# Seminarprogramm Elliptische Kurven und Modulformen

## WS 2012/13

Dr. Eric Hofmann

12. November 2013

### Einführung: Elliptische Kurven

### 1 Elliptische Funktionen und Elliptische Kurven über $\mathbb{C}$

**Literatur:** [Kob] §§ I.4–7, [FB] Kapitel V, insbesondere V.3–4 (mit Anhängen), ergänzend kann auch Kapitel II des Skripts [Koh] genutzt werden.

### 2 Die Elliptische Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ & Kongruenzuntergruppen

Die Operation der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf Gittern in der Standardform $L = \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$, mit $\Im\tau > 0$, führt dazu, die Operationen der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ zu betrachten.

In diesem Vortrag sollen die $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und ihre Kongruenzuntergruppen $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$ und $\Gamma_1(N)$ eingeführt werden. Die Operation durch Möbiustransformationen soll definiert und auch geometrisch veranschaulicht werden. Insbesondere die 'Stürzung' und die 'Translation', welche durch die beiden Erzeuger $S$ und $T$, der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vermittelt werden. Die Konstruktion 'des' Fundamentalbereichs $\mathscr{F}$ für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ soll erläutert werden, hierbei ergeben sich auch einige nützliche Aussagen über die sog. 'elliptische' Punkte von $\mathbb{H}$.

(In diesem Zusammenhang kann auch die Definition elliptischer, hyperbolischer, und parabolischer Elemente einer Modulgruppe $\Gamma$ erfolgen.) Angesprochen werden sollte auch die Vervollständigung von $\mathbb{H}$ (bzw. $\Gamma\backslash\mathbb{H}$) durch 'Spitzen', i.e. $\Gamma$-Bahnen aus $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\cup\{\infty\}$. Kurz angesprochen werden kann hier auch schon, wie sich aus der Invarianz einer Funktion unter Translationen (i.e. parabolischen Transformationen) deren Entwickelbarkeit als Fourierreihe ('$q$-Reihe') ergibt.
**Literatur:** [Kob] § III.1, [FB] Kapitel V.8 und VI.1–2, alternativ kann man auch [KK] Kapitel II zu Rate ziehen.

### Die Hasse-Weil L-Funktion einer Elliptischen Kurve

**Literatur:** [Kob] chapter II

## 3 Modulformen: Erste Beispiele und Eigenschaften

Definition von Modulfunktionen, Modulformen und Spitzenformen (für $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$). Unmittelbare Folgerungen aus der Definition. Das $q$-Entwicklungsprinzip sollte kurz erläutert werden, sofern es noch nicht im vorherigen Vortrag angesprochen wurde. Als erste Beispiele werden die Eisensteinreihen $G_k$, $k = 4, 6, \ldots$ betrachtet[1]. Man weist nach, dass es sich um Modulformen zu $\Gamma$ handelt und bestimmt ihre Fourierentwicklung (insbesondere zeigt sich auch, dass sie nicht in den Spitzen verschwinden).

Als wichtiges Hilfsmittel, um die Theorie fortzuentwickeln, dient die $k/12$-Formel (auch Valenzformel genannt). (Ihre Beweis kann verkürzt werden, zumindest die Beweisidee sollte aber dargestellt werden.)

Mit ihrer Hilfe zeigt man nun den Struktursatz für die Algebra der Modulformen, sie wird durch Monome in $E_4$ und $E_6$ erzeugt. Als erstes Beispiel für eine Spitzenform lernt man die Deltafunktion $\Delta$ kennen, die Modulare Invariante $j$ ist ein Beispiel für eine Modulfunktion.

Kurz behandeln kann man noch die Eisensteinreihe $E_2$, sie ist keine Modulform, hat aber auch ein sehr interessantes Transformationsverhalten, sie ist 'quasi-modular'.

