

# BILLARDS IM MAGNETFELD

## MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

## MASTER OF SCIENCE

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Arbeitsgruppe Symplektische Geometrie

vorgelegt von

Anna-Maria Vocke

Münster, 9. Februar 2017

Erster Gutachter: Prof. Dr. Peter Albers

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Kai Zehmisch

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Statuierung des Theorems</b>	<b>3</b>
2.1. Einführung . . . . .	3
2.2. Resultat . . . . .	6
<b>3. Approximationsschema</b>	<b>7</b>
3.1. Lagrangesche Formulierung . . . . .	7
3.2. Magnetische Anstoßorbits . . . . .	11
3.3. Morse-Index des Free-time-Wirkungsfunktionalis . . . . .	20
3.4. Konstante Kurve . . . . .	26
<b>4. Existenz magnetischer Anstoßorbits</b>	<b>29</b>
4.1. Hamiltonsche Formulierung . . . . .	29
4.2. Restringierter Kontakttyp . . . . .	37
4.3. Verschiebbarkeit . . . . .	47
4.4. Beweis . . . . .	51
<b>A. Ausgeführte Berechnungen</b>	<b>52</b>
A.1. Differential des Wirkungsfunktionalis . . . . .	52
A.2. Hölder-Ungleichung . . . . .	54
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>55</b>
<b>Plagiatserklärung</b>	<b>57</b>



# 1. Einleitung

In der mathematischen Forschung werden klassische Billards intensiv hinsichtlich unterschiedlichster Aspekte untersucht. Billards beschreiben die Bewegung eines Massepunktes, des sogenannten Billardballs, in einem beschränkten Gebiet des  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , dem Billardtisch, ohne Krafteinwirkung, bis auf einen anfänglichen Anstoß. Beim Anstoß des Billardballs an den Rand des Gebiets tritt eine Reflexion auf, bei der die Energie erhalten bleibt. Anschließend bewegt sich der Billardball in eine neue Richtung gemäß des Reflexionsgesetzes weiter, bis er erneut an den Rand stößt. So entsteht mit fortlaufender Zeit eine Billardbahn. Weitere Informationen zu klassischen Billards sind beispielsweise in [Tab05] zu finden.

Wir stellen uns im Verlauf dieser Arbeit die Frage nach magnetischen Billards und der Änderung der Dynamik unter Einfluss eines magnetischen Felds. Genauso wie vorher bewegt sich der Billardball in einem beschränkten Gebiet des  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , jedoch wird der Billardtisch zusätzlich von einem Magnetfeld durchstoßen. Anschaulich können wir uns ein geladenes Teilchen vorstellen, welches durch ein Magnetfeld von der Bahn seiner freien Bewegung abgelenkt wird. Die Bewegung des Billards unter Einfluss eines Magnetfeldes wird derart verändert, dass sie nicht mehr der typischen Bewegung eines Billards entlang von Geradensegmenten entspricht. Das Teilchen erfährt durch die vom Magnetfeld induzierte Lorentzkraft eine Ablenkung. Insbesondere verändert sich die Richtung der Bewegung, aber die Energie bleibt erhalten.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir geschlossene von einem Magnetfeld beeinflusste Orbits mit vorgegebener Energie auf diesem beschränkten Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dabei erklären wir sowohl deren Bewegung innerhalb des Billardtisches als auch das Verhalten am Rand, genauer gesagt das Reflexionsgesetz. Im Folgenden werden wir solche Orbits *magnetische Anstoßorbits* nennen.

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, zu zeigen, dass ab einem bestimmten Energiewert solche *magnetischen Anstoßorbits* auf einem Billardtisch im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , welcher von einem Magnetfeld durchstoßen wird, existieren. Des Weiteren zeigen wir, dass ein *magnetischer Anstoßorbit* höchstens  $\dim(\text{Billardtisch}) + 1$  Anstoßpunkte hat und wir geben eine implizite obere Schranke an die Periode dieser Orbits an.

Der in dieser Arbeit gegebene Beweis beruht auf dem Artikel *Periodic Bounce Orbits of Prescribed Energy* von Albers und Mazzuchelli, [AM11]. In diesem Artikel wird die Existenz von periodischen Anstoßorbits mit vorgeschriebener Energie auf einem Billardtisch im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ohne den Einfluss eines Magnetfelds, gezeigt. Dabei beziehen sich die Autoren auf den Artikel [BG89], der die Existenz von periodischen Anstoßtrajektorien mit einer kleinen Anzahl von Anstoßpunkten beweist. Die beiden Beweise beruhen auf einem Approximationsschema, welches die sogenannte Penalty-Methode verwendet. Wir werden dieses Approximationsschema auch verwenden und es an den Einfluss des magnetischen Felds anpassen.

Zuerst zeigen wir für den Beweis der Existenz von *magnetischen Anstoßorbits* in Kapitel 2 das Setup auf und führen anschließend eine formale Definition eines *magnetischen Anstoßorbits* ein. Danach statuieren wir das wesentliche Theorem dieser Arbeit, welches obere Schranken an die Periode der Orbits liefert.

In Kapitel 3 erklären wir das bereits erwähnte Approximationsschema für das sogenannte Free-time-Wirkungsfunktional. Wir beweisen, dass eine Folge approximativer Lösungen dieses Funktional gegen einen *magnetischen Anstoßorbit* mit vorgeschriebener Energie konvergiert, vorausgesetzt ihr Morse-Index ist uniform beschränkt.

Kapitel 4 liefert schließlich den Beweis des eingangs beschriebenen Theorems. Dafür übertragen wir das zuvor genannte Approximationsschema von der Lagrangeschen Sprache in seine entsprechende Hamiltonsche Formulierung via Legendre-Dualität und wenden darauf symplektische Strukturen in Hamiltonscher Dynamik an, um entsprechende Lösungen des Free-time-Wirkungsfunktional zu finden.

## 2. Statuierung des Theorems

Wir führen in diesem Kapitel unsere verwendete Notation ein und statuieren das wesentliche Theorem dieser Arbeit. In diesem Theorem wird die Existenz magnetischer Anstoßorbits aufgezeigt und eine obere Schranke an deren Periode gegeben. Dafür beginnen wir mit einer formalen Definition des magnetischen Anstoßorbits.

### 2.1. Einführung

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ein offenes, beschränktes und glatt berandetes  $n$ -dimensionales Gebiet, sei  $V \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  eine glatte Funktion, das sogenannte Potential, und sei  $\alpha$  eine 1-Form auf der abgeschlossenen Menge  $\bar{\Omega}$ , das heißt, für Funktionen  $\alpha_i: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , können wir

$$\alpha_q = \sum_{i=1}^n \alpha_i(q) dq_i$$

schreiben. Wir studieren das Lagrange-System gegeben durch

$$\begin{aligned} L: T\bar{\Omega} = \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, v) &\longmapsto \frac{1}{2}|v|^2 + \alpha_q(v) - V(q). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sei  $\sigma$  die geschlossene 2-Form definiert vermöge  $\sigma := d\alpha$ . Dadurch wird ein eindeutiger Endomorphismus  $Y: T\bar{\Omega} \rightarrow T\bar{\Omega}$  definiert, der für alle  $q \in \bar{\Omega}$  und für alle  $v$  und  $w \in T_q\bar{\Omega}$  durch

$$\langle Y_q(v), w \rangle := \sigma_q(v, w) \tag{2.2}$$

gegeben ist.

