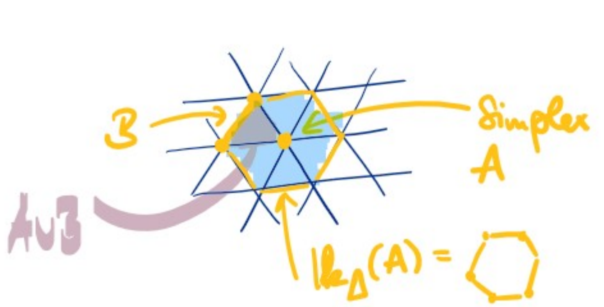
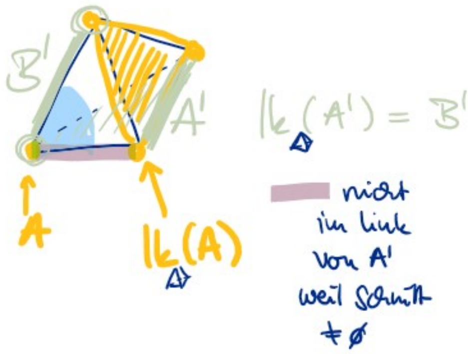
Guten Morgen

wir starten um 9:15 Uhr





Def 5.17 (Links)

The link of a simplex A in a simplicial complex Δ is the subcomplex $lk_\Delta(A)$ of Δ consisting of all simplices B in Δ s.th. $A \cap B = \emptyset$ and $\boxed{A \cup B}$ is a simplex in Δ.

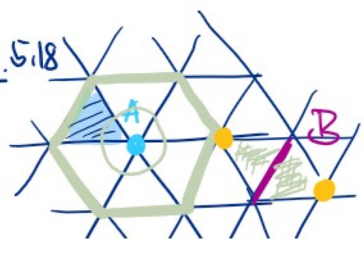
nicht Teil des Links

Teilmenge der Eckenmenge in Δ nicht alle sind Simplizes

A, B heißen „joinbar" joinable wenn $A \cup B$ Simplex

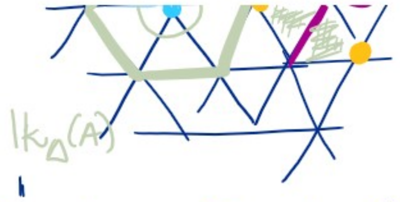
Rmk Δ Kammerkplx, dann sind die max. simplizes in $lk_\Delta(A)$, A bel. Splx in Δ, in Bijektion mit Kammern in Δ die A enthalten.

Ex. 5.18



$lk_\Delta(B)$ "

$\Delta = \Sigma(W,S)$ where (W,S) is a Coxeter system of type $\tilde{A}_2$



system of type $\tilde{A}_2$

$\mathrm{lk}_\Delta(B)$ $\shortparallel$ Cox. Cplx vom Typ A_1 $\langle s \mid s^2 \rangle$

$\mathbb{1}$ $\bullet$ $\quad$ s $\bullet$

$\mathrm{lk}_\Delta(A)$ $\shortparallel$ Cox. cplx vom Typ A_2 (Sym(3))

$m_{ij} = 3 \ \forall i j$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda(A) = \{s_1\} \underset{\text{lösche Zeile/Spalte 1}}{\rightsquigarrow} M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Coxeter mx!!

Lemma 5.19

Let Δ be a chamber complex and A a simplex in Δ. Then $\mathrm{lk}_\Delta(A)$ is isomorphic to the subposet $\Delta_{\geq A} \subseteq \Delta$ via the map
$$B \longmapsto B \cup A \qquad \text{for } B \in \mathrm{lk}_\Delta(A).$$

alle Simplizes größergleich A sind Obermengen von A

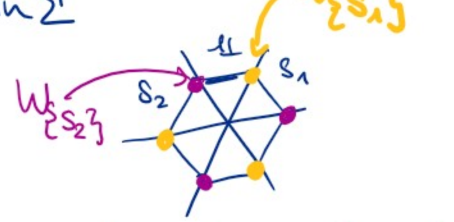
Proof:

This follows directly from the definition of the poset structure on Δ and $\mathrm{lk}_\Delta(A)$. $\square$

Prop. 5.20

λ Färbung der Ecken von Σ durch Erzeuger bzw. deren Indexmenge

Let $\Sigma = \Sigma(W, S)$ be some Coxeter complex, (W,S) Coxeter system.
Let $S' = S - \lambda(A)$ für einen festen Simplex A in Σ.
Let $W' = \langle S' \rangle \leq W$.
Dann ist der Link $\mathrm{lk}_\Sigma(A)$ isomorph (als gefärbter Kammernkomplex) zu $\Sigma(W', S')$



λ: Splx $\longmapsto$ type / Farben der Ecken

Proof

Zunächst überlege, dass (W', S') wieder ein Coxetersystem ist. Das folgt aus Konstruktion von S', W'. Man erhält als Coxetermatrix für S', W' eine Matrix M' aus der Cox.mx M für (W,S) durch Löschen der Zeilen und Spalten, die zu Elementen in $S \setminus S'$ gehören.

