Vorlesung

# Geometrische Gruppentheorie

Winter 24/25, Heidelberg

Prof. Dr. Petra Schwer

Zeit: VL Di & Fr 9-11 SR B
Ü Mo 9-11 startet 2. Woche

Literatur:
- Clara Löh: Geom. grp thry
- Office hours with a geometric group theorist

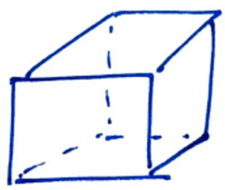
⇝ weitere siehe Webseite

# I Gruppen und Räume

## 1. Gruppen als Symmetrien von Objekten

<u>Bsp. 1.1</u> Symmetrien eines Würfels

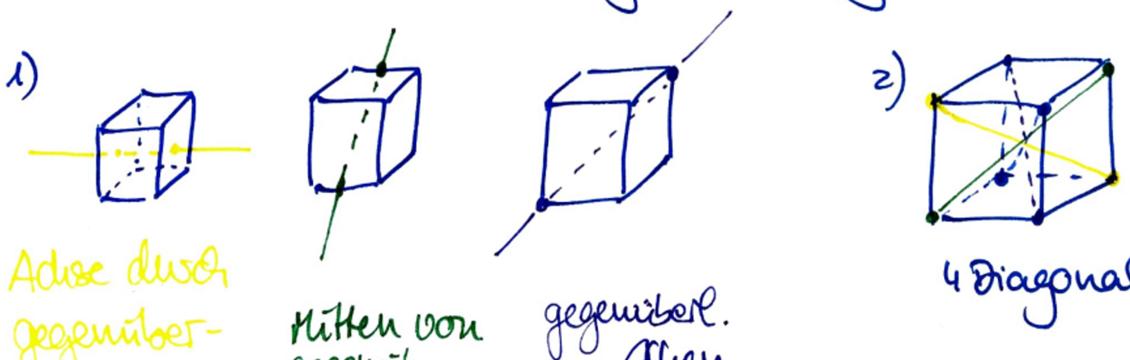
→ Was ist eine Symmetrie? – orientierungserhaltend
– orientierungsumkehrend



„<u>Def.</u>" Eine <u>orientierungserhaltende Symmetrie</u> ist eine Bewegung des Würfels (Hochheben oder Drehen) des Würfels die diesen deckungsgleich wieder ablegt.

Es gibt 3 Arten von Symmetrieachsen. (s.u.)

Wie viele Symmetrien gibt es insgesamt?




Achse durch gegenüberliegende Mitten | Mitten von gegenüb. Seiten | gegenüberl. Ecken | 4 Diagonalen

Rotieren um $k\cdot\pi/2$ um $k\cdot\pi$ um $\frac{2\pi}{3}k$

1. Zählweise:

- Jede Ecke kann 8 Plätze einnehmen
- ist eine Ecke fest können wir die 3 Nachbarn der Ecke noch vertauschen

$\Rightarrow$ 24 Symmetrien

2. Zählweise:

- Jede Symmetrie vertauscht die 4 Diagonalen des Würfels
  " Verbindungen gegenüberl. Ecken
- Jede Vertauschung von Diagonalen liefert eine eindeutige Symmetrie des Würfels

$\Rightarrow$ orientierungserh. Symmetrien des Würfels $\hat{=}$ Permutationen der 4 Diagonalen

$\Rightarrow$ $4! = 24$ Symmetrien    ↑ sind 4! Stück

Ziel: Wir werden sehen, dass jede Gruppe Symmetriegruppe eines geometrischen Objektes ist.

## 1.2 Folgendes wird vorausgesetzt:

- gute Kenntnisse über Gruppen, Homom., Isomorph.,
- Automorphismen eines mathem. Objektes:

  z.B. $X$ top. Raum, $\mathrm{Aut}(X) =$ Homöom. von $X$

  $X$ $\mathbb{K}$-VR, $\mathrm{Aut}(X) = GL(\mathbb{K}^n) = GL_n(\mathbb{K})$

  $X$ metr. Raum, $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Isom}(X)$

  $X$ Menge, endl. $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Sym}(\{1,\dots,n\})$ wenn $n := |X|$

"generisches Bsp."

## 1.3 Satz von Cayley

Jede Gruppe ist UG einer symmetrischen Gruppe.

nicht unbedingt endlich.

**Beweis:**

Sei $G$ eine beliebige Gruppe.

Sei $S := \mathrm{Sym}(G)$, wobei $G$ als Menge aufgefasst wird.

Definiere eine Abb.

$\varphi: G \longrightarrow S$ durch $a \longmapsto P_a$

Definiere [illegible]

$$\varphi : G \to S \text{ durch } g \mapsto f_g$$

mit $f_g(x) := g \cdot x$ für alle $x \in G$.

Dann gilt $\forall g, h \in G$, dass

$$f_g \circ f_h = f_{g \cdot h} . \quad \text{(s.u.)} \ (*)$$

Somit ist $f_g$ Bijektion für jedes $g \in G$.
Die inverse Abb. zu $f_g$ ist $f_{g^{-1}}$.
Das neutrale Element in $S$ ist die Identitätsabb. auf $G$, die durch das neutrale Element $\mathbb{1}_G \in G$ induziert wird. $\square$

(*) $\varphi(gh) = f_{gh}$ - somit

$$\begin{aligned} \varphi(gh)(x) &= f_{gh}(x) = (gh).x \\ &= g.(h.x) = g.(f_h(x)) \\ &= f_g(f_h(x)) = (f_g \circ f_h)(x). \end{aligned}$$

## 1.4 Erzeugendensysteme

Um alle Elemente einer (unendlichen) Gruppe zu beschreiben reichen manchmal endlich viele Elemente und deren Verknüpfung:

- $S_n$ wird erzeugt von $\{(1,2), (2,3), (3,4), \ldots, (n-1,n)\}$ oder auch von $\{(1,2), (1,n)\}$
- $(\mathbb{Z},+)$ wird erzeugt von $\{1\}$ oder $\{2,3\}$
- $\emptyset$ erzeugt die triviale Gruppe

__Def.__ $G$ Gruppe, $S \subset G$ Teilmenge.

Wir schreiben $\langle S \rangle$ für die kleinste Untergruppe von $G$, die $S$ enthält und nennen $\langle S \rangle$ <u>die von $S$ erzeugte UG.</u>

Die Menge $S$ ist ein <u>Erzeugendensystem</u> von $G$, wenn $G = \langle S \rangle$.

$G$ ist <u>endlich erzeugt</u>, wenn $S \subset G$ existiert mit $|S| < \infty$ und $|S| = G$.