*Bemerkung 2.1.1.* Mit Hilfe dieser Beziehung können wir den Endomorphismus  $Y$  explizit bestimmen. Dafür berechnen wir für alle  $v$  und  $w \in T_q\bar{\Omega}$  mit  $q \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned}\sigma_q(v, w) &= (d\alpha_q)(v, w) = \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j}(q) dq_j \right) \wedge dq_i \right) (v, w) \\ &= \sum_{\substack{j < i \\ i, j = 1, \dots, n}} \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j}(q) - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}(q) \right) dq_j \wedge dq_i (v, w).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$Y_q(v) = \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j}(q) - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}(q) \right) v_j \right]_{i=1, \dots, n}.$$

Damit können wir jetzt magnetische Anstoßorbits des Lagrange-Systems definieren und deren Energie bestimmen.

**Definition 2.1.2.** Eine stetige und stückweise glatte Abbildung  $\gamma: \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \rightarrow \bar{\Omega}$ ,  $\tau > 0$ , heißt **magnetischer Anstoßorbit** zu dem obigen Lagrange-System (2.1), falls eine (möglicherweise leere) endliche Teilmenge  $\mathcal{B} \subset [0, \tau]$  existiert, sodass

- (1)  $\gamma$  die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\gamma''(t) + Y_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) + \nabla V(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t \notin \mathcal{B} \quad (2.3)$$

erfüllt, und,

- (2) für jedes  $t \in \mathcal{B}$  der Punkt  $\gamma(t)$  im Rand  $\partial\Omega$  liegt, links- und rechtsseitige Ableitungen existieren, das heißt,

$$\gamma'(t^\pm) := \lim_{s \rightarrow t^\pm} \gamma'(s) \quad (2.4)$$

existieren, wobei wir  $s \rightarrow t^+$  für  $s \searrow t$  und analog  $s \rightarrow t^-$  schreiben, und  $\gamma$  das Reflexionsgesetz

$$\begin{aligned}\langle \gamma'(t^+), \nu(\gamma(t)) \rangle &= -\langle \gamma'(t^-), \nu(\gamma(t)) \rangle \neq 0, \\ \gamma'(t^+) - \langle \gamma'(t^+), \nu(\gamma(t)) \rangle \cdot \nu(\gamma(t)) &= \gamma'(t^-) - \langle \gamma'(t^-), \nu(\gamma(t)) \rangle \cdot \nu(\gamma(t))\end{aligned} \quad (2.5)$$

erfüllt, wobei  $\nu$  die äußere Normale zu  $\partial\Omega$  ist.



Dabei nennen wir die Zeiten  $t \in \mathcal{B}$  **Anstoßzeiten** und die Punkte  $\gamma(t)$  für  $t \in \mathcal{B}$  **Anstoßpunkte**.

*Bemerkung 2.1.3.* Das soeben beschriebene System hängt nicht explizit von der Variablen  $t$  ab. Aus diesem Grund schreiben wir in dieser Arbeit der besseren Übersichtlichkeit halber oftmals nur  $\gamma$  statt  $\gamma(t)$ .

*Bemerkung 2.1.4.* Die Energie für einen magnetischen Anstoßorbit  $\gamma$  ist definiert durch

$$\begin{aligned} E(\gamma(t)) &:= \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \gamma'(t)) \cdot \gamma'(t) - L(\gamma(t), \gamma'(t)) \\ &= \frac{1}{2}|\gamma'(t)|^2 + V(\gamma(t)) \end{aligned}$$

und unabhängig von  $t \notin \mathcal{B}$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}|\gamma'(t)|^2 + V(\gamma(t)) \right) \\ &= \langle \gamma', \gamma'' \rangle + \langle \nabla V(\gamma), \gamma' \rangle \\ &= -\langle \gamma', Y_\gamma(\gamma') \rangle - \langle \gamma', \nabla V(\gamma) \rangle + \langle \nabla V(\gamma), \gamma' \rangle \\ &= -\langle \gamma', Y_\gamma(\gamma') \rangle \\ &= -d\alpha_\gamma(\gamma', \gamma'). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet, da die 2-Form  $d\alpha_q$  eine schiefsymmetrische Bilinearform mit zwei identischen Einträgen ist. Also folgt

$$\frac{d}{dt}E(\gamma(t)) = 0.$$

Zur Statuierung des zentralen Theorems dieser Arbeit benötigen wir noch eine Variante der Definition des Mañé-kritischen Wertes. Weitere Informationen finden sich in [Abb13] sowie in [CMP04].

**Definition 2.1.5.** Mit den zuvor gegebenen Definitionen ist der **Mañé-kritische Wert** gegeben durch

$$c(\alpha) := \max_{q \in \Omega} \left( \frac{1}{2}|\alpha_q|^2 + V(q) \right). \quad (2.6)$$

*Bemerkung 2.1.6.* Mit Hilfe des Mañé-kritischen Werts können wir feststellen, ab welchem Energiewert entscheidende Veränderungen in unserem zu untersuchenden Setup auftreten.

## 2.2. Resultat

Unter Verwendung dieser Vorbereitungen formulieren wir das wesentliche Theorem dieser Arbeit.

**Theorem 2.2.1.** *Für alle Energiewerte  $E > c(\alpha)$  und  $\alpha \equiv 0$  nahe  $\partial\Omega$  existiert ein magnetischer Anstoßorbit  $\gamma: \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \rightarrow \bar{\Omega}$ ,  $\tau > 0$ , mit der Energie  $E(\gamma) = E$ , höchstens  $\dim\Omega + 1$  Anstoßpunkten und der Periode*

$$\tau \leq C \cdot \text{diam}(\Omega) \cdot 2(2E - 2 \min_{\bar{\Omega}} V)^{1/2}, \quad (2.7)$$

wobei  $C \equiv C(E, \alpha, \delta) > 0$  ist.

*Bemerkung 2.2.2.* Im Abschnitt 4.2 sehen wir, wie die Voraussetzungen  $E > c(\alpha)$  sowie  $\alpha \equiv 0$  nahe  $\partial\Omega$  in den Beweis dieses Theorems einfließen. Das Theorem 2.2.1 beweisen wir schließlich in Kapitel 4.

## 3. Approximationsschema

Wie in der Einleitung bereits angekündigt, verwenden wir zum Beweis des Theorems 2.2.1 das schöne Approximationsschema von Benci-Giannoni [BG89], welches von Albers-Mazzucchelli [AM11] modifiziert wurde. In diesem Approximationsschema wird eine modifizierte Lagrange-Funktion verwendet. Dafür fügen wir zu der ursprünglichen Lagrange-Funktion einen zusätzlichen Term hinzu, den sogenannten Penalty-Term. Dadurch erhalten wir das Free-time-Wirkungsfunktional. Die Lösungen dieses modifizierten Systems konvergieren gegen die Lösungen des Originalproblems, welches in Gleichung (2.1) erklärt wurde, und liefern folglich die gesuchten Anstoßorbits. Anschließend stellen wir eine Verbindung zwischen der Anzahl der Anstoßpunkte und dem Morse-Index her. Mit diesen Techniken können wir dann in Kapitel 4 die Existenz von Lösungen des approximativen Problems zeigen. Weitere Details zu den Lagrangeschen Formulierungen befinden sich in [Maz11] sowie in [Abb13].

### 3.1. Lagrangesche Formulierung

Zur Einführung dieser modifizierten Lagrange-Funktion benötigen wir folgendes Setup. Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wie zuvor ein offenes, beschränktes Gebiet mit glattem Rand und  $V \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  eine glatte Funktion. Wir fixieren  $d_0 \in (0, \frac{1}{2})$  genügend klein, insbesondere so klein, dass die Abstandsfunktion gegeben durch

$$\text{dist}_{\partial\Omega}(q) = \min \{|q - q'| \mid q' \in \partial\Omega\} \quad (3.1)$$

in allen Punkten  $q \in \Omega$  mit  $\text{dist}_{\partial\Omega}(q) \leq 2d_0 < 1$  differenzierbar ist.

