Guten Morgen!

es geht bald los

Wdh: Gebäude: Simpl. Kplx + Zusatzeigenschaften

- überdeckt von Apartments
- Apartments sind alle isomorph zum selben Coxeter complex $\Sigma(W,S)$

  Typ des Gebäudes ist (W,S)
  bzw. das zugehörige Diagr.
  bzw. Name $X_n^{(1)}$ aus der Liste der sphärischen & affinen Cox.gr.

- Bsp. für ein sphärisches Gebäude — Fano Ebene

  wenn der Typ (W,S) eine endliche Cox. gr. ist

heute Bsp. hierfür → affines Gebäude $\hat{=}$ (W,S) affine Cox. gr.

Ziel heute: Konstruktion eines affinen Gebäudes vom Typ D_∞

Apartments $\rightsquigarrow \Sigma \;\hat{=}$ 

$SL_n(\mathbb{K})$
$\uparrow$ nicht-archimedisch mit Bewertung

heute: $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ p-adische Zahlen

7.12 p-adische Zahlen $\quad$ p prim (-Potenz)

$K = \mathbb{Q}$ und betrachten diskrete Bewertung

$\nu_p : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Z} \qquad \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = n$

wobei n so, dass $\frac{a}{b} = p^n \cdot \frac{a'}{b'}$

a', b' teilerfremd zu p

Setze $\nu_p(0) = \infty$

Eigenschaften:

$\nu_p(x \cdot y) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$

$\nu_p(x+y) \geq \min\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$

$\forall x, y \in K$

$\rightsquigarrow$ Norm auf $\mathbb{Q}$: $\|x\|_p := p^{-\nu_p(x)}$

p-adische Zahlen := Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bezgl. dieser Norm $\|\cdot\|_p$ Notation: $\mathbb{Q}_p$

Bewertungsring $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p = \{x \in K \mid \nu_p(x) \geq 0\}$

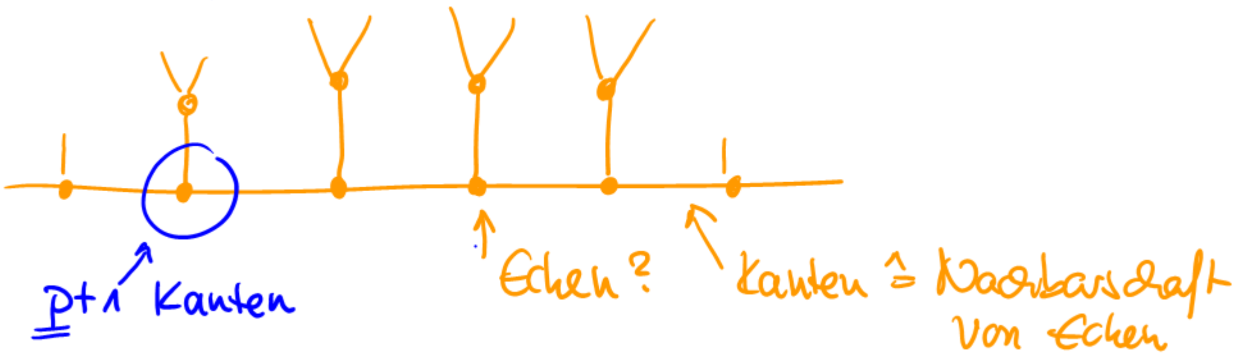
uniformisierenden Parameter $\pi = p$ def. durch $\nu_p(\pi) = 1$.

$k := \mathcal{O}/\pi\mathcal{O}$ **Residuenkörper** $(\cong \mathbb{F}_p)$

7.13 **Modell für $\mathbb{Z}_p$ / $\mathbb{Q}_p$:** $\hat{=}$

betrachte $\mathbb{Z}_p$ als Menge $\left\{ \sum_{n \geq 0} a_n p^n \,/\, a_n \in \mathbb{F}_p \right\}$
formale Reihen mit Koeff. im endl. Körper $\mathbb{F}_p$,
$\mathbb{Q}_p$ ist dann die Menge aller formaler
Brüche $\frac{s}{p^n}$ $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_p$.

$$\mathbb{Q}_p \;\hat{=}\; \left\{ \sum_{n \geq N} a_n p^n \,/\, N \in \mathbb{Z},\ a_N \neq 0,\ a_n \in \mathbb{F}_p \right\}$$



Def 7.14 Gitter(-klassen) in $\mathbb{Q}_p^2$

Ein Gitter in $\mathbb{Q}_p^2$ ist ein endl. erz. $\mathcal{O}$-Modul der $\mathbb{Q}_p^2$ erzeugt (über $\mathbb{Q}_p$)

Zwei Gitter L und L' sind homothetisch, wenn gilt: $\exists\, k \in K^* = \mathbb{Q}_p^*$ s.d.
$L' = k \cdot L$ $\rightsquigarrow$ Klasse $[L]$.

$L = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}} = \langle e_1, e_1 + e_2 \rangle_{\mathcal{O}}$

Bem 7.15

- verschiedene Basen liefern möglicherweise das selbe Gitter
- $\{b_1,b_2\}=B$, $\{b_1',b_2'\}=B'$ Basen, dann definieren diese das selbe $\mathcal{O}$-Gitter wenn es eine Matrix A in $SL_2(\mathbb{Z}_p)$ gibt s.d. $B'=A\cdot B$

Gitterklassen werden die Ecken im Baum sein!

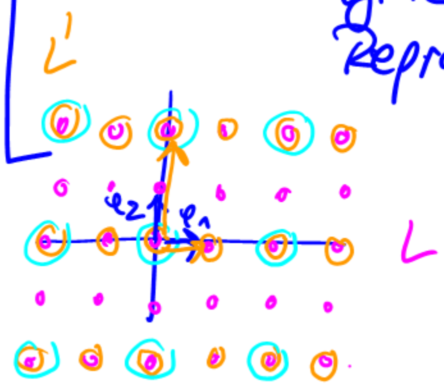
<u>Def 7.16</u> (der $SL_2(\mathbb{Q}_p)$-Baum) noch z.z.

Fixiere p und definiere einen Graphen T_{p+1} wie folgt:

Ecken $\hat{=}$ Gitterklassen $[L]$ von $\mathcal{O}$-Gittern

keine Schleifen

Kanten: es gibt eine Kante zwischen zwei verschiedenen Gitterklassen $[L]$ und $[L']$ g.d.w. es Repräsentanten L von $[L]$ und L' von $[L']$ s.d.



$$\underbrace{\pi L \subset L'}_{2L \subset L'} \subset L \qquad L' \subset L$$

$L' = \langle e_1, 2^1 \cdot e_2\rangle_{\mathbb{Z}}$ $\quad L = \langle e_1, 2^0 \cdot e_2\rangle_{\mathbb{Z}}$

versch. Klassen

türkis hat selbe Klasse wie pink

Beobachtung 7.17

$SL_2(\mathbb{Q}_p)$ wirkt auf dem Graph T_{p+1} wie folgt:

Λ Ecke und b_1, b_2 Basis von einem Repräsentanten L von Λ, $\overset{\shortparallel}{[L]}$, $L = \langle b_1, b_2 \rangle_{\mathcal{O}}$. Sei $A \in SL_2(\mathbb{Q}_p)$

Dann ist $A.\Lambda := [\langle \underbrace{Ab_1, Ab_2}_{\text{Basis}} \rangle_{\mathcal{O}}]$ wieder Ecke in $T_{p+1} =: X$

Tatsächlich wirkt $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ auch.

7.18 Auf der Suche nach Apartments:

Geg. eine Basis b_1, b_2 von $\mathbb{Q}_p^2$, betrachte folgende Gitterklassen

$[\langle b_1, \pi^k \cdot b_2 \rangle_{\mathcal{O}}]$, $k \in \mathbb{Z}$ z.B. $\pi = 2$

$\mathbb{Z}$-viele Gitterklassen, echt paarw. verschieden

$[\langle b_1, \pi^3 b_2 \rangle_{\mathcal{O}}]$

$[\langle b_1, \pi^2 b_2 \rangle_{\mathcal{O}}]$

$[\langle \underbrace{b_1, \pi^{-1} b_2}_{L} \rangle_{\mathcal{O}}]$ $\quad [\langle \underbrace{b_1, \pi^0 b_2}_{L_1} \rangle_{\mathcal{O}}]$ $\quad [\langle \underbrace{b_1, \pi b_2}_{L_2} \rangle_{\mathcal{O}}]$

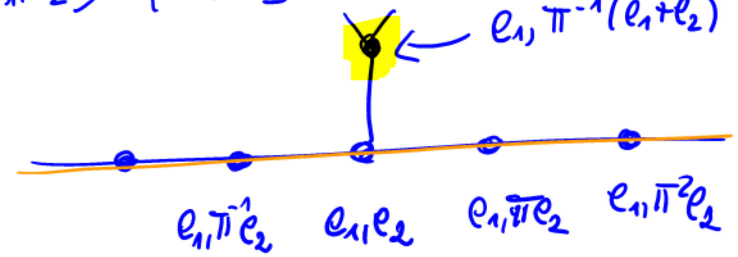
$= [\langle \underbrace{\pi b_1, b_2}_{L'} \rangle_{\mathcal{O}}]$

