygraphen

1) $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$ ist zusammenhängend.

2) $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist regulär, d.h. jede Ecke hat den gleichen Grad.

3) $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$ ist genau dann lokal endlich, wenn S endlich ist.

4) $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$ besitzt keine Schleifen.

5) $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ besitzt Doppelkanten genau dann, wenn $s \in S$ existiert mit $s^{-1} \in S$.

6) $\overrightarrow{Cay}(G,S)$ ist genau dann simplizial, wenn $S \cap S^{-1} = \emptyset$.

2.14 Bsp. Linkstranslation auf $\overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$

Die Linksmultiplikation von G auf sich induziert eine Wirkung $G \circlearrowright \overset{(\rightarrow)}{Cay}(G,S)$.

durch
$$f_V : V \rightarrow V : v \mapsto gv$$
$$f_E : E \rightarrow E : (u,v) \mapsto (gu, gv)$$
mit $v = u \cdot s$ für $s \in S$.

wohldefiniert weil $f_g^V(u) = gu$ und $f_g^V(us) = gus = gv$.

2.15 Satz (Beweis später)

Die G-Wirkung $\rho: G \to \mathrm{Aut}(\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(G,S))$ auf dem Cayleygraphen ist ein Isomorphismus von Gruppen für alle Erzeugendensy

Satz 2.16

Die Linkstranslationswirkung $G \curvearrowright \mathrm{Cay}(G,S)$ ist genau dann frei, wenn S keine Elemente der Ordnung zwei enthält.

Beweis

„$\Rightarrow$" Sei $s \in S$ von Ordnung 2. Dann fixiert s die Kante $\{1, s\}$ in $\mathrm{Cay}(G,S)$. $\lightning$

„$\Leftarrow$" Seien ρ_V und ρ_E die induzierten Wirkungen auf V bzw E in $\mathrm{Cay}(G,S)$.

Dann ist ρ_V fixpktfrei, da Linkstranslation gerade durch Multipl. der Elemente geg. ist.

Bleibt z.z. ρ_E ist inversionsfrei.

Ann. $\exists\, e \in E$ und $g \in G$ mit $\underbrace{(\rho_E(g))}_{=: t_g}(e) = e$

Insbes. ist dann $L_g(\partial(e)) = \partial(L_g(e)) = \partial(e)$.
Mit $\partial(e) = \{v, v'\}$ und $v' = vs$ für ein $s \in S$
folgt: $\{v, v'\} = \{gv, gv'\}$.

Ist 1. $gv = v$ so auch $gv' = v'$ und $g = \mathbb{1}$;
weil $\mathcal{S}_V$ fixpktfrei wirkt und $Cay(G, S)$
keine Doppelkanten hat, da S kein
Element der Ordnung 2 besitzt.

Ist 2. $gv = v'$ so ist $gv' = v$ womit gilt:

$v = gv' = g(vs) = (gv)s = v's = v \cdot s^2$.

$\Rightarrow s^2 = 1$ da $\mathcal{S}_V$ fixpktfrei ist. $\lightning$

Somit ist $\mathcal{S}_E$ inversionsfrei und Beh. folgt. $\square$