Wir betrachten eine glatte Abbildung  $k: [0, \infty) \rightarrow [0, 2d_0]$  (vgl. Abbildung 3.1) mit  $0 \leq k' \leq 1$ ,  $k(x) = x$  für  $x \leq d_0$  und  $k(x) = \text{const.}$  für  $x \geq 2d_0$ .

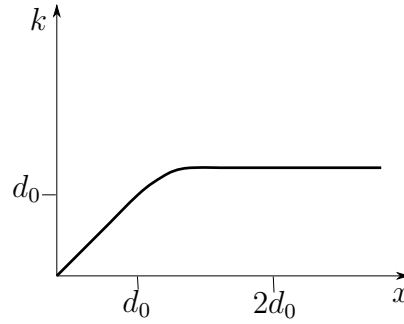


Abbildung 3.1.: Beispiel für eine Funktion  $k$ .

Damit definieren wir die Funktion  $h \in C^\infty(\bar{\Omega})$  (vgl. Abbildung 3.2) vermöge

$$\begin{aligned} h: \bar{\Omega} &\rightarrow [0, 2d_0] \\ h(q) &= k(\text{dist}_{\partial\Omega}(q)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Abbildung  $h$  besitzt folgende Eigenschaften:

- $h(q) = \text{dist}_{\partial\Omega}(q)$  für alle  $q \in \bar{\Omega}$  mit  $\text{dist}_{\partial\Omega}(q) \leq d_0$ , da  $k(x) = x$  für  $x \leq d_0$  gilt,
- $h(q) > d_0$ , falls  $\text{dist}_{\partial\Omega}(q) > d_0$ , weil  $0 \leq k' \leq 1$ ,
- $0 \leq h \leq 1$ , weil  $h: \bar{\Omega} \rightarrow [0, 2d_0]$  und  $2d_0 < 1$  gelten,
- $h(q) = \text{const.}$ , falls  $\text{dist}_{\partial\Omega}(q) \geq 2d_0$ , da  $k(x) = \text{const.}$  für  $x \geq 2d_0$  und
- $|\nabla h| \leq 1$ , da  $0 \leq k' \leq 1$ .

Wir definieren eine Funktion  $U \in C^\infty(\Omega)$  (vgl. Abbildung 3.2) durch

$$U(q) := \frac{1}{h^2(q)}. \quad (3.3)$$

Somit ist  $U$  eine positive Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- $U$  wächst wie  $\frac{1}{\text{dist}_{\partial\Omega}^2}$  nahe  $\partial\Omega$ , da  $h(q) = \text{dist}_{\partial\Omega}(q)$  für alle  $q$  nahe  $\partial\Omega$  gilt, und
- $U$  ist konstant in dem Bereich  $\{\text{dist}_{\partial\Omega}(q) \geq 2d_0\}$ , da  $h(q) = \text{const.}$ , falls für die Abstandsfunktion  $\text{dist}_{\partial\Omega}(q) \geq 2d_0$  gilt.

Für  $\varepsilon > 0$  führen wir jetzt die modifizierte Lagrange-Funktion ein:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon: \text{T}\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, v) &\longmapsto \frac{1}{2}|p|^2 + \alpha_q(v) - V(q) - \varepsilon U(q) \end{aligned} \quad (3.4)$$

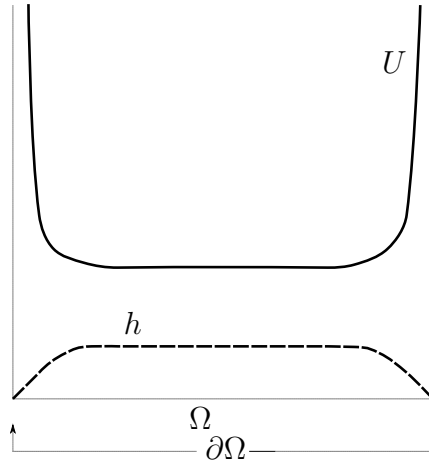


Abbildung 3.2.: Die Funktionen  $h$  und  $U$ .

Damit definieren wir für jeden Energiewert  $E \in \mathbb{R}$  das Free-time-Wirkungsfunktional  $\mathcal{L}_\varepsilon^E : H^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{\Omega}) \times \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\gamma(t) := \Gamma(t/\tau)$  durch

$$\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau) := \tau \int_0^1 \left[ L_\varepsilon \left( \Gamma(t), \frac{1}{\tau} \Gamma'(t) \right) + E \right] dt = \int_0^\tau [L_\varepsilon(\gamma, \gamma') + E] dt. \quad (3.5)$$

Dabei bezeichnet  $H^1 = W^{1,2}$  einen Sobolevraum im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Der Sobolevraum  $H^1$  ist sogar ein Hilbertraum. Eine kurze Einführung in Sobolevräume im  $\mathbb{R}^n$  findet sich in [AD14] im Anhang (Teil C.4). Weitere Details kann man in [Ada75] nachlesen.

Das zum Wirkungsfunktional  $\mathcal{L}_\varepsilon^E$  zugehörige Differential ist gegeben durch

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau)(\Psi, \sigma) &= \int_0^\tau [\langle \gamma', \psi' \rangle + \langle -Y_\gamma(\gamma') - \nabla V(\gamma) - \varepsilon \nabla U(\gamma), \psi \rangle] dt \\ &+ \frac{\sigma}{\tau} \int_0^\tau [E - \frac{1}{2} |\gamma'|^2 - V(\gamma) - \varepsilon U(\gamma)] dt, \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei  $\psi(t) := \Psi(t/\tau)$ . Die Details dieser Berechnungen befinden sich auf Seite 52.

**Lemma 3.1.1.** *Der Punkt  $(\Gamma, \tau) \in H^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \bar{\Omega}) \times \mathbb{R}_{>0}$  ist genau dann ein kritischer Punkt des Free-time-Wirkungsfunktionals  $\mathcal{L}_\varepsilon^E$ , wenn die zugehörige  $\tau$ -periodische Kurve  $\gamma$  eine Lösung des Euler-Lagrange-Systems*

$$\gamma'' + Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma) + \varepsilon \nabla U(\gamma) = 0 \quad (3.7)$$

ist und die Energie folgendermaßen gegeben ist:

$$E_\varepsilon(\gamma) := \frac{1}{2} |\gamma'|^2 + V(\gamma) + \varepsilon U(\gamma) = E \quad (3.8)$$

*Beweis.* Der Punkt  $(\Gamma, \tau)$  ist genau dann ein kritischer Punkt des Free-time-Wirkungsfunktional  $\mathcal{L}_\varepsilon^E$ , wenn  $d\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau) \equiv 0$  gilt. Aus dem Fall  $(\Psi, 0)$  bzw.  $(0, \sigma)$  folgt, dass wir die Summanden der Gleichung (3.6) getrennt voneinander betrachten können. Zuerst integrieren wir den ersten Summanden der Gleichung (3.6) partiell