**Literatur:** [Kob] III.§2 bis etwa Prop. 12 (evtl. auch Prop. 13) [FB] VI.2–3. Eventuell ergänzend [Koh] Kapitel III. Alternativ/weiterführend [KK] Kapitel III, §§1–4 (sinnvolle Auswahl treffen)

## 4 Modulformen zu Kongruenzuntergruppen

*Das relativ reichhaltige Material in [Kob] für diesen Vortrag bietet einiges an Auswahlmöglichkeiten, ebenso sind die folgenden Stichpunkte eher als Auswahl möglicher Themen zu verstehen. Rücksprache mit mir ist sinnvoll.*

Schnell begegnen uns Funktionen, die zweifelsohne modular sind, aber nicht ganz in das bisherige Schema passen, z.B. die $\eta$-Funktion oder die Theta-Funktionen, s.u.

In diesem Vortrag soll unsere bisherige Definition dahingehend erweitert werden, Modulformen (und -funktionen) zu beliebigen Kongruenzuntergruppen zuzulassen, und grundlegenden Eigenschaften, wie die Entwickelbarkeit als Fourierriehe, auch in diesem Zusammenhang zu betrachten ([Kob] §III.3 bis etwa Prop 18).

Es folgen einige Beispiele: Auch im Zusammenhang mit Kongruenzuntergruppen ist es naheliegend, wieder durch geeignete Symmetrisierung Eisensteinreihen zu bilden. Etwa folgende Eisensteinreihen:

$$G_k^a(\tau) = N^{-k} \sum_{\substack{m=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ m\equiv a \mod N}} \frac{1}{(m_1\tau + m_2)^k}, \quad \text{für} \quad a = (a_1, a_2) \mod N,$$

welche für Modulformen zu $\Gamma(N)$ bzw. (für $a = (0, a_2)$) zu $\Gamma_1(N)$ darstellen. Siehe [Kob] §III.3 Prop. 21, bis etwa. Prop. 24 für deren weitere Eigenschaften. Es finden sich in [Kob] auch noch einige weitere verwandte Beispiele und Anwendungen.

Die Thetafunktionen (insbesondere die Jacobische Thetafunktion) gehören zu den üblichsten Beispielen für Modulformen, die in keinem Funktionentheorie-Lehrbuch fehlen

[1] Vergleiche Vortrag 1, hier wurden $G_4$ und $G_6$ bereits für ein Gitter, also modulo $\Gamma$ für einen Wert eingeführt.

dürfen. Die Jacobische Thetafunktion $\theta(\tau) = \sum q^{n^2}$ etwa ist eine Modulform vom Gewicht $1/2$ zu $\Gamma_0(4)$, mit einem zusätzlichen *Multiplikatorsystem* (in diesem Fall ein quadratischer Charakter), siehe [Kob] §III.4.

Die $\eta$-Funktion (siehe z.B. [Kob], §III.2 nach Prop. 14) ist über die Produktentwicklung $\eta(\tau) = q^{1/12}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ definiert. (Sie kann auch mit Hilfe von Theta-Funktionen definiert werden.) Es gilt $\eta^{24} = \Delta$, somit hat sie Gewicht $1/2$; die logarithmische Ableitung ist die Eisensteinreihe $E_2$. Sie transformiert (mit einem *Multiplikatorsytem*) unter $\Gamma_0(4)$. Durch Produkte und Quotienten von Etafunktionen lassen sich außerdem viele neue Beispiele gewinnen (etwa in [Kob] §III.2, Prop. 19, 20).

Die Beispiele der $\theta$-Funktionen oder der $\eta$-Produkte mögen dazu dienen, einen Ausblick auf die Theorie der Modulformen halbganzen Gewichts zu geben, der in [Kob] ein ganzes Kapitel gewidmet ist.

**Literatur:** [Kob] III.§2 Prop. 14,15, §3,§4 (nicht alles!), [FB] V.4. (Transformationsverhalten der Jacobischen Thetafunktione(n)) weiterhin auch [KK], Kapitel III §6 ($\eta$-Funktion), §7 (kongruenzuntergruppen), Kapitel V (Theta-Reihen).

## Literatur

[FB] E. Freitag, R. Busam, *Funktionentheorie 1*,Springer

[Kob] N. Koblitz. *Introduction to elliptic curves and Modular Forms*, Springer

[KK] M. Koecher, A. Krieg. *Elliptische Funktionen und Modulformen* (2. Auflage). Springer, 2007.

[Koh] W. Kohnen. *Funktionentheorie 2* (inoffizielles Vorlesungsskript).