Guten morgen!

einen kleinen Moment bitte

Konstruktion vom SL_2-Baum

Gitter: $[\langle b_1, b_2\rangle_{\mathcal{O}}] \leftarrow$ Homothetiekl. $\qquad \mathcal{O} \cong \mathbb{Z}_p$ p prim

Graph: Ecken

Kanten: $[L]$ $[L']$ g.d.w. $\pi L \subset L' \subset L$

• Zu je zwei Gittern L, L' gibt es eine gemeinsame Basis

$$L = \langle b_1, b_2 \rangle$$

$$L' = \langle \pi^{a} b_1, \pi^{b} b_2 \rangle \rightsquigarrow d([L],[L']) = |a-b|$$

7.24

Folgerung: Nachbarn haben Abstand 1, damit sehen die Nachbarn einer Gitterklasse $[\underbrace{\langle b_1, b_2\rangle_{\mathcal{O}}}_{=L}]$ wie folgt aus:

$$[\langle b_1, \pi b_2 \rangle_{\mathcal{O}}] \text{ und } [\langle \pi b_1, x b_1 + b_2 \rangle_{\mathcal{O}}] \text{ mit } x \in \mathcal{O}/\pi\mathcal{O} = \mathbb{F}_p$$

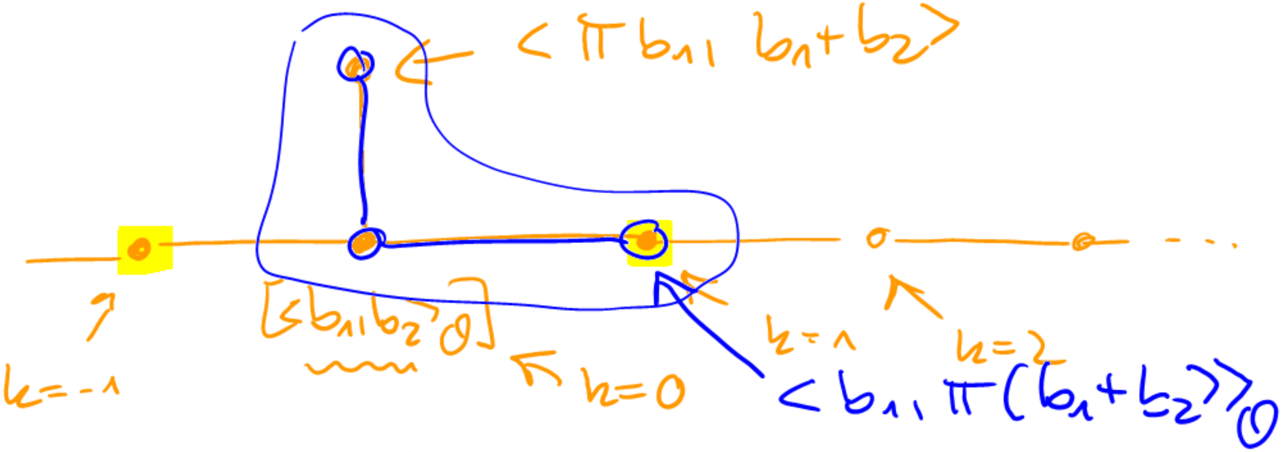
Sind insgesamt $p+1$ Nachbarn.

Bsp. $p=2$: $\mathbb{F}_2 \ni x \in \{0,1\}$

$\langle b_1, \pi b_2\rangle_{\mathcal{O}} \leftarrow k=1$

$\langle \pi b_1, b_2\rangle_{\mathcal{O}} \leftarrow k=-1$

$\langle \pi b_1, b_1+b_2\rangle_{\mathcal{O}}$



b_1, b_2 Basis $\rightsquigarrow$ Apartment $[\langle b_1, \pi^k b_2\rangle_{\mathcal{O}}]$ $k \in \mathbb{Z}$

