Guten morgen!

Wir zeigen heute:

<u>Thm 2:</u> (W,S) Coxetersystem, $S = \{s_i \mid i \in I\}$
$\mathcal{C}$ Kammerkomplex über I mit
W- wertiger Abstandsfkt δ
und jedes Panel hat mind 2 Kammern,
$\Longrightarrow$ $\mathcal{C}$ ist ein Gebäude.

Lemma $9.10\frac{1}{2}$

Unter den Vor in Thm 2 gilt:

mit Def δ

(i) $\delta(x,y) = s_i \iff x \neq y$ und $x \sim_i y$
$x,y \in \mathcal{C}$

(ii) es ist nicht möglich, dass $x \neq y$ und $x \sim_i y$ und $x \sim_j y$ für $i \neq j$.

muss nicht reduziert sein

(iii) wenn es eine Galerie vom Typ $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ zwischen x und y gibt und das Wort $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ durch Zopfbewegungen in das Wort $s'_{i_1} \cdots s_{i_k}$ deformiert werden kann, dann gibt es auch eine Galerie vom Typ $s'_{i_1} \cdots s'_{i_k}$ von x nach y

z.B. $s_i s_j s_i = s_j s_i s_j$ wenn $(s_i s_j)^3 = 1$

(iv) Eine Galerie vom Typ $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ ist minimal $\iff s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ reduziert ist.

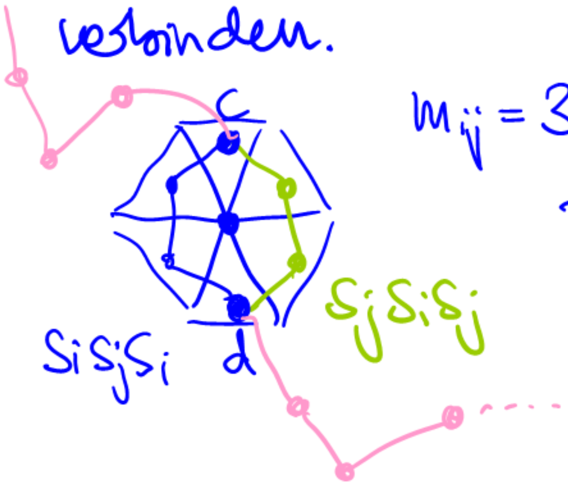
(v) Gegeben ein reduziertes Wort $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ und eine Galerie von x nach y von diesem Typ, dann ist dies die einzige Galerie von x nach y von diesem Typ.

Beweis

(iii) Zopfbewegung findet statt auf Teilwort der Form $\underbrace{s_i s_j \cdots\cdots}_{m_{ij}} =: w$

Dieses Teilwort und das Wort $\underbrace{s_j s_i \cdots}_{m_{ij}} =: w$ sind reduziert und sie geben das gleiche Element in W.

Nach Def von δ muss für beide reduzierten Wörter eine (Teil-)galerie existieren, die die selben Kammern verbinden.



$m_{ij} = 3$

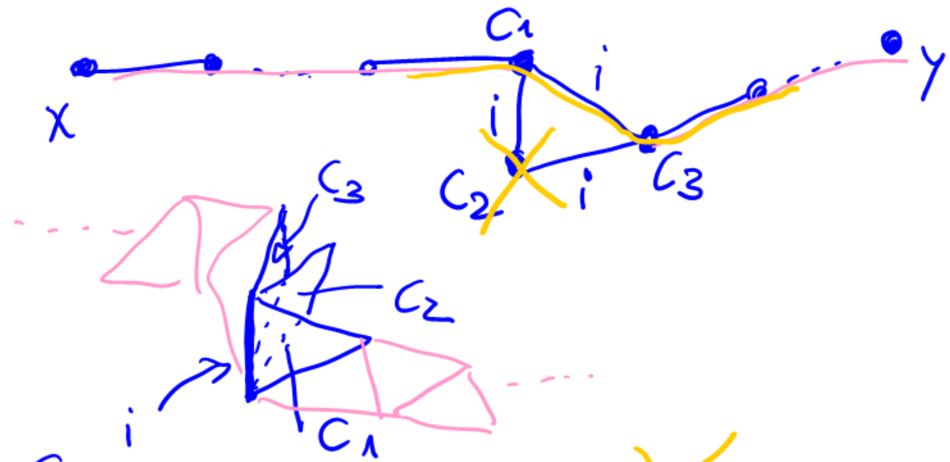
Bild im Coxeterkplx

(iv) Ann. $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ nicht reduziert.

Mit Zopfbewegungen können wir das Wort so deformieren, dass irgendwo ein Teilwort der Form $s_i \cdot s_i$ entsteht.