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau [\langle \gamma', \psi' \rangle - \langle Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma) + \varepsilon \nabla U(\gamma), \psi \rangle] dt \\ &= \int_0^\tau [\langle -\gamma'', \psi \rangle - \langle Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma) + \varepsilon \nabla U(\gamma), \psi \rangle] dt, \end{aligned}$$

wobei wir beim Ausführen der partiellen Integration verwendet haben, dass  $\psi$  und  $\gamma$   $\tau$ -periodisch sind. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau [\langle -\gamma'', \psi \rangle - \langle Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma) + \varepsilon \nabla U(\gamma), \psi \rangle] dt = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \gamma'' + Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma) + \varepsilon \nabla U(\gamma) = 0, \end{aligned}$$

das heißt, die Kurve  $\gamma$  ist eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung. Der zweite Summand der Gleichung (3.6) zeigt, dass für alle  $\sigma$

$$\frac{\sigma}{\tau} \int_0^\tau [E - \frac{1}{2}|\gamma'|^2 - V(\gamma) - \varepsilon U(\gamma)] dt = 0$$

gelten muss. Folglich müssen die Gleichungen

$$\int_0^\tau [E - \frac{1}{2}|\gamma'|^2 - V(\gamma) - \varepsilon U(\gamma)] dt = 0 \tag{3.9}$$

und

$$\gamma'' + Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma) + \varepsilon \nabla U(\gamma) = 0 \tag{3.10}$$

erfüllt sein, damit das Differential  $d\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau)$  verschwindet. Aus (3.9) erhalten wir

$$E = \frac{1}{2}|\gamma'|^2 + V(\gamma) + \varepsilon U(\gamma)$$

und (3.10) liefert

$$\frac{d}{dt}E = \gamma'' + \nabla V(\gamma) + \varepsilon \nabla U(\gamma) = 0.$$

□

## 3.2. Magnetische Anstoßorbits

Die folgende Proposition zeigt, dass wir magnetische Anstoßorbits durch ein geeignetes Approximationsschema erhalten können, nämlich durch den Ansatz über die modifizierte Lagrange-Funktion.

**Proposition 3.2.1.** *Sei  $K > 0$  eine reelle Konstante und es gelte  $T_2 > T_1 > 0$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  sei  $(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$  ein kritischer Punkt des Wirkungsfunktionals  $\mathcal{L}_\varepsilon^E$  mit  $T_1 \leq \tau_\varepsilon \leq T_2$  und  $E_\varepsilon \leq K$ . Dann konvergiert  $(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$  bis auf Übergang zu einer Teilfolge für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $(\Gamma, \tau)$  in  $H^1(S^1, \bar{\Omega}) \times \mathbb{R}_{>0}$ . Darüber hinaus existiert für  $\gamma(t) := \Gamma(t/\tau)$  ein endliches Borel-Maß  $\mu$  auf der Menge  $\mathcal{C} := \{t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \mid \gamma(t) \in \partial\Omega\}$ , sodass*

(i) für alle  $\psi \in H^1(\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}; \mathbb{R}^n)$  die Gleichheit

$$\int_0^\tau [\langle \gamma', \psi' \rangle - \langle Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma), \psi \rangle] dt = \int_{\mathcal{C}} \langle \nu(\gamma), \psi \rangle d\mu \quad (3.11)$$

gilt,

(ii)  $\gamma$  außerhalb des Trägers  $\text{supp}(\mu)$  eine glatte Lösung des Euler-Lagrange-Systems zu  $L$  mit der Energie  $E(\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon$  ist und

(iii)  $\gamma$  links- und rechtsseitige Ableitungen hat, die links- bzw. rechtsstetig auf  $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$  sind. Weiter erfüllt  $\gamma$  das Reflexionsgesetz aus Gleichung (2.5) für jede Zeit  $t$ , welche einen isolierten Punkt in dem Träger  $\text{supp}(\mu)$  darstellt.

Falls  $\text{supp}(\mu)$  eine endliche Menge ist, so entspricht  $\gamma$  insbesondere einem magnetischen Anstoßorbit der Lagrange-Funktion  $L$  und  $\mathcal{B} := \text{supp}(\mu)$  der Menge der Anstoßzeiten.

*Beweis.* Die Folgen  $\{\tau_\varepsilon\}$  und  $\{E_\varepsilon\}$  sind beschränkt, da  $T_1 \leq \tau_\varepsilon \leq T_2$  und  $0 \leq E_\varepsilon \leq K$  gelten. Daher schließen wir nach Übergang zu einer Teilfolge, dass  $\tau_\varepsilon \rightarrow \tau$  und  $E_\varepsilon \rightarrow E$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  mit  $T_1 \leq \tau \leq T_2$  und  $E \leq K$ .

Im ersten Schritt zeigen wir nun, dass  $\Gamma_\varepsilon$  in  $H^1$  bis auf weiteren Übergang zu einer Teilfolge gegen ein  $\Gamma$  konvergiert. Dazu setzen wir  $\gamma_\varepsilon(t) = \Gamma_\varepsilon(\frac{t}{\tau_\varepsilon})$  als den zu der Folge  $(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$  gehörigen periodischen Orbit. Wir wissen, dass für die Energie Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} E_\varepsilon &\equiv E_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) = \frac{1}{2} |\gamma_\varepsilon'|^2 + V(\gamma_\varepsilon) + \varepsilon \cdot U(\gamma_\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2\tau_\varepsilon^2} |\Gamma_\varepsilon'|^2 + V(\Gamma_\varepsilon) + \varepsilon \cdot U(\Gamma_\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Zudem ist  $\gamma_\varepsilon$  nach Lemma 3.1.1 eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung zu  $L_\varepsilon$ , folglich können wir

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_\varepsilon'' + Y_{\gamma_\varepsilon}(\gamma_\varepsilon') + \nabla V(\gamma_\varepsilon) + \varepsilon \cdot \nabla U(\gamma_\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\tau_\varepsilon^2} \Gamma_\varepsilon'' + \frac{1}{\tau_\varepsilon} Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon') + \nabla V(\Gamma_\varepsilon) + \varepsilon \cdot \nabla U(\Gamma_\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.13)$$

schreiben. Insbesondere folgt nach Voraussetzung für jedes  $(\Psi, \sigma) \in H^1(S^1; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ , dass  $d\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)(\Psi, \sigma) = 0$  gilt. Wählen wir dann in der Gleichung (3.6)  $\sigma = 0$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= d\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)(\Psi, 0) \\ &= \tau_\varepsilon \cdot \int_0^1 [\tau_\varepsilon^{-2} \cdot \langle \Gamma_\varepsilon', \Psi' \rangle - \langle \tau_\varepsilon^{-1} \cdot Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon') + \nabla V(\Gamma_\varepsilon) + \varepsilon \nabla U(\Gamma_\varepsilon), \Psi \rangle] dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle  $\Psi \in H^1(S^1; \mathbb{R}^n)$ :

$$\int_0^1 [\tau_\varepsilon^{-2} \langle \Gamma_\varepsilon', \Psi' \rangle - \langle \tau_\varepsilon^{-1} \cdot Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon') + \nabla V(\Gamma_\varepsilon), \Psi \rangle] dt = \int_0^1 \langle \varepsilon \cdot \nabla U(\Gamma_\varepsilon), \Psi \rangle dt \quad (3.14)$$

Wir fixieren nun  $\Psi = \Psi_\varepsilon = -\nabla h(\Gamma_\varepsilon)$ . Nach der Gleichung (3.12) ist  $\Gamma_\varepsilon'$  uniform in  $\varepsilon$  beschränkt in  $L^\infty$ . Daher ist auch  $\Psi_\varepsilon' = -h''(\Gamma_\varepsilon)\Gamma_\varepsilon'$  uniform beschränkt in  $\varepsilon$  in  $L^\infty$ . Im weiteren Verlauf der Arbeit schreiben wir der Einfachheit halber oft nur *uniform*, wenn wir eigentlich *uniform in  $\varepsilon$*  meinen. Nach Kapitel 2 Gleichung (2.2) ist der Endomorphismus  $Y: T\bar{\Omega} \rightarrow T\bar{\Omega}$  eindeutig für alle  $q \in \bar{\Omega}$  und für  $v$  und  $w \in T_q\bar{\Omega}$  durch

$$\langle Y_q(v), w \rangle = d\alpha_q(v, w)$$

definiert. Dann definieren wir die Operatornorm von  $d\alpha_q$  als

$$|d\alpha_q|_{\text{op}} := \max \{ |d\alpha_q(v, w)| \mid v, w \in T_q\bar{\Omega}, |v|, |w| \leq 1 \}.$$