L, L' versch. Repräs. der selben Klasse

$\boxed{\pi L \subset L' \subset L}$

$\pi L_1 \subset L_2 \subset L_1$

$\{b_1,b_2\} = \{e_1,e_2\}$ Std. Basis $\rightsquigarrow$ Apmt A



$\rightsquigarrow$ e_1, e_1+e_2
andere Basis
$\rightsquigarrow$ anderes Apmt $\underline{A'}$
$\rightsquigarrow$ wie überlappt das mit A ?

Lemma 7.19

Sei e_1, e_2 Stdbasis von $\mathbb{Q}_p^2$ und $L := \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathcal{O}}$.
Sei $A \in SL_2(\mathbb{Q}_p)$, dann spannt Ae_1, Ae_2 ein Gitter L' auf.

$$[L] = [L'] \iff A \in SL_2(\mathcal{O})$$

Satz 7.20 Der Graph $X = T_{p+1}$ ist ein Baum ohne Blätter, d.h. ein Gebäude vom Typ D_∞.

Fakt 7.21 Für je zwei Gitter L und L' gibt es eine $\mathcal{O}$-Basis b_1, b_2 von L s.d. L' $\mathcal{O}$-Basis der Form $\boxed{b_1 \cdot \pi^a, b_2 \cdot \pi^b}$ besitzt. $\rightsquigarrow$ $\underbrace{b_1, b_2\pi^{b-a}}$
Das Paar a, b hängt nicht von der Wahl der Basis ab. see Casselmann

daraus folgt, dass $[L], [L']$ in einem Apmt sind

L hat Basis $b_1, b_2\pi^0$

L' hat Basis $\boxed{b_1\pi^a, b_2\pi^b}$ $\longrightarrow$ $b_1, b_2\pi^{\boxed{b-a}}$ hat selbe Klasse

Es gilt: $L' \subset L$ gdw $a,b \geq 0$ $\rightsquigarrow$ $L/L' \cong \mathcal{O}/\pi^a\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}/\pi^b\mathcal{O}$

Reskaliert man L und L' mit Elementen $x,y \in K^*$ erhält man Gitter L_x und L'_y und die Exponenten a,b von oben werden ersetzt durch $a+c$, $b+c$ wobei $c = v_p\left(\frac{x}{y}\right)$.

$\rightsquigarrow$ $|a-b| = |a+c-(b+c)|$ ist invariant unter Reskalieren also unabhängig vom Repräsentanten L bzw L' der jeweiligen Gitterklasse.

guter Wert für Abstand

Def. 7.22. Abstand von Gitterklassen

$\Lambda := [L]$ und $\Lambda' := [L']$ zwei Gitterklassen in X

Setze: $d(\Lambda, \Lambda') := |a-b|$

wobei a und b wie oben (d.h. $\exists$ Basis b_1, b_2 und Repräs. L und L' s.d. $L = \langle b_1, b_2\rangle_{\mathcal{O}}$ und $L' = \langle \pi^a b_1, \pi^b b_2\rangle$ oder $L' = \langle b_1, \pi^{a-b} b_2\rangle$)

Lemma 7.23

Der Abstand $d(\Lambda,\Lambda')$ ist 1 g.d.w. Λ und Λ' in X benachbart sind.

$\Lambda = [L]$

$\Lambda' = [L']$

Beweis:

Ann: $d(\Lambda,\Lambda') = 1$.

Dann gibt es eine Basis b_1, b_2 mit $\langle b_1, b_2\rangle_{\mathcal{O}} = L$ und $\langle \pi^a b_1, \pi^b b_2\rangle_{\mathcal{O}} = L'$

wobei $|a-b| = 1 \Rightarrow \underbrace{\langle b_1, \pi^{b-a} b_2\rangle_{\mathcal{O}} = L''}$, $[L''] = [L']$

zwei Möglichkeiten: $\langle b_1, \pi b_2\rangle_{\mathcal{O}}$ oder $\langle b_1, \pi^{-1} b_2\rangle_{\mathcal{O}}$ $\Big\}$ gerade die Nachbarn von L im Apmt das von b_1, b_2 aufgespannt wird.

Ann Λ und Λ' benachbart.

gibt Repräs. L und L' mit $\pi L \subset L' \subset L$

↑ diese Bedingung erzwingt $a - b = \pm 1$

$\square$