Dazu gehören folgende geometrische Situationen:

1)



2)

In beiden Fällen können wir die Galerie kürzen und die Startgalerie ist nicht minimal.

$\neg$ reduziert $\Rightarrow \neg$ minimal d.h.

min $\Rightarrow$ red.

Ann: Sei γ nicht minimale Galerie von x nach y vom Typ $f := s_{i_1} \cdots s_{i_k}$.

Sei $g = s'_{i_1} \cdots s'_{i_l}$ Typ einer minimalen Galerie γ', dann ist g reduziert (s.o.) $(l < k)$

Ist f auch reduziert, dann gilt

$$[f] = \delta(x,y) = [g]$$

das durch definierte Element in W

Dann kann f zu g deformiert werden durch Zopfbewegungen $s_i s_j \cdots \leftrightarrow s_j s_i \cdots$

$\lightning$ $l < k$ Zopfbewegungen erhalten Länge

(V) Fixiere einen Typ $f = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ und $x, y \in \mathcal{C}$. Dann gibt es höchstens eine Galerie vom Typ f zwischen x und y.

Seien $\gamma_1 = (x, \dots, y_1, y)$ und
$\gamma_2 = (x, \dots, y_2, y)$ zwei
verschiedene Galerien vom Typ $f' \cdot s_i$ für $i \in I$ und $f' \cdot s_i = f$. d.h. $s_{i_k} = s_i$

Dann gilt: $y_1 \sim_i y \sim_i y_2$ also $\underline{y_1 \sim_i y_2}$

Wenn $y_1 \neq y_2$ dann haben wir 2 Galerien von x nach y_2
$\rightarrow$ gekürzte γ_2 vom Typ f'
$\rightarrow$ $(\underbrace{x, \dots, y_1}_{\text{Teilgalerie von } \gamma_1, \text{ Typ } f'}, y_2)$ vom Typ $f = f' \cdot s_i$ $\lightning$

$f \neq f'$ $\rightsquigarrow$ $[f] \neq [f']$
↑ reduziert

Wir erhalten also $y_1 = y_2$.

Rückwärtsinduktion über Länge $\rightsquigarrow$ kürze γ_1 und γ_2 um letzte Kammer y

Wiederhole Argument mit f' und gekürzten Galerien. $\square$

9.11 Def. $\mathcal{C}$ Kammersystem mit W-wertigen Abst. δ, sei $X \subset W$ (Cox. gr.) und $\alpha : X \to \mathcal{C}$.

Dieses α ist <u>W-isometrische Einbettung</u> wenn $\forall x, y \in X$

$$\delta(\alpha(x), \alpha(y)) = x^{-1}y = \delta_W(x,y)$$

Ein <u>Apartment</u> in $\mathcal{C}$ ist das Bild von W unter einer W-isometrischen Einbettung.

Schreibe $\mathcal{A}$ für die Familie aller Apartments in $\mathcal{C}$.

Prop. 9.12 $\mathcal{C}$, (W,S), I, δ wie in den Vor zu Thm 2.

Sei $X \subseteq W$ und $\alpha : X \to \mathcal{C}$ eine W-isom. Einbettung, dann erweitert α zu einer W-isom. Einbettung von $W \to \mathcal{C}$.

<u>Beweis:</u>

poset in dem jede Kette eine obere Schranke hat dann gibt es ein max. Elt.

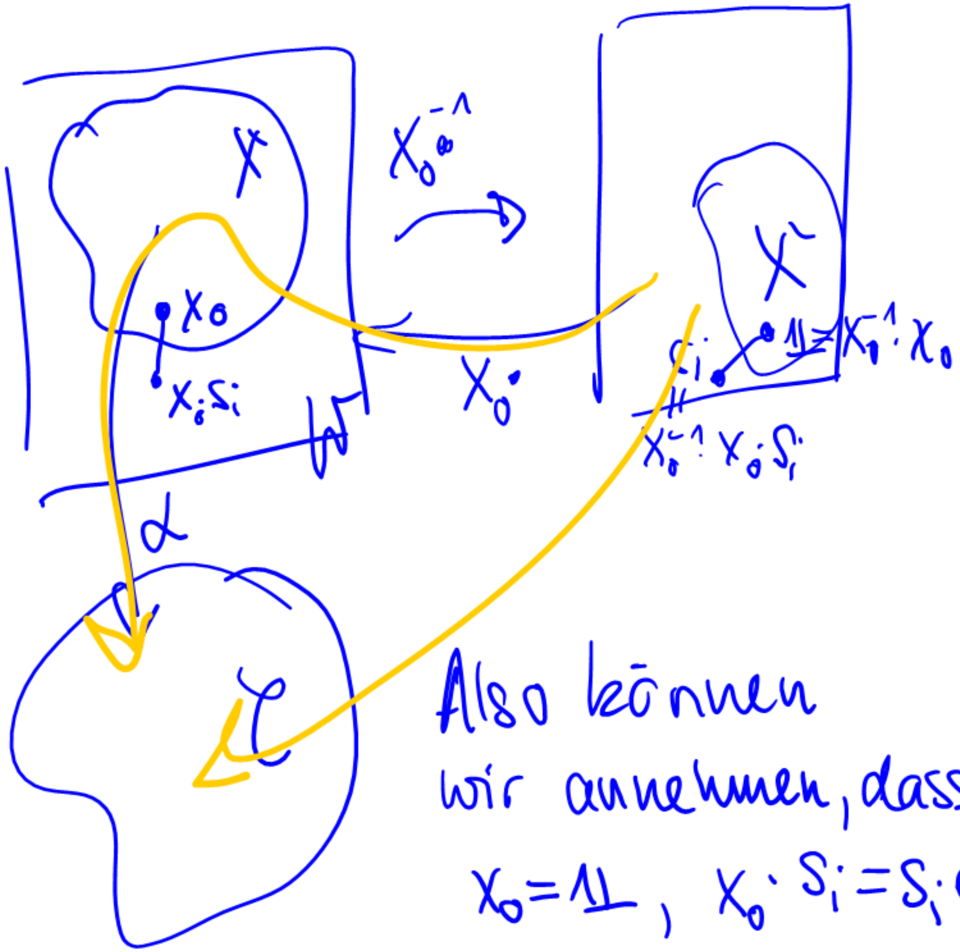
Mit $\boxed{\text{Zorns Lemma}}$ reicht es zu zeigen, dass α auf eine echt größere Teilmenge erweitert.

- Ist $X = \emptyset$ dann wähle $X' = \{c\} \supsetneq X$ und definiere bel. Abb. $\alpha : X' \to \mathcal{C}$
- $X = W$ nichts zu erweitern

Sei also $\emptyset \subsetneq X \subsetneq W$. Dann gibt es $x_0 \in X$ und $s_i \in S$ s.d. $x_0 s_i \notin X$

$x_0 \in X'$, $x_0 s_i \notin X'$

Wir verknüpfen α mit der vorgeschalteten Linksmultiplikation mit x_0^{-1}



Also können wir annehmen, dass

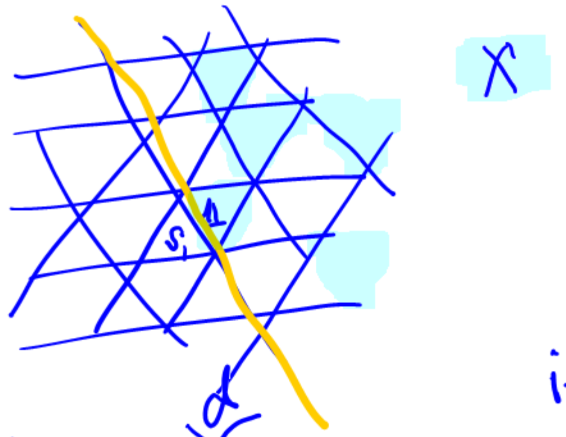
$x_0 = 1$, $x_0 \cdot s_i = s_i \notin X'$

Wir erweitern zu einer Abb.

$X' \cup \{s_i\} \to \mathcal{C}$

Fall 1: $\ell(s_i \cdot x) > \ell(x) \ \forall x \in X'$

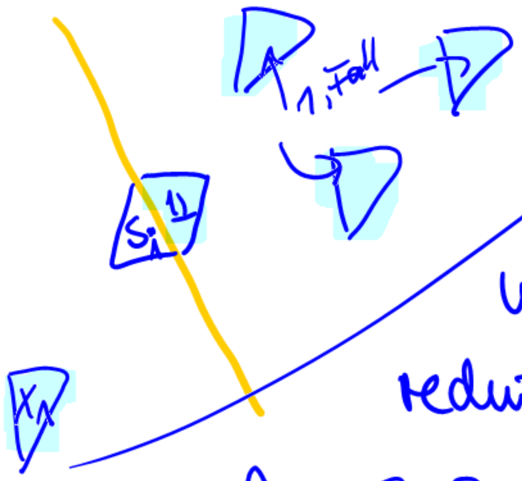
Das bedeutet, dass X' komplett auf einer der Seiten liegt der trennenden Wand zwischen 1 und s_i



Weil jedes Panel in $\mathcal{C}$ zwei Elemente hat gibt es eine i-benachbarte Kammer zu $\alpha(1)$ in $\mathcal{C}$ und wir definieren $\alpha(s_i) = d \neq \alpha(1)$.

noch z.z. diese Erweiterung ist eine W-isom. Einbettung.