Somit folgt per Definition der Operatornorm:

$$|d\alpha_q(v, w)|_{L^\infty} \leq |d\alpha_q|_{\text{op}} \cdot |v|_{L^\infty} \cdot |w|_{L^\infty}$$

Setzen wir nun  $|d\alpha| := \max_q |d\alpha_q|_{\text{op}}$ , so erhalten wir für alle  $q \in \bar{\Omega}$  und für  $v$  und  $w \in T_q\bar{\Omega}$

$$|d\alpha_q(v, w)|_{L^\infty} \leq |d\alpha| \cdot |v|_{L^\infty} \cdot |w|_{L^\infty}.$$



In der hier zu untersuchenden Situation gilt

$$\langle Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon), \Psi \rangle = d\alpha_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon, \Psi).$$

Aus den soeben gemachten Betrachtungen folgt die Abschätzung:

$$|\langle Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon), \Psi \rangle| = |d\alpha_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon, \Psi)|_{L^\infty} \leq |d\alpha| \cdot |\Gamma'_\varepsilon|_{L^\infty} \cdot |\Psi|_{L^\infty} < \infty \quad (3.15)$$

Da zudem  $\tau_\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , folgt schließlich

$$\begin{aligned} & \int_0^1 [\tau_\varepsilon^{-2} \cdot \langle \Gamma'_\varepsilon, \Psi' \rangle - \langle \tau_\varepsilon^{-1} \cdot Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon) + \nabla V(\Gamma_\varepsilon), \Psi \rangle] dt \\ & \leq [\tau_\varepsilon^{-2} \cdot |\Gamma'_\varepsilon|_{L^\infty} \cdot |\Psi'|_{L^\infty} + \tau_\varepsilon^{-1} \cdot |d\alpha| \cdot |\Gamma'_\varepsilon|_{L^\infty} \cdot |\Psi|_{L^\infty} + |\nabla V(\Gamma_\varepsilon)|_{L^\infty} \cdot |\Psi|_{L^\infty}] \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Folglich ist die linke Seite in Gleichung (3.14) uniform in  $\varepsilon$  beschränkt in  $L^\infty$  und deshalb muss auch die rechte Seite uniform in  $L^\infty$  beschränkt sein. Somit gilt mit

$$\nabla U(\Gamma_\varepsilon) = -2 \cdot \frac{1}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \cdot \nabla h(\Gamma_\varepsilon) \quad (3.16)$$

die Abschätzung

$$\int_0^1 \langle \varepsilon \nabla U(\Gamma_\varepsilon), \Psi_\varepsilon \rangle dt = \int_0^1 \frac{2\varepsilon}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \cdot |\nabla h(\Gamma_\varepsilon)|^2 \leq C, \quad (3.17)$$

wobei  $C$  eine reelle, von  $\varepsilon$  unabhängige Konstante ist.

Sei nun  $\Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$  die (nach Heine-Borel) kompakte Umgebung von  $\partial\Omega$  gegeben durch

$$\Omega' := \{q \in \Omega \mid h(q) \leq d_0\},$$

wobei  $d_0$  wie in der Definition der Abstandsfunktion auf Seite 7 in der Gleichung (3.1) gewählt ist. Dann gelten auf  $\Omega'$  die Gleichheiten  $h = \text{dist}_{\partial\Omega}$  und  $|\nabla h| = 1$  und auf  $\Omega \setminus \Omega'$  ist  $h > d_0$  und  $|\nabla h| \leq 1$ . Daraus erhalten wir mit der Gleichung (3.17) eine uniforme Schranke

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2\varepsilon}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} dt & \leq \int_0^1 \frac{2\varepsilon}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \cdot |\nabla h(\Gamma_\varepsilon)|^2 dt + \frac{2\varepsilon}{d_0^3} \\ & \leq C + \frac{2\varepsilon}{d_0^3}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

wobei die erste Ungleichung offenbar für  $|\nabla h(\Gamma_\varepsilon)| = 1$  erfüllt ist, und falls  $|\nabla h(\Gamma_\varepsilon)| \leq 1$ , dann folgt für  $h = d_0$ , dass

$$\int_0^1 \frac{2\varepsilon}{d_0^3} dt = \frac{2\varepsilon}{d_0^3}$$

gilt. Dementsprechend ist  $\varepsilon \cdot \nabla U(\Gamma_\varepsilon)$  uniform in  $\varepsilon$  beschränkt in  $L^1$ , weil

$$\int_0^1 \varepsilon \cdot |\nabla U(\Gamma_\varepsilon)| dt = - \int_0^1 \frac{2\varepsilon}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \cdot |\nabla h(\Gamma_\varepsilon)| dt \leq - \int_0^1 \frac{2\varepsilon}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} dt$$

gilt. Darüber hinaus ist  $\nabla V(\Gamma_\varepsilon)$  auch uniform beschränkt in  $L^1$  und es ist nach Voraussetzung  $T_1 \leq \tau_\varepsilon \leq T_2$ . Wir wollen jetzt die uniforme Beschränktheit von  $Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon)$  in  $L^1$  zeigen, sodass wir daraus mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung (3.13) die uniforme Beschränktheit von  $\Gamma''_\varepsilon$  in  $L^1$  erhalten. Damit folgt dann per Definition, dass  $\Gamma_\varepsilon$  uniform beschränkt ist in  $W^{2,1}$ . Wir erinnern uns an die Abschätzung (3.15) auf Seite 13. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |\langle Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon), w \rangle|_{L^1} &= |d\alpha_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon, w)|_{L^1} \\ &\leq |d\alpha| \cdot |\Gamma'_\varepsilon|_{L^1} \cdot |w|_{L^1} < \infty, \end{aligned} \tag{3.19}$$

denn  $\Gamma'_\varepsilon$  ist durch seine uniforme Beschränktheit in  $L^\infty$  auch uniform beschränkt in  $L^1$ . Dementsprechend ist  $Y_{\Gamma_\varepsilon}(\Gamma'_\varepsilon)$  uniform beschränkt in  $L^1$  und folglich ist  $\Gamma_\varepsilon$  uniform beschränkt in  $W^{2,1}$ .

Mithilfe des Kondrachov-Einbettung-Theorems (vgl. Kapitel 6 in [Ada75]) folgt nun, dass  $W^{2,1}(S^1, \mathbb{R}^n) \hookrightarrow W^{1,2}(S^1, \mathbb{R}^n) = H^1(S^1, \mathbb{R}^n)$  eine kompakte Einbettung ist. Demzufolge konvergiert  $\Gamma_\varepsilon$  bis auf weiteren Übergang zu einer Teilfolge für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $\Gamma: S^1 \rightarrow \bar{\Omega}$  in  $H^1$ .

Im nächsten Schritt beweisen wir den Punkt (i) der Proposition. Wir wissen, dass die Funktionen  $\tilde{\mu}_\varepsilon := 2\varepsilon h^{-3}(\Gamma_\varepsilon)$  uniform in  $L^1$  beschränkt sind nach (3.18). Somit konvergiert  $\tilde{\mu}_\varepsilon$  bis auf Übergang zu einer Teilfolge für  $\varepsilon \rightarrow 0$  schwach-\* in  $L^1$  gegen ein  $\tilde{\mu}$ . Dann folgt mit dem Riesz-Darstellungs-Theorem (siehe [Wer95]), dass  $\tilde{\mu}$  ein positives endliches Borel-Maß ist.