$\langle \pi b_1, b_2\rangle_{\mathcal{O}}$ homothetisch zu $\langle b_1, \pi^{-1} b_2\rangle_{\mathcal{O}}$ mult. mit π^{-1}

Bem: $\langle \pi b_1, b_1+b_2\rangle_{\mathcal{O}} \sim \langle b_1, \pi^{-1}(b_1+b_2)\rangle_{\mathcal{O}}$

Apmt ist geg. durch $\underline{\pi b_1, b_1+b_2}$

Betrachte genauer die Wirkung von $Sl_2(\mathbb{Q}_p)$ auf dem Graphen

Std basis e_1, e_2 $\rightsquigarrow$ Ecke im Baum $\Lambda_0 = [\langle e_1, e_2\rangle_{\mathcal{O}}]$

$\rightsquigarrow$ Apunkt mit Ecken $\Lambda_m = [\langle e_1, \pi^{-m} e_2\rangle_{\mathcal{O}}]$

<u>7.25 Beobachtungen</u> $A \in Sl_2 \backslash Gl_2$ wirkt auf Ecken durch:

$$[\langle b_1, b_2\rangle_{\mathcal{O}}] \xrightarrow{A} [\langle Ab_1, Ab_2\rangle_{\mathcal{O}}]$$

a) $\forall A \in Gl_2/Sl_2$ ist das Bild eines Gitters(-klasse) wieder ein solches

b) Nachbarschaft bleibt erhalten $\rightsquigarrow$ A ist Automorphismus

c) $\forall A \in Sl_2(\mathbb{Q}_p)$ und Gitter Λ, Λ' gilt

$$d(\Lambda, \Lambda') \bmod 2 = d(A\Lambda, A\Lambda') \bmod 2$$

d) Es gibt zwei Orbiten von Ecken im Graphen X, einer enthält Λ_0 und einer Λ_1.

e) Gl_2 wirkt transitiv auf den Ecken

Def 7.26 Ketten von Gittern

Eine <u>Gitterkette</u> ist eine endliche oder halb-unendliche Folge von Gittern, die wie folgt geschachtelt sind:

$$L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_n \supset L_{n+1} \supset \dots$$

mit $L_n \supset L_{n+1} \supset \pi L_n \quad \forall n$

Eine solche Kette nennen wir <u>einfach</u> wenn es kein Backtracking gibt, d.h. wenn keine der L_i homoth. äquivalent sind. (induziertes Pfad im Graphen hat kein Backtracking)

Die Kopien von D_∞ (Apartments) liefern Beispiele.

Def. 7.27 Eine <u>Kette von Knoten</u> in X ist eine Folge von Ecken assoziiert zu einer Gitterkette.

Def. 7.28 Die <u>Standardkette</u> ist eine Gitterkette der Form:

$$\underset{\Lambda_0}{\underset{\parallel}{\overbrace{\langle e_1, e_2 \rangle}^{\text{Std basis}}_{\mathcal{O}}}} \supset \underset{\Lambda_1}{\underset{\parallel}{\overset{\cong \langle e_1, \pi^{-1} e_2 \rangle}{\langle \pi e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}}}}} \supset \underset{\Lambda_2}{\underset{\parallel}{\langle \pi^2 e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}}}} \dots \supset \underset{\Lambda_k}{\underset{\parallel}{\langle \pi^k e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}}}} \supset \dots$$

Prop. 7.29

Jede (endliche) einfache Gitterkette kann mit einem $A \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ auf die (endliche) standard-Kette abgebildet werden.

"Beweis" mit Induktion über die Länge der Kette

Sei $L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_n$ die geg. Kette mit $L_k \supset L_{k+1} \supset \pi L_k \ \forall k$

Weil $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ transitiv ist gibt es $g \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ mit

$gL_0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}} \rightsquigarrow$ oE $L_0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}}$

$n=1$ Es gibt $g \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$ das $[L_1]$ auf $[\langle \pi e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}}]$ abbildet und gleichzeitig $[L_0]$ stabilisiert.