2. Fall $\exists\, x_1 \in X$ s.th. $\ell(s_i x_1) < \ell(x_1)$



Mit Austausch-bedingung können wir sehen, dass es ein reduziertes Wort gibt:

$f = s_i s_{i_2} \dots s_{i_k}$ und $[f] = x_1$

startet mit s_i

Weil $x_1 = 1^{-1} \cdot x_1 = \delta(x_1, 1)$ auch eine Galerie in $\mathcal{C}$ vom Typ f von $\alpha(1)$ nach $\alpha(x_1)$.

Sei y die zweite Kammer in dieser Galerie, dann ist $\alpha(1) \sim_i y$.

Diese Wahl ist eindeutig wegen Lemma Teil (v) Eindeutigkeit von Galerien

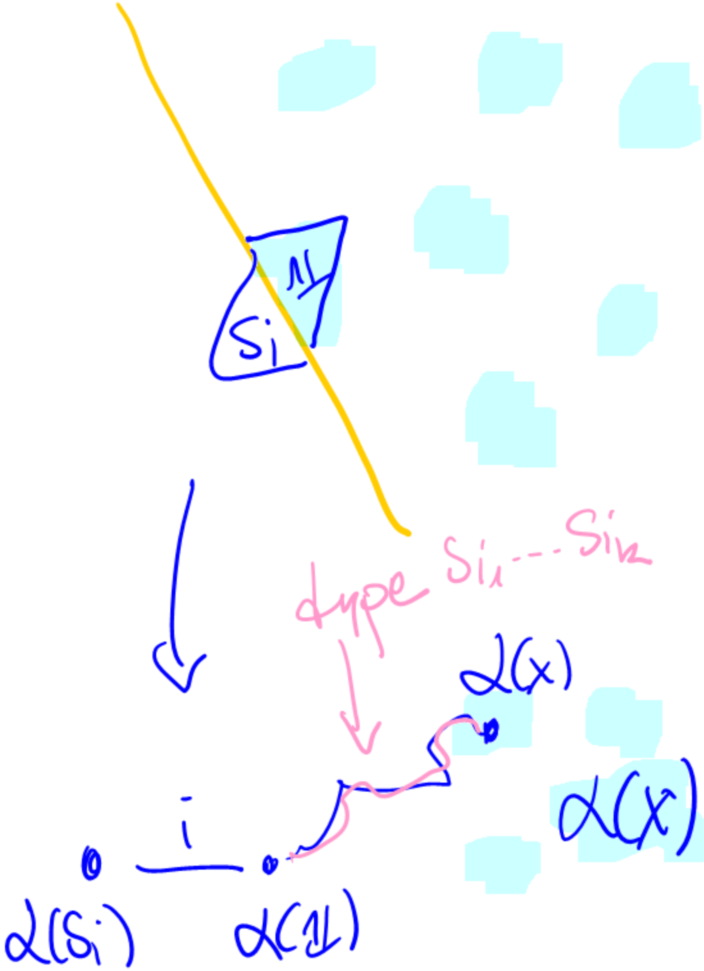
Setze $\alpha(s_i) = y$.

bleibt z.z. das so erweiterte α erhält Abstände.

zu Fall 1 z.z. $\delta(\alpha(s_i), \alpha(x)) = s_i^{-1} x = s_i x$ $\forall x \in X$

wir wissen in W: $\delta(s_i, x) = s_i x$

Sei $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ ein reduziertes Wort für ein (bel. aber festes) $x \in X$. Dann gibt es eine Galerie $\alpha(1) \rightsquigarrow \alpha(x)$ vom Typ $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ und somit auch eine Galerie vom Typ $s_i \cdot s_{i_1} \dots s_{i_k}$ von $\alpha(s_i)$ nach $\alpha(x)$.



Weil $\ell(s_i x) > \ell(x)$ ist das Wort $s_i s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ reduziertes Wort für $s_i x$ sein.

Lemma (iii) impliziert, dass die verlängerte Galerie minimal von $\alpha(s_i)$ nach $\alpha(x)$ ist.

$$\delta(\alpha(s_i), \alpha(x)) = s_i s_{i_1} \cdots s_{i_k}$$
$$= s_i x$$

$\square$ Case 1

Fehlt noch Rest von Fall 2