Wir setzen nun

$$\mathcal{C}' := \{t \in S^1 \mid \Gamma(t) \in \partial\Omega\}.$$

Damit konvergiert die Funktion  $\tilde{\mu}_\varepsilon$  für jedes  $t \notin \mathcal{C}'$  uniform gegen 0 in einer Umgebung von  $t$ . Also ist  $\text{supp}(\tilde{\mu})$  in  $\mathcal{C}'$  enthalten. Falls  $t \in \mathcal{C}'$ , dann gilt für  $\varepsilon \rightarrow 0$  nach Definition der äußeren Normalen

$$\nabla h(\Gamma_\varepsilon(t)) \longrightarrow -\nu(\Gamma(t)).$$

Daher erhalten wir in der Gleichung (3.14) auf Seite 12 durch den Übergang zum Limes für  $\varepsilon \rightarrow 0$  für alle  $\Psi \in H^1(S^1; \mathbb{R}^n)$ :

$$\tau^{-2} \int_0^1 \langle \Gamma', \Psi' \rangle dt - \int_0^1 \langle \tau^{-1} \cdot Y_\Gamma(\Gamma') + \nabla V(\Gamma), \Psi \rangle dt = \int_{\mathcal{C}'} \langle \nu(\Gamma), \Psi \rangle d\tilde{\mu}$$

Durch die Reparametrisierung  $\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \rightarrow S^1, t \mapsto t/\tau$  wird das Maß  $\tilde{\mu}$  zurückgezogen zum Maß  $\mu$  auf

$$\mathcal{C} := \{t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \mid \gamma(t) \in \partial\Omega\}.$$

Das liefert folglich die Aussage (i).

Wir prüfen nun den Teil (ii) aus der Proposition. Dazu sei  $t \notin \text{supp}(\mu)$  und es sei  $\varepsilon > 0$  genügend klein, dass  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$ . Dann liefert Punkt (i) für jedes  $\Psi \in H^1(\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}; \mathbb{R}^n)$  mit Träger in  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  die folgende Gleichheit

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} [\langle \gamma', \psi' \rangle - \langle Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma), \psi \rangle] dt = 0,$$

da  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap \text{supp}(\mu) = \emptyset$ . Daraus folgt nach Definition der schwachen Ableitung

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \langle Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma), \psi \rangle dt = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \langle \gamma', \psi' \rangle dt = - \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \langle \gamma'', \psi \rangle dt.$$

Somit schließen wir

$$\gamma'' = -Y_\gamma(\gamma') - \nabla V(\gamma)$$

und folglich gilt  $\gamma' \in H^1$ , das heißt  $\gamma \in H^2$ . Mit Hilfe eines Bootstrap-Arguments resultiert daraus, dass  $\gamma \in H^k$ , für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nach dem Rellich-Kondrachov-Einbettungstheorem (vgl. Kapitel 6 in [Ada75]) erhalten wir folgende kompakte Einbettung für ein spezielles  $m = m(k) \in \mathbb{N}$ :

$$H^k = W^{k,2} \hookrightarrow C^m$$

Daher folgt  $\gamma \in C^m$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  und für  $m(k) \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  erhalten wir schließlich  $\gamma \in C^\infty$ . Daraus geht hervor, dass  $\gamma$  eine glatte Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung zu der Lagrange-Funktion  $L$  auf dem kompakten Intervall  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  mit der Energie

$$E(\gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma'(t)|^2 + V(\gamma(t))$$

ist. Damit ist Punkt (ii) bewiesen.

Aus Punkt (i) folgt, dass  $\gamma'$  eine Kurve beschränkter Variation ist. Somit hat  $\gamma$  per Definition der beschränkten Variation rechts- und linksseitige Ableitungen an jedem Punkt und diese sind rechts- bzw. linksseitig stetig. Es bleibt nun also zu zeigen, dass das Reflexionsgesetz für jede Zeit  $t \in \text{supp}(\mu)$  erfüllt ist.

Dafür zeigen wir, dass bis auf Übergang zu einer Teilfolge fast überall

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \cdot U(\gamma_\varepsilon) = 0$$

gilt. Wir nehmen an, dass für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\varepsilon \cdot U(\gamma_\varepsilon(t)) \not\rightarrow 0$$

auf einer Teilmenge  $I \subset \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$  gilt. Daraus folgt, dass  $U$  auf der Menge  $I$  nicht konstant ist. Daher gilt für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die punktweise Konvergenz von  $U(\gamma_\varepsilon) \rightarrow \infty$  auf  $I$  nach Definition von  $U$ . Somit gelten auch  $h(\gamma_\varepsilon) \rightarrow 0$  und  $|\nabla h(\gamma_\varepsilon)| \rightarrow 1$  punktweise auf  $I$ . Nach Definition von  $U$  erhalten wir:

$$\varepsilon \cdot U(\gamma_\varepsilon(t)) = \frac{\varepsilon}{h^2(\gamma_\varepsilon(t))}$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot \nabla U(\gamma_\varepsilon(t)) &= -\frac{2\varepsilon}{h^3(\gamma_\varepsilon(t))} \cdot \nabla h(\gamma_\varepsilon(t)) \\ &= -2\varepsilon \cdot \nabla h(\gamma_\varepsilon(t)) \cdot \frac{U(\gamma_\varepsilon(t))}{h(\gamma_\varepsilon(t))} \end{aligned}$$

Daraus folgt für  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$|\varepsilon \cdot \nabla U(\gamma_\varepsilon)| \rightarrow +\infty$$

punktweise auf der Menge  $I$ . Wir nehmen an, dass  $I$  positives Lebesgue-Maß hat. Folglich erhalten wir mit Hilfe des Lemmas von Fatou:

$$+\infty = \int_I \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |\varepsilon \cdot \nabla U(\gamma_\varepsilon(t))| dt \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_I |\varepsilon \cdot \nabla U(\gamma_\varepsilon(t))| dt$$

Das liefert einen Widerspruch zu der uniformen Beschränktheit von  $\varepsilon \cdot \nabla U(\gamma_\varepsilon)$  in  $L^1$ , welche wir in der Gleichung (3.18) gesehen haben.

Zusammen mit  $E_\varepsilon(\gamma) \rightarrow E(\gamma)$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt somit fast überall

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} |\gamma'(t)|^2 + V(\gamma(t)).$$

Da  $\gamma'$  eine Kurve mit beschränkter Variation ist und daher rechts- und linksseitige Ableitungen  $\gamma'(t^+)$  bzw.  $\gamma'(t^-)$ , definiert wie in Gleichung (2.4) auf Seite 4, existieren, erhalten wir für alle  $t \in \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$ :

$$\frac{1}{2} |\gamma'(t^\pm)|^2 + V(\gamma(t)) = E \quad (3.20)$$

Wir betrachten nun eine Zeit  $t$ , welche einen isolierten Punkt in dem Träger  $\text{supp}(\mu)$  darstellt. In Punkt (i) der Aussage dieser Proposition wählen wir  $\psi \in H^1(\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}; \mathbb{R}^n)$  nun so, dass  $\psi$  Träger im Intervall  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$  hat, wobei  $\varepsilon > 0$  genügend klein ist, sodass  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \cap \text{supp}(\mu) = \{t\}$  gilt. Folglich erhalten wir aus Punkt (i) mit Hilfe partieller Integration die Gleichung:

$$\langle \nu(\gamma(t)), \psi(t) \rangle \mu(\{t\}) = \int_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \setminus \{t\}} [\langle \gamma', \psi' \rangle - \langle Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma), \psi \rangle] dt \quad (3.21)$$

$$= \langle \gamma'(t^-) - \gamma'(t^+), \psi(t) \rangle - \int_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon] \setminus \{t\}} \langle \gamma''(t) + Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma), \psi \rangle dt \quad (3.22)$$