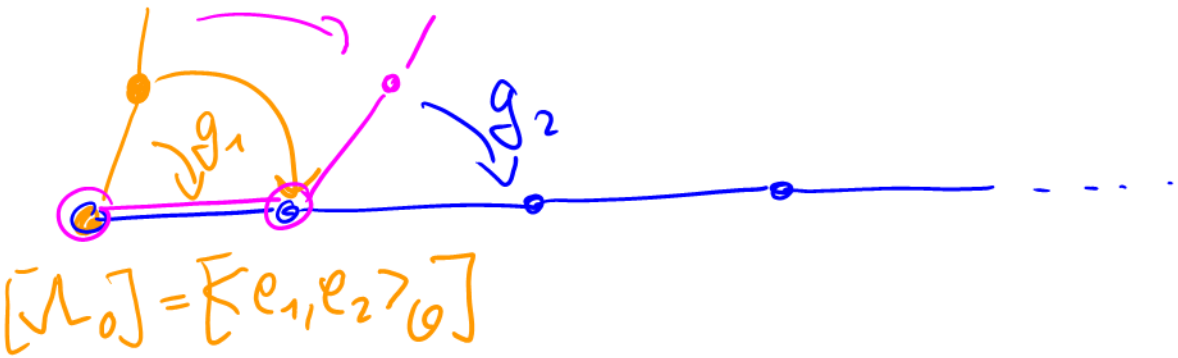
Eine solche Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Für längere Ketten (Länge $n+1$), betrachte induktiv Elemente $g_i \in GL_2(\mathbb{Q}_p)$

mit $\underbrace{g_1 \cdots g_n}$ $\in GL_2(\mathbb{Q}_p)$) das jeweils nächste g_i

bildet die Ecke $\underbrace{g_1 \cdots g_{i-1}}[L_i]$ auf die i-te Ecke

in der Standardkette ab.



sind immer Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & x_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für g_n

„$\square$“

Beweis: X ist Baum

Sei L Gitter, sei b_1, b_2 Basis von L_0 s.d. $\pi^m b_1, \pi^n b_2$ Basis für L.

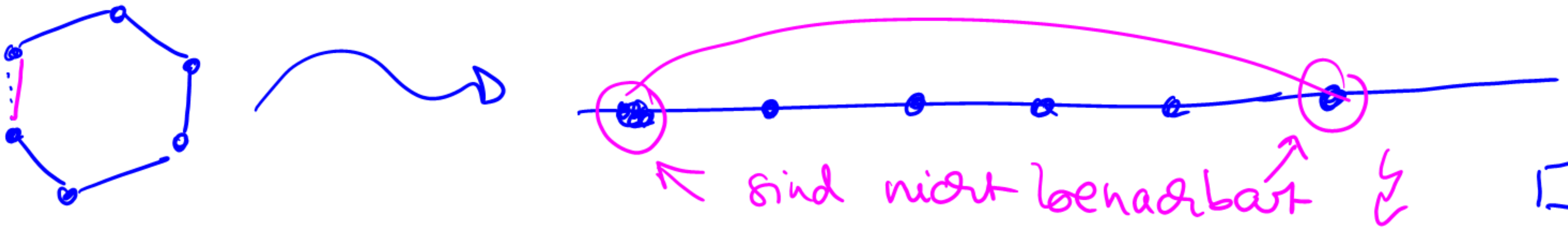
Reskaliere L zu L' s.d. L' Basis $b_1 \cdot \pi^n b_2$, $n \geq 0$

$\leadsto$ Kette von Gittern von $[L_0] = \Lambda_0$ zu $\Lambda := [L]$

zähle Parameter an b_2 von 0 bis n

$\Rightarrow$ X zusammenhängend

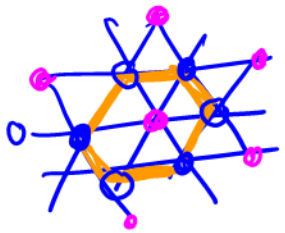
X hat keine Kreise, denn jede Kette kann zu einem Teil der Standardkette transformiert werden



$\square$

Etwas Strukturtheorie von Gebäuden:

Wdh: Der Link eines Simplexes σ in einem Kammerkomplex ist die Menge aller Simplizes τ mit $\tau \cap \sigma = \emptyset$ und $\tau \cup \sigma$ Simplex.