Nutze die W-Wirkung auf Σ um anzunehmen, dass A eine Seite/Face der fundamentalen Kammer ist.

Nutze die W-Wirkung auf Σ um anzunehmen, dass A eine Seite / face der $\underbrace{\text{fundamentalen Kammer}}_{C = W_{\emptyset} = \{1\}}$ ist.

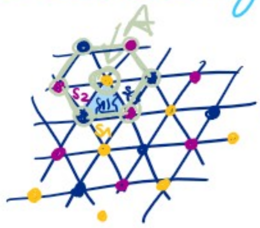
Lemma 5.19 $\Rightarrow$ $Lk_{\Sigma}(A) \cong \Sigma_{\geq A}$

d.h. zum poset das alle speziellen cosets enthält, die in W' enthalten sind. (Δ order by reverse inclusion)

Diese speziellen cosets sind aber gerade alle speziellen cosets, die in $\Sigma(W', S')$ auftauchen.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{lk_{\Sigma}(A)}} \cong \Sigma_{\geq A} \cong \underline{\underline{\Sigma(W', S')}}$ $\square$

Remark 5.21 Links are visible (sichtbar) d.h. ablesbar am Coxeterdiagramm

Γ_{Σ}  Codiert (W, S) vom Typ $\tilde{A}_2$  Σ

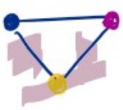
$\lambda(A) = \{\text{gelb}\} = \{s_1\} \subset S$

Sei A simplex in $\Sigma = \Sigma(W, S)$

Γ_{Σ} Cox. diagramm

Betrachte $\lambda(A)$ Farbenmenge, Teilmenge der Eckenmenge von Γ_{Σ}

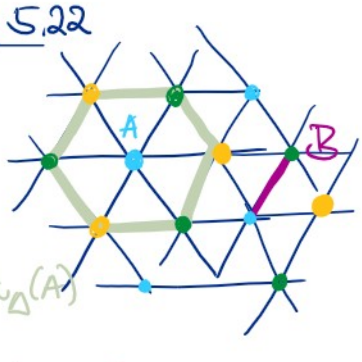
Lösche in Γ_{Σ} die Ecken in $\lambda(A)$ und alle davon ausgehenden Kanten und erhalte Γ'!

Γ_{Σ}  $\rightsquigarrow$  Γ'

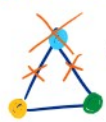
Dieses resultierende Diagramm ist genau $\Gamma_{\Sigma'}$, wobei $\Sigma' = \Sigma(W', S')$ aus Prop. 5.20 von oben.

Typ von (W', S') und vom $Lk_{\Sigma}(A)$

Ex. 5.22



$S = \{ \bullet \ \bullet \ \bullet \}$

with diagram  Γ_{Σ}

A has type $\bullet$ $\rightsquigarrow$ delete $\bullet$ from Γ and obtain the diagram 

and obtain the diagram •—•
as the type of $lk_{\Sigma}(A)$ which indeed
is a Coxeter cplx of type A_2 (a hexagon).

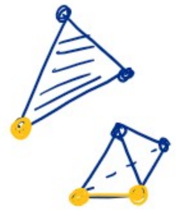
B has type {•, •} which we delete from Γ_2 to obtain type • for the link. This link is a pair of vertices which is exactly the Coxeter cplx of the Coxeter group $\langle s \mid s^2 \rangle$ with diagram • .

$\langle s \mid s^2 \rangle$

Rmk 5.23

As a general principle: The link of a $\boxed{\text{codim 2 simplex}}$ of type $S - \{s, t\}$ is a $2m$-gon, with $m = m(s,t)$.