Die Kurve  $\gamma$  ist nach Punkt (ii) der Aussage dieser Proposition eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung zu  $L$  für  $t \notin \text{supp}(\mu)$ , das heißt, auf dem Bereich  $[t - \varepsilon, t + \varepsilon] \setminus \{t\}$  gilt  $\gamma'' + Y_\gamma(\gamma') + \nabla V(\gamma) = 0$ . Dementsprechend verschwindet das Integral in der Gleichung (3.22). Daher erhalten wir für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ :

$$\langle \gamma'(t^-) - \gamma'(t^+), v \rangle = \langle \nu(\gamma(t)), v \rangle \mu(\{t\}) \quad (3.23)$$

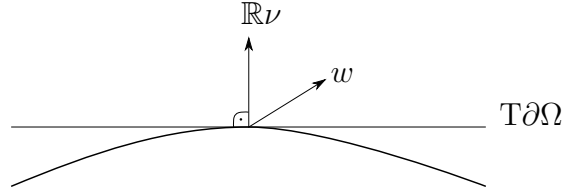
Wir wählen jetzt einen beliebigen Vektor  $v$ , der tangential zu  $\partial\Omega$  durch  $\gamma(t)$  verläuft, das heißt, es gilt

$$\langle \nu(\gamma(t)), v \rangle = 0.$$

Nach Gleichung (3.23) folgt daher für alle  $v \in T_{\gamma(t)}\partial\Omega$ :

$$\underbrace{\langle \gamma'(t^-) - \gamma'(t^+), v \rangle}_{=:w} = 0 \quad (3.24)$$

Es gilt  $\gamma'(t^\pm) \in T_{\gamma(t)}\Omega = \mathbb{R}\nu(\gamma(t)) \oplus T_{\gamma(t)}\partial\Omega$ , wobei  $\nu$  der Einheitsnormalenvektor ist. Folglich können wir  $w$  in den orthogonalen  $w^\perp$  und den parallelen Anteil  $w^\parallel$  splitten



**Abbildung 3.3.:** Aufsplitten in orthogonalen und parallelen Anteil.

(vergleiche dazu die Abbildung 3.3), das heißt, es gilt  $w = w^\perp + w^\parallel$  mit  $w^\perp \in \mathbb{R}\nu(\gamma(t))$  und  $w^\parallel \in T_{\gamma(t)}\partial\Omega$ . Daraus resultiert nach Gleichung (3.23) für alle  $v \in T\partial\Omega$

$$0 = \langle w, v \rangle = \underbrace{\langle w^\perp, v \rangle}_{=0} + \langle w^\parallel, v \rangle$$

und entsprechend gilt  $0 = w^\parallel = (\gamma'(t^-))^\parallel - (\gamma'(t^+))^\parallel$ . Somit sind die zu  $\partial\Omega$  tangentialen Komponenten von  $\gamma'(t^-)$  und  $\gamma'(t^+)$  identisch, das heißt, es folgt  $\gamma'(t^-)^\parallel = \gamma'(t^+)^\parallel$ . Daraus resultiert mit Hilfe der orthogonalen Projektion, dass

$$\begin{aligned} w^\parallel &= w - w^\perp \\ &= w - \langle w, \nu \rangle \nu, \end{aligned}$$

wobei  $\nu$  der Einheitsnormalenvektor ist. Durch Einsetzen von  $w = \gamma'(t^-) - \gamma'(t^+)$  folgt

$$\gamma'(t^-) - \langle \gamma'(t^-), \nu(\gamma(t)) \rangle \cdot \nu(\gamma(t)) = \gamma'(t^+) - \langle \gamma'(t^+), \nu(\gamma(t)) \rangle \cdot \nu(\gamma(t)).$$

Dies zusammen mit der Energieerhaltung gegeben in der Gleichung (3.20) liefert

$$|\gamma'(t^-)| = |\gamma'(t^+)|$$

und daher erhalten wir

$$|\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^+) \rangle| = |\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^-) \rangle|.$$

Wenn diese letzte Gleichung nicht verschwindet, so müssen die Ausdrücke  $\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^+) \rangle$  und  $\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^-) \rangle$  unterschiedliches Vorzeichen haben. Das heißt, es muss

$$\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^+) \rangle = -\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^-) \rangle$$

erfüllt sein, da andernfalls

$$\langle \gamma'(t^-) - \gamma'(t^+), \nu(\gamma(t)) \rangle = \langle \gamma'(t^-), \nu(\gamma(t)) \rangle - \langle \gamma'(t^+), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$$

wäre. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $\mu$  ein positives Lebesgue-Maß ist, vergleiche dazu Gleichung (3.23). Schließlich wählen wir  $v := \nu(\gamma(t))$  in Gleichung (3.24) und erhalten

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t^-) - \gamma'(t^+), \nu(\gamma(t)) \rangle &= \langle \gamma'(t^-), \nu(\gamma(t)) \rangle - \underbrace{\langle \gamma'(t^+), \nu(\gamma(t)) \rangle}_{=-\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^-) \rangle} \\ &= 2\langle \gamma'(t^-), \nu(\gamma(t)) \rangle \\ &= 2\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^-) \rangle. \end{aligned}$$

Dadurch erkennen wir mit Hilfe der Gleichung (3.23) den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^-) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \gamma'(t^-) - \gamma'(t^+), \nu(\gamma(t)) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \nu(\gamma(t)), \nu(\gamma(t)) \rangle \mu(\{t\}) \neq 0, \end{aligned} \tag{3.25}$$

da  $\mu$  ein positives Lebesgue-Maß ist und  $\langle \nu(\gamma(t)), \nu(\gamma(t)) \rangle = 1$  gilt. Alles in allem liefern uns diese Betrachtungen das Reflexionsgesetz

$$\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^+) \rangle = -\langle \nu(\gamma(t)), \gamma'(t^-) \rangle \neq 0$$

und somit den Punkt (iii).

Zum Schluss bleibt der Beweis der schließenden Bemerkung in dieser Proposition. Dazu zeigen wir, dass die Kurve  $\gamma: \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \rightarrow \bar{\Omega}$ ,  $\tau > 0$ , stetig und stückweise differenzierbar ist und eine endliche Teilmenge  $\mathcal{B} \subset [0, \tau]$  existiert, sodass

- (1) die Kurve  $\gamma$  die Euler-Lagrange-Gleichung für alle  $t \notin \mathcal{B}$  erfüllt und
- (2)  $\gamma(t) \in \partial\Omega$  für alle  $t \in \mathcal{B}$  gilt und links- und rechtsseitige Ableitungen existieren sowie das Reflexionsgesetz erfüllt ist.

Offenbar ist  $\mathcal{B} := \text{supp}(\mu)$  nach Voraussetzung eine endliche Menge. Weiter ist  $\Gamma \in H^1$  und somit auch  $\gamma \in H^1$ . Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie der Hölder-Ungleichung folgt die Stetigkeit von  $\gamma$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} |\gamma(t) - \gamma(s)| &\leq \int_s^t |\gamma'(\tau)| \cdot 1 \, d\tau \\ &\leq \left( \int_s^t |\gamma'(\tau)|^2 \, d\tau \right)^{1/2} \cdot \left( \int_s^t 1 \, d\tau \right)^{1/2} \\ &\leq |\gamma|_{H^1}(t-s)^{1/2}. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Punkt (ii) folgt, dass die Kurve  $\gamma$  stückweise differenzierbar ist. Die Bedingung (1) ist eine leere Bedingung für  $\mathcal{B} = \text{supp}(\mu)$  und die Bedingung (2) folgt direkt aus Punkt (iii). Außerdem ist  $\text{supp}(\mu)$  per Definition die Menge der Anstoßzeiten. Damit schließen wir den Beweis der Proposition 3.2.1 ab.  $\square$

### 3.3. Morse-Index des Free-time-Wirkungsfunktional

An der folgenden Proposition erkennen wir den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Anstoßpunkte und dem Morse-Index des Free-time-Wirkungsfunktional.