σ $\quad lk_X(\sigma)$

Prop. 7.30 „Links sind Gebäude"

Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W,S) mit Labeling λ.
Sei b ein Simplex in Δ. Dann gilt

$$lk_\Delta(b) \text{ ist Gebäude vom Typ } (W', S')$$

wobei $\underbrace{S'}_{\{\bullet,\circ\}} = \underline{S \setminus \underbrace{\lambda(b)}_{\text{im Bsp. „pink"}}}$, $\quad W' = \langle S' \rangle \leq W$.

Beweis z.z. Gebäude-Axiome sind für $lk_\Delta(b)$.

Sei $\mathcal{A}$ Apartmentsystem für Δ.

Jedes Apartment $A \in \mathcal{A}$ das b enthält liefert uns $\underbrace{lk_A(b)}$ als Unterkplx von $lk_\Delta(b)$.

$\rightsquigarrow$ Sammeln in $\mathcal{A}'$.

Prop. 5.20 liefert uns, dass alle Elemente in $\mathcal{A}'$ Coxeterkplxe vom Typ (W', S'). $\quad S' = S \setminus \lambda(b)$

Bleibt z.z. (B1), (B2) sind erfüllt.

Seien b', b'' Simplizes in $lk_\Delta(b)$. Betrachte $\underline{b' \cup b}$, $b'' \cup b$ in Δ und erhalte Apartment A, das beide enthält mit (A1) für Δ.

Insbes. enthält A auch b. $\rightsquigarrow$ $lk_A(b) \in \mathcal{A}'$

$\Rightarrow$ (A1) gilt auch für $lk_\Delta(b)$

Um (B2) zu zeigen gehe wie folgt vor:

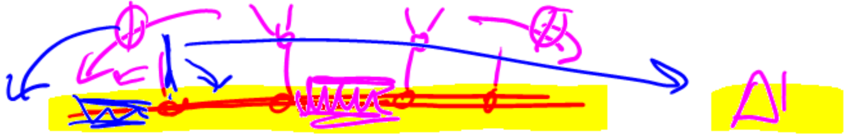
Wähle A und A', die beide $b \cup b'$ und $b \cup b''$ enthalten.
Apunkte in Δ

Mit (B2) (für Δ) einen Iso $A \xrightarrow{\phi} A'$ der den Schnitt pktw. fixiert. Insbes. sind b, b', b'' pktw. fest.

Schränke ϕ ein auf $\mathrm{lk}_A(b)$ und erhalten iso auf $\mathrm{lk}_{A'}(b)$.

Nach Konstruktion ist der Schnitt pktw. fest. $\square$

Baum = Δ



7.31

Def a) **Simpl. Abb.** $\phi : \Delta \to \Delta'$ ist eine Funktion auf den Ecken von Δ in die Ecken von Δ', die Simplizes auf Simplizes abbildet.

b) Wenn die Bilder eines Simplex immer die gleiche Dimension haben wie das Urbild, so nennen wir ϕ **nicht-degeneriert**

c) Eine **Kammerabbildung** ist eine nicht-degenerierte simpliziale Abb. zw. Kammerkomplexen der selben Dimension.

d) Ist Δ' ein Unterkomplex von Δ und $\phi : \Delta \to \Delta'$ eine Kammerabb. s.d. $\phi|_{\Delta'} = id_{\Delta'}$, dann nennen wir ϕ eine **Retraktion** und Δ' **Retrakt** von Δ

7.32 Prop.

Jedes Apartment A in einem Gebäude Δ ist Retrakt von Δ.