Simplex in Δ(Kammerkplx) der 2 Ecken weniger hat als eine Kammer



6-gon

Cor 5.24

The Coxeter matrix M of (W,S) can be recovered from $\Sigma = \Sigma(W,S)$ as follows:
For any $s,t \in S$ with $s \neq t$ the order $m(s,t)$ is the unique number $2 \leq m \leq \infty$, s.th. the link of a $\underbrace{\text{simplex of type } S - \{s,t\}}_{\text{codim 2 simplex}}$ is a $2m$-gon.

beliebigen Rang n $\Rightarrow$ M eine $n \times n$ matrix

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots \\ m_{21} & & \\ \vdots & & m_{nn} \end{pmatrix} = M$$

$m_{ij} = \mathrm{ord}(s_i \cdot s_j)$

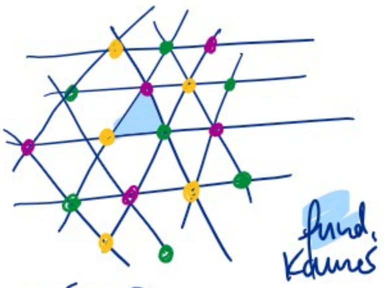
$m_{ii} = 1$ weil Cox.gr.

Bsp.

Σ_1

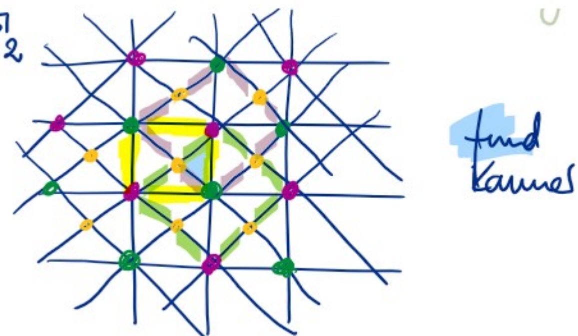
Σ_2

Σ_1



Was ist M_1?

Σ_2



Was ist M_2?

$m_{21} = m_{12} = 4$

Codim 2 Simplizes sind einfach Ecken

$\bullet\ \bullet\ \bullet$ } links sind 6-Ecke

$\rightsquigarrow$ paarw. Ordng 3

$\rightsquigarrow M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$lk_{\Sigma_2}(\bullet) =$ $\underline{2 \cdot 4}$-Eck $\rightsquigarrow S_1 S_2$ hat Ordnung 4

$lk_{\Sigma_2}(\bullet) =$ $2 \cdot 4$ Eck $\rightsquigarrow S_1 S_3$ — " — 4

$lk_{\Sigma_2}(\bullet) =$ $2 \cdot 2$ Eck $\rightsquigarrow S_2 \cdot S_3$ hat Ordnung 2 $= m_{23} = m_{32}$

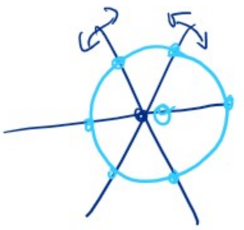
$$M_2 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow S_1 \\ \leftarrow S_2 \\ \leftarrow S_3 \end{array} \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow & \end{array}$$

5.25 Topological excursion:

A question arises naturally (in case one is familiar with combinatorial topology): In which cases is Σ a manifold?

Triangulated manifolds are examples of chamber complexes.
And we have seen that in case W is finite the geometric realization of Σ is homeom. to a (triangulated) sphere.

$\mathbb{R}^2$



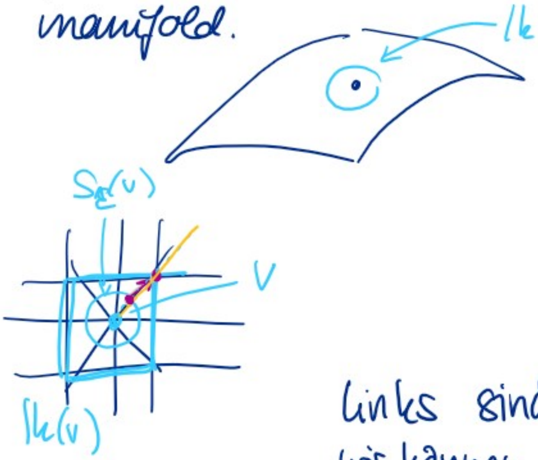
$Sym(3) \curvearrowright V$

triangulierte S^1 um 0

What happens if W is infinite?

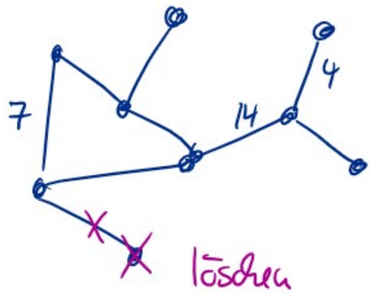
What happens if W is infinite?

There is one obvious restriction:
Manifolds are locally compact and links of vertices in Σ must hence be spheres if Σ should have a chance to be any manifold.



Σ locally compact
$\Rightarrow$ locally finite as a complex
$\Rightarrow$ lks are Cox. cplx of <u>finite</u> grps

nicht endlich/affin



liefert ein nicht endlich (nicht affines) Diagramm.

Links sind sichtbar, d.h. wir können die Typen davon ablesen am definierenden Diagramm

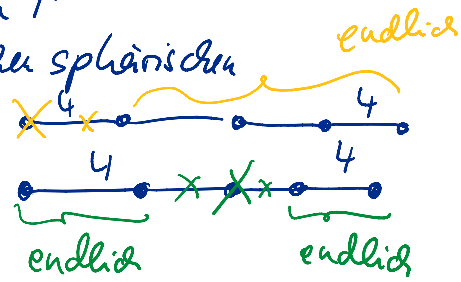
We hence conclude:
<u>A necessary condition</u>
for $\Sigma = \Sigma(W,S)$ to be a manifold (nachdem man geom. realisiert hat)
links von Simplizes in Σ sind Sphären (weil endlich und Coxeterkplx) und die zugehörige Coxetergruppe ist endliche Gruppe.

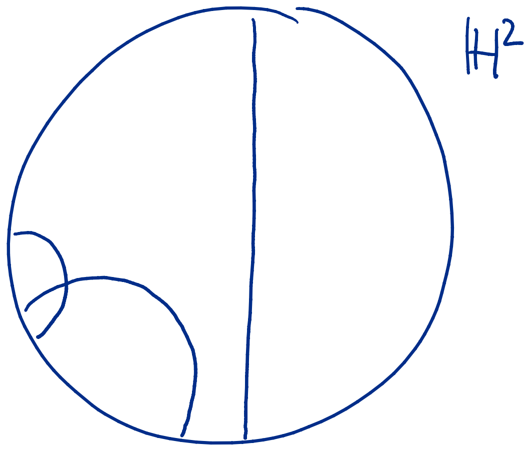
<u>Cor</u> The following are equivalent:
(a) Σ is a manifold (nach geom. Realisierung)
(b) Σ is locally finite, i.e. links are finite
(c) every <u>proper special</u> subgroup of W is finite. echte UG die speziell

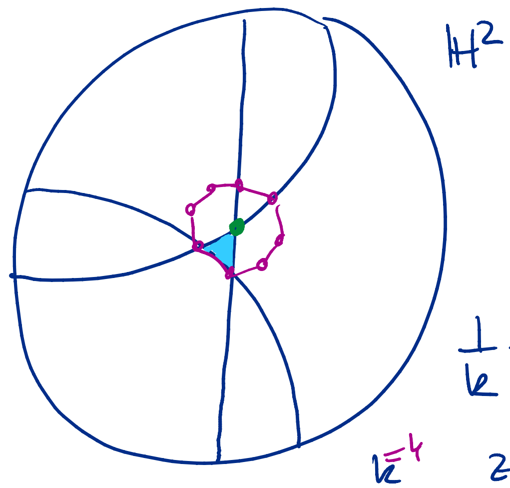
Auf dem Diagram $\Gamma = \Gamma_\Sigma$ bedeutet das:
löschen einer beliebigen Ecke in Γ (und der ausgehenden Kanten) liefert ein Γ'
[illegible] endlich

der ausgehenden Kanten) liefert ein Γ'
das in der Klassifikation der endlichen sphärischen
Gruppen auftaucht.

Alle affinen Typen erfüllen das z.B.

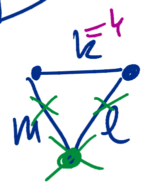






$\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}<1$

z.B. 3,4,5



$\langle s_1, s_2, s_3 \mid s_i^2, (s_1s_2)^m, (s_2s_3)^k, (s_1s_3)^l \rangle$

unendl. Gruppe

⇝ lokal endlich

Löschen einer Ecke ⇝ endliche Coxetergr.

Note that the condition (c) above is quite restrictive. There are only 3 cases for it to be satisfied:

- Σ ist Sphäre (W endlich)
- Σ ist ein euklidischer Raum (W affin und irreduzibel)
- Σ ist ein hyperbolischer umfr $\mathbb{H}^n$

  W erzeugt von Spiegelungen an den Seiten eines hyperbolischen Dreieck/Simplex