**Proposition 3.3.1.** *In der Situation von Proposition 3.2.1 ist die Kardinalität  $|\text{supp}(\mu)|$  des Trägers des Maßes  $\mu$  bis auf Übergang zu einer Teilfolge von  $\{(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)\}$  von oben durch den Morse-Index des eingeschränkten Wirkungsfunktional  $\mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}|_{H^1 \times \{\tau_\varepsilon\}}$  von  $\Gamma_\varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$  genügend klein beschränkt, das heißt, es gilt*

$$|\text{supp}(\mu)| \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\text{Morse}}(\Gamma_\varepsilon; \mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}|_{H^1 \times \{\tau_\varepsilon\}}).$$

*Beweis.* Wir behalten die Notation aus Proposition 3.2.1 bei. Demnach ist das Maß  $\mu$  der Pullback des Maßes  $\tilde{\mu}$  auf  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  vermöge der Reparametrisierung

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} &\rightarrow S^1 \\ \iota(t) &= \frac{t}{\tau}. \end{aligned}$$

Insbesondere gelten

$$\iota(\text{supp}(\mu)) = \text{supp}(\tilde{\mu}) \quad \text{und} \quad |\text{supp}(\tilde{\mu})| = |\text{supp}(\mu)|.$$



Daher genügt es zu zeigen, dass für jeden Punkt  $t \in \text{supp}(\tilde{\mu})$  und für jedes genügend kleine  $\varepsilon > 0$  ein Vektorfeld  $\Psi_\varepsilon \in H^1(S^1; \mathbb{R}^n)$  mit Träger in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $t$  existiert, welches

$$\text{Hess } \mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)[(\Psi_\varepsilon, 0), (\Psi_\varepsilon, 0)] < 0 \quad (3.26)$$

erfüllt. In der Tat können wir dann für  $k$  verschiedene Punkte  $t_1, \dots, t_k \in \text{supp}(\tilde{\mu})$  und genügend kleines  $\varepsilon > 0$  die  $k$  Vektorfelder  $\Psi_{\varepsilon,1}, \dots, \Psi_{\varepsilon,k}$  finden, sodass jedes  $\Psi_{\varepsilon,j}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , Träger in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $t_j$  hat und die Gleichung (3.26) erfüllt. Insbesondere können wir annehmen, dass die Träger der  $\Psi_{\varepsilon,j}$  paarweise disjunkt sind. Folglich spannen diese Vektorfelder einen  $k$ -dimensionalen Teilvektorraum von  $H^1(S^1; \mathbb{R}^n)$  auf, über welchem die Hesse-Matrix des eingeschränkten Wirkungsfunktionals  $\mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}|_{H^1 \times \{\tau_\varepsilon\}}$  von  $\Gamma_\varepsilon$  negativ definit ist. Es gilt nämlich:

$$\text{Hess } \mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}|_{H^1 \times \{\tau_\varepsilon\}}(\Gamma_\varepsilon)[\Psi, \Xi] = \text{Hess } \mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)[(\Psi, 0), (\Xi, 0)]$$

Dies impliziert

$$\mu_{\text{Morse}}(\Gamma_\varepsilon; \mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}|_{H^1 \times \{\tau_\varepsilon\}}) \geq k.$$

Da der Limes inferior nach Definition der kleinste Häufungspunkt einer beschränkten reellen Zahlenfolge ist, liefert dies die Behauptung.

Zur Berechnung der Hesse-Matrix sei  $t \in \text{supp}(\tilde{\mu})$  und  $\varepsilon > 0$  genügend klein. Wir wählen für  $\delta > \delta' > 0$  eine glatte Cut-Off-Funktion  $\Phi: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow [0, 1]$ , sodass der Träger  $\text{supp}(\Phi)$  in  $[t - \delta, t + \delta]$  liegt und  $\Phi \equiv 1$  auf  $[t - \delta', t + \delta']$  gilt. Wir definieren das Vektorfeld  $\Psi_\varepsilon \in H^1(S^1; \mathbb{R}^n)$  durch

$$\Psi_\varepsilon(s) := -\Phi(s)\nabla h(\Gamma_\varepsilon(s)). \quad (3.27)$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} & \text{Hess } \mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)[(\Psi_\varepsilon, 0), (\Psi_\varepsilon, 0)] \\ &= \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon + r \cdot \Psi_\varepsilon + s \cdot \Psi_\varepsilon, \tau_\varepsilon + r \cdot 0 + s \cdot 0)). \end{aligned}$$

Nach der Berechnung des Differentials von  $\mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}$  wissen wir, dass

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon} (\Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon + s\Psi_\varepsilon, \tau_\varepsilon) \\ &= \tau_\varepsilon \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial q} \left( \Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} (\Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon)' \right) \Psi_\varepsilon \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v} \left( \Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} (\Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon)' \right) \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Psi'_\varepsilon \right] dt \end{aligned}$$

gilt. Darüber hinaus ist

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=0} \left[ \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial q} \left( \Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} (\Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon)' \right) \Psi_\varepsilon + \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v} \left( \Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} (\Gamma_\varepsilon + r\Psi_\varepsilon)' \right) \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Psi'_\varepsilon \right] \\ &= \frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial q^2} \left( \Gamma_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Gamma'_\varepsilon \right) \Psi_\varepsilon \Psi_\varepsilon + \frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial q \partial v} \left( \Gamma_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Gamma'_\varepsilon \right) \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Psi'_\varepsilon \Psi_\varepsilon \\ & \quad + \frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial v \partial q} \left( \Gamma_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Gamma'_\varepsilon \right) \Psi_\varepsilon \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Psi'_\varepsilon + \frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial v^2} \left( \Gamma_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Gamma'_\varepsilon \right) \frac{1}{\tau_\varepsilon^2} \Psi'_\varepsilon \Psi'_\varepsilon. \end{aligned}$$

Für die gemischten Terme in der Hesse-Matrix ist nur ein Summand in der Lagrange-Funktion interessant, nämlich

$$\alpha_q(v) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(q) v_j.$$

Dafür gilt

$$\frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial q_j \partial v_k}(q, v) = \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_j}(q)$$

und somit folgt

$$\left\langle \frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial q \partial v} \left( \Gamma_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Gamma'_\varepsilon \right) \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Psi'_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \right\rangle = d\alpha_{\Gamma_\varepsilon} \left( \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Psi'_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \right).$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial v^2}(q, v) = 1$$

und es ist

$$\frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial q_m \partial q_l}(q, v) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial q_m \partial q_l}(q) v_j - \frac{\partial^2 V}{\partial q_m \partial q_l}(q) - \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial q_m \partial q_l}(q).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 L_\varepsilon}{\partial q^2} \left( \Gamma_\varepsilon, \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Gamma'_\varepsilon \right) \Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \right\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial q^2}(\Gamma_\varepsilon) \Gamma'_{\varepsilon, j} \Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \right\rangle \\ &\quad - \langle \nabla^2 V(\Gamma_\varepsilon) \Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \rangle - \varepsilon \langle \nabla^2 U(\Gamma_\varepsilon) \Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \rangle. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix von  $\mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}$  erhalten wir mit

$$\nabla^2 U(\Gamma_\varepsilon) = \frac{6}{h^4(\Gamma_\varepsilon)} \cdot \nabla^2 h(\Gamma_\varepsilon) - \frac{2}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \cdot \nabla^2 h(\Gamma_\varepsilon) \quad (3.28)$$

als

$$\begin{aligned} \text{Hess } \mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon) [(\Psi_\varepsilon, 0), (\Psi_\varepsilon, 0)] \\ = \tau_\varepsilon \int_0^1 \underbrace{\left[ \tau_\varepsilon^{-2} |\Psi'_\varepