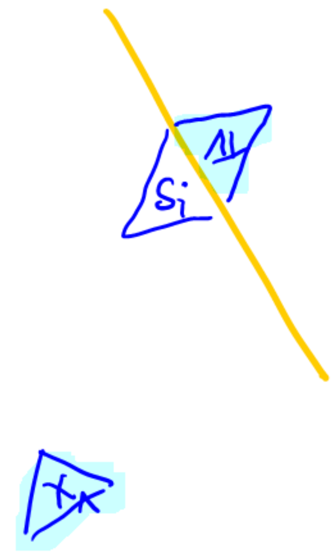
Guten morgen!

Wiederholung von gestern:

Thm 2: (W,S) Coxetersystem, $S=\{s_i \mid i\in I\}$
$\mathcal{C}$ Kammerkomplex über I mit
W-wertiger Abstandsfkt δ
und jedes Panel hat mind 2 Kammern,
$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ ist ein Gebäude.

Prop. 9.12 $\mathcal{C}$, (W,S), I, δ wie in den Vor. zu Thm 2.
Sei $X \subseteq W$ und $\alpha: X \to \mathcal{C}$ eine W-isom. Einbettung, dann erweitert α zu einer W-isom. Einbettung von $W \to \mathcal{C}$.

<u>Fall 2</u>: $\exists\, x_1 \in X$ s.d. $\ell(s_i x) < \ell(x_1)$



von $\alpha(1)$ startend
Galerie vom Typ $s_i s_{i_2} \dots s_{i_k} =: f$ in $\mathcal{C}$

2. Kammer auf dieser Galerie, genannt y, definiere als Bild von s_i, $\alpha(s_i) := y$

noch z.z. $\forall\, x \in X: \delta(y, \alpha(x)) = s_i x$

Setze $\beta(x) := s_i \cdot \delta(y, \alpha(x))$ [fest; $y = \alpha(s_i)$]

Weil $y \sim_i \alpha(1)$ gilt:

$\delta(y, \alpha(x)) = s_i x$ oder $= x$

weil $\delta(\alpha(1), \alpha(x)) = 1^{-1} \cdot x = x$

Also gilt $\beta(x) \in \{x, s_i x\}$.

Als Abbildung von X nach W ist β die Verkettung von 3 Abbildungen:

α, $\delta(y, -)$, Linksmult. mit s_i

erhalten Abstände

vergrößert Abstände nicht, weil Nachbarsch. erhält

Insgesamt ist ρ also Abstands-nicht-vergrößernd, insbes.

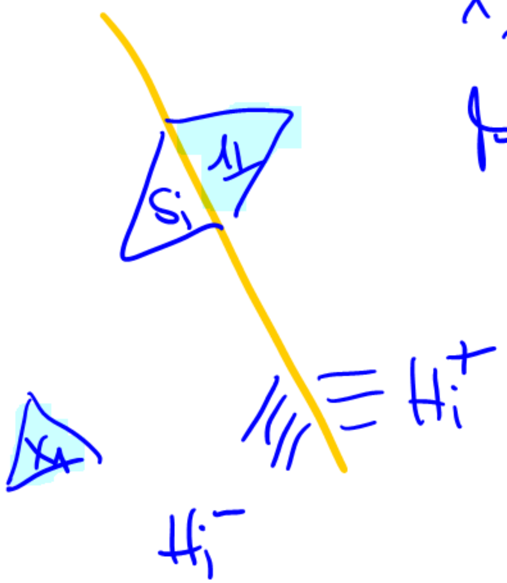
$$\rho(\mathbb{1}) = s_i \cdot \delta(y, \alpha(\mathbb{1})) = s_i^2 = \mathbb{1}$$

und

$$\rho(x_1) = s_i \cdot \delta(y, \alpha(x_1)) = x_1$$

Case 2

Sei H_i^+ Halbapartment von W das $\mathbb{1}$ aber nicht s_i enthält. Dann ist x_1 in H_i^- und für $x \in H_i^-$ $\rho(x) \neq s_i x$ sonst ρ den Abst. zwischen $\mathbb{1}$ und x vergrößert



Also liegt jedes $s_i x$ liegt auf der anderen Seite der Wand

$\Downarrow$ ρ vergrößert Abst. nicht.

$\Rightarrow$ ρ muss Inklusionsabb. sein weil $\rho(x) \neq s_i x$ impliziert, dass $\rho(x) = x \;\forall x$

$\square$ case 2

Prop. $\square$

Mit Prop. können wir Kopien von W W-isom. in $\mathcal{C}$ einbetten.

Es gelten Ann aus Theorem 2.

Wir konstruieren zunächst einen Simplizialkomplex X via

$$X := \bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} \Sigma_A \Big/ \text{verkleben} \atop \text{„vererbt von } \mathcal{C}\text{"}$$

d.h. $\mathcal{A} = \{$ W-isom. Einbettgn von W nach $\mathcal{C}$ $\}$

$\Sigma_A \cong$ Coxeterkomplex von (W, S)

$\Sigma_A, \Sigma_{A'}$ wobei $A \cap A' \neq \emptyset$ werden in X wie folgt verklebt:
Identifiziere/verklebe die maximalen Simplizes in Σ_A farberhaltend mit den maximalen Simplizes in $\Sigma_{A'}$ wobei Kammern $c \in \Sigma_A$ mit d in $\Sigma_{A'}$ verklebt wird wenn $c = d$ in $\mathcal{C}$.

X hat als dualen Graphen (eine Ecke je max Simplex und Kante wenn gemeinsame codim 1 Seite vorliegt) genau den Kammergraphen über $\mathcal{C}$.

Wir wechseln jetzt im weiteren Verlauf zwischen $\mathcal{C}$ und X hin und her.

↑ simpl. Betrachtung
Sichtweise als Graph/Kammers.

Zz. (B0) - (B2) der Gebäudeaxiome.

(B0): Nach Konstruktion ist (mit Prop. 9.12) der Komplex X' (bzw $\mathcal{C}$) Vereinigung von Apartments (bzw $\mathcal{C}$ Vereinig von W-isom. Einbettungen von W).

(B1): Seien c und d zwei Kammern mit Abstand $w = \delta(c,d)$.

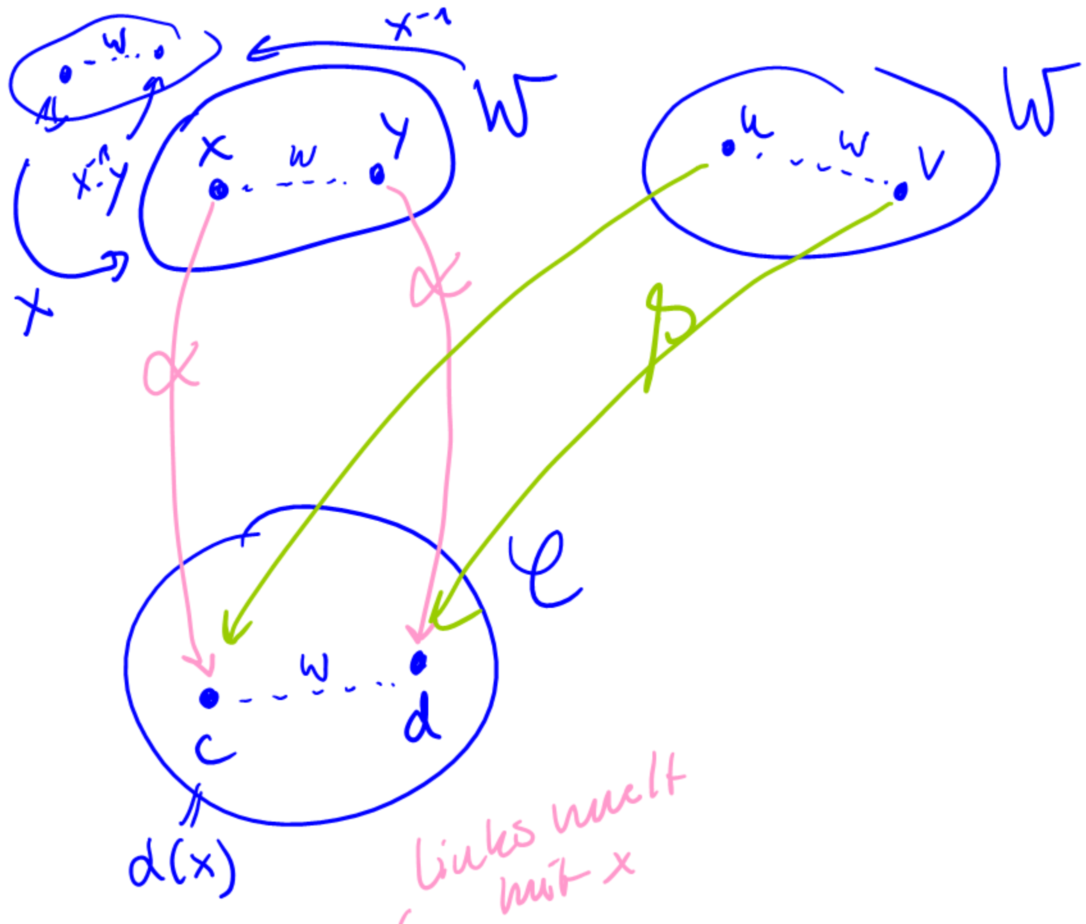
Wir nehmen $Y := \{1, w\}$ und definieren $\alpha : Y \to \mathcal{C} : \begin{array}{l} 1 \longmapsto c \\ w \longmapsto d \end{array}$.

Das ist eine W-isometrische Einbettung von Y nach $\mathcal{C}$, denn $\delta(1,w) = 1^{-1} \cdot w = w = \delta(c,d)$.

Prop. 9.12 erlaubt uns α auf W zu erweitern. Das Bild der Erweiterung ist das gesuchte Apmt.

(B2): Ann $\alpha : W \to \mathcal{C}$ und $\beta : W \to \mathcal{C}$ seien W-isom. Einbettung s.d. $A := \mathrm{im}(\alpha)$ und $B := \mathrm{im}(\beta)$ beide Kammern c, d enthalten.

Verketten von α und β mit jeweils einem Element in W erlaubt uns anzunehmen, dass $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = c$ und $\tilde{\alpha}(w) = \tilde{\beta}(w) = d$, wobei $w = \delta(c,d)$.



$$\tilde{\alpha} := \alpha \circ L_x$$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}(\mathbb{1}) &= \alpha(L_x(\mathbb{1}))\\ &= \alpha(x \cdot \mathbb{1})\\ &= \alpha(x) = c\end{aligned}$$

Analog für β mit u statt x

Dann gilt:

$$\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha}^{-1} : A \longrightarrow B$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}^{-1}"', "\cong"] & & B \\ & W \arrow[ur, "\cong", "\tilde{\beta}"'] & \end{tikzcd}$$

ist W-isometrische Abb.

Dann ist $\tilde{\beta} \circ \tilde{\alpha}^{-1}$ die gesuchte Abbildung $\square$

10 Gebäude assoziiert zu BN-Paaren

10.1 Def. Sei G eine Gruppe mit BN-paar, definiere für alle $i \in I$

$$P_i := B \sqcup Bs_iB$$

10.2 Lemma: P_i ist Untergruppe von G.

Beweis: Prüfe Gruppenaxiome mit (BN2):

$$\underbrace{BwB}_{=B} \cdot Bs_iB = BwBs_iB$$

$$\subseteq \underbrace{BwB}_{=B} \cup Bws_iB$$

mit $w = 1$ und $BwB = B$. $\square$

Was passiert wenn man

$$\underbrace{b_1 \cdot s_i \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot s_i \cdot b_4}_{\in B \cup Bs_iB} = \begin{cases} b_5 \\ b_5 s_i b_6 \end{cases}$$

10.3 Thm: Gebäude eines BN-paares

G Gruppe mit Ug B, N s.d. Axiome (BN0) – (BN2) erfüllt sind.
Dann gibt es ein Gebäude $\Delta = \Delta(B,N)$ vom Typ (W,S), das wie folgt konstruiert wird:

i) Setze $\mathcal{C} := \{ gB \mid g \in G \}$ als Menge der Kammern

ii) i-Nachbarschaft $c \sim_i d$ ist geg. durch: $gB \sim_i hB \Leftrightarrow g^{-1}h \in P_i$

iii) Ein W-Abstand ist gegeben durch
$\delta(gB, hB) := w$ gdw $g^{-1}h \in BwB$ $\quad \in G = \bigsqcup_{w \in W} BwB$

Das nutzt Bruhat Zerlegung!!

Wenn zusätzlich (BN3) gilt: dann ist Δ dick, d.h. jedes Panel enthält mind. 3 Kammern.

(*) Setze $C_0 := B$, $A_0 := \{ w \cdot C_0 \mid w \in W \}$
und definiere $\mathcal{A} := \{ gA_0 \mid g \in G \}$
dann ist $\mathcal{A}$ Apartmentsystem für Δ und G wirkt auf dem Gebäude mit folgenden Eigenschaften:

- transitiv auf Paaren in $\mathcal{C}$, die den gleichen W-Abst. haben
- $B = \mathrm{Stab}_G(C_0)$
- N stabilisiert das Apartment A_0

Bem 10.4 N ist möglicherweise nicht der komplette Stabilisator von A_0 in G.

Wenn gilt: $T = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$

dann heißt das BN-Paar saturiert und $N = \mathrm{Stab}_G(A_0)$.

Beweis nächste Woche!!

~~von 10.3~~

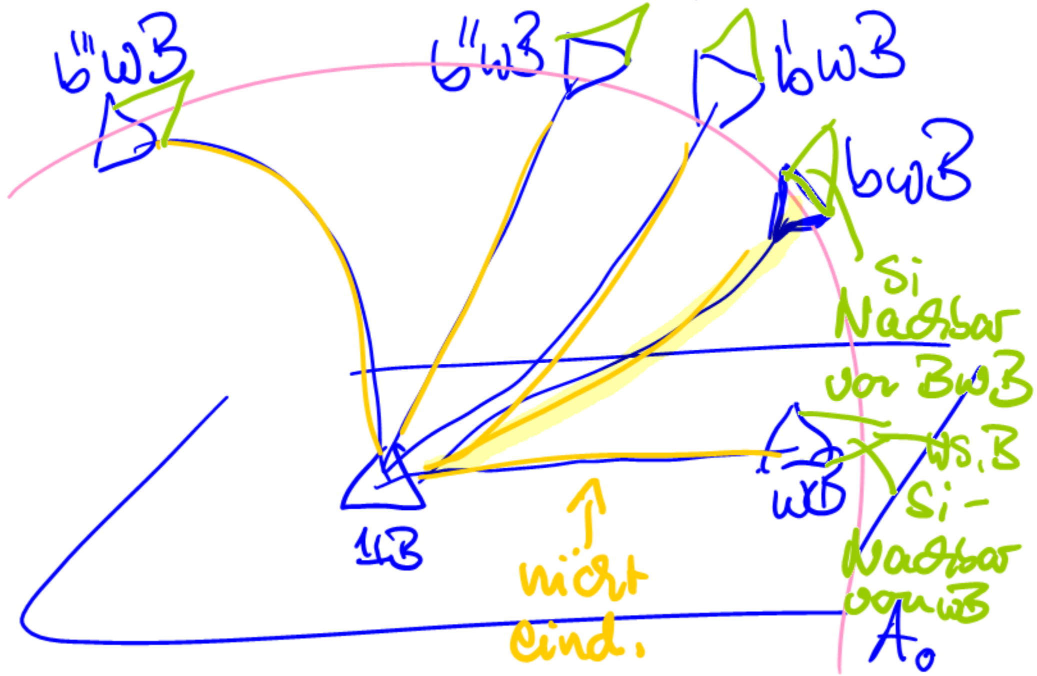
10.5. geometrische Interpretation von (BN2):

Wdh: gB, $g \in G$ Kammern in Δ

Elemente in $\mathcal{C}$

$\underbrace{BwB}_{\text{Kammern}}$ = Kammern im B-Orbit von wB ← Kammer in A_0

Repräsentiere die Kammern in BwB durch Galerien von $1B = C_0$ nach bwB



alle diese Galerien haben einen Typ $\underbrace{s_{i_1} \cdots s_{i_k}}_{\text{Wort für } w}$. nicht eind.

Haben alle W-Abst. w

$\delta(b^* wB, 1B) = w$

(BN2): $BwB \cdot \underline{Bs_iB} \subseteq BwB \cup Bws_iB$

Das sagt: Eine Galerie von $1 \cdot B$ nach $C = b^*wB \in BwB$

gefolgt von einer Galerie vom Typ s_i

(weitergehen zu einem s_i-Nachbar)

dann gibt es zwei Möglichkeiten:

Die verlängerte Galerie landet in $\underline{Bws_iB}$

oder die Galerie stottert und wir bleiben in b^*wB stehen, die zu sich selbst i-benachbart ist. $\rightsquigarrow$ in BwB