__Bsp.__ $(\mathbb{Z},+)$ ist endlich erzeugt

$(\mathbb{Q},+)$ ist <u>nicht</u> endl. erzeugt

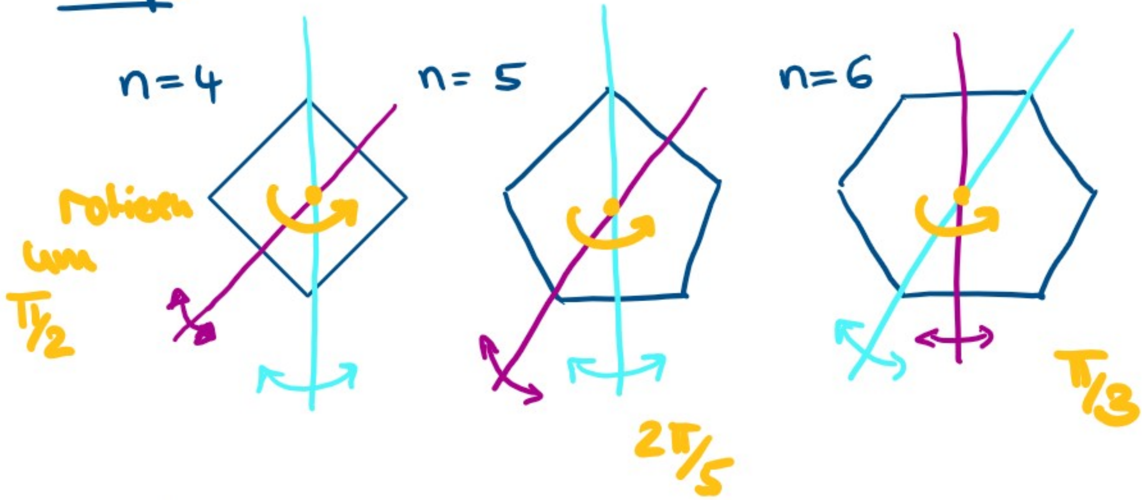
## 1.5 Diedergruppen

Für alle $n \geq 3$ definieren wir die **Diedergruppen $D_n$** durch

$$D_n := \text{Sym}(\text{reguläres } n\text{-Eck})$$
$$= \{ \underset{\text{Isometrie}}{f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2} \mid f \text{ bildet die Eckenmenge eines regulären } n\text{-Ecks } P_n \text{ auf sich selbst ab} \}$$

Die Diedergruppe $|D_n|$ hat $2n$ Elemente.

Bsp.




## 1.6 Lemma

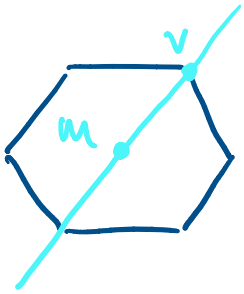
$\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ ist $D_n$ erzeugt von zwei Elementen.

### Beweis

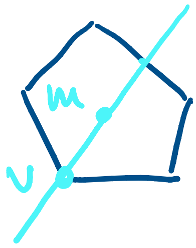
Sei $P_n$ ein reguläres $n$-gon mit Mitte $m$.
Eine Diagonale in $P_n$ ist eine Gerade

Eine Diagonale in $P_n$ ist eine Gerade

durch $m$ und eine $\underset{v}{\text{Ecke}}$ von $P_n$.




bzw.




Diagonalen

Sei $S_v$ die Spiegelung an der Diagonalen durch $m$ und Ecke $v$.

Sei $\rho$ Rotation um $m$ mit Winkel $\frac{2\pi}{n}$.

<u>Beh.</u> $\{S_v, \rho\}$ erzeugen $D_n$.
$\uparrow$ eine feste Spiegelung.

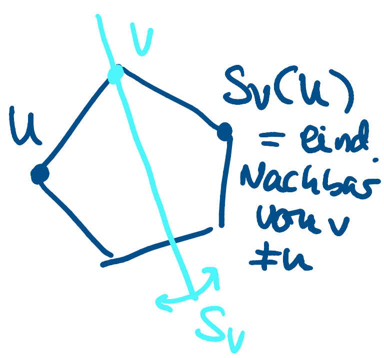
Sei $f \in D_n$ gegeben. Dann bildet $f$ die Ecke $v$ auf eine andere Ecke $f(v)$ ab.

Dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $f(v) = \rho^k(v)$.

Sei $u$ Nachbar von $v$ in $P_n$. $\quad \underbrace{\rho \circ \rho \circ \ldots \circ \rho}_{k\text{-mal}}$

<u>1. Fall:</u> $\rho^k(u) = f(u)$

Dann ist $f = \rho^k$, weil $f \circ \rho^{-1}$ das n-Eck fixiert.




<u>2. Fall:</u> $\rho^k(u) \neq f(u)$

Dann ist $\rho^k \circ \underbrace{S_v(v)}_{=v} = f(v)$ und

Dann ist $\rho^k \circ \underbrace{s_v(v)}_{=v} = f(v)$ und

$\rho^k \circ \underbrace{s_v(u)}_{\neq u} = f(u)$ und somit $f = \rho^k \circ s_v$.

$\Rightarrow D_n = \langle \{ s_v, \rho \} \rangle$. $\square$

## 1.7 Neue Gruppen aus alten

### a) Faktorgruppen

$N$ normale UG in $G$, dann ist die Menge aller Nebenklassen $g^N$ von $N$ in $G$ eine Gruppe, notiert mit $G/N$.

universelle Eigenschaft:

$N \triangleleft G$, dann hat $G/N$ bzgl. $\pi: G \to G/N$, $g \mapsto g^N$ folgende univ. Eigenschaft:

$\forall$ Gruppen $H$ und $\forall$ Homom. $\varphi: G \to H$ mit $N \subset \ker(\varphi)$ gilt:

$\exists!$ Homom. $\bar{\varphi}: G/N \to H$ mit $\varphi \circ \pi = \bar{\varphi}$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\exists!\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Bsp. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit Addition modulo $n$

### b) Erweiterungen:

$Q, N$ Gruppen, eine exakte Sequenz der folgenden Form heißt Erweiterung von $Q$ durch $N$:

folgenden Form heißt Erweiterung von $Q$ durch $N$:

$$1 \longrightarrow N \overset{\iota}{\hookrightarrow} G \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q \longrightarrow 1$$

Bsp. siehe c) und d)

c) <u>direkte Produkte</u>

$I$ eine Indexmenge, $(G_i)_{i\in I}$ Familie von Gruppen. Das direkte Produkt $\prod_{i\in I} G_i$ ist die Gruppe, die als Grundmenge das kartesische Produkt der $G_i$ hat und als Verknüpfung die Abbildung

$$((g_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I}) \longmapsto (g_i \cdot h_i)_{i\in I}.$$

<u>Bem</u>: Das direkte Produkt zweier Gruppen ist eine Erweiterung (siehe b) des zweiten Faktors durch den ersten. Nicht jede Erweiterung ist direktes Produkt.

d) <u>semidirekte Produkte</u>

$N, Q$ Gruppen, $\varphi: Q \to \mathrm{Aut}(N)$ Homom. Das semidirekte Produkt von $Q$ mit $N$ bzgl $\varphi$ ist die Gruppe $N \rtimes_\varphi Q$

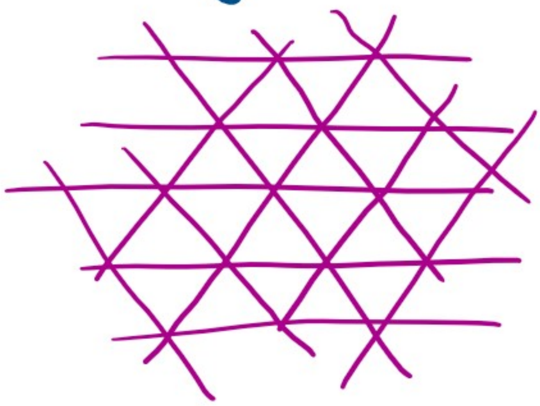
N bzgl $\varphi$ ist die Gruppe $N \rtimes_\varphi Q$
mit Grundmenge $N \times Q$ und Verknüpfung

$$((n,p),(m,q)) \longmapsto (n\underbrace{\varphi(p)}_{\in \mathrm{Aut}(N)}(m),\ p\cdot q)$$

Bsp. Diedergruppen lassen sich als semidirekte Produkte schreiben

ÜA: 1) Spaltet eine Erweiterung von G durch N
(d.h. $\exists\ s: Q \to G$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}_Q$)
so ist G semidirektes Produkt von Q mit N

2)* Betrachte die Gruppe W, die von allen Spiegelungen an den Geraden in folgender Skizze erzeugt wird:



Parkettierung des $\mathbb{R}^2$ mit gleichseitigen Dreiecken.

Es gilt:

$W \cong W_0 \rtimes_\varphi T$

wobei $W_0 \cong \mathrm{Sym}\{1,2,3\}$

wobei $W_0 \cong \mathrm{Sym}\{1,2,3\}$

und $T \cong \mathbb{Z}^2$.

Was ist $\varphi$ ?

(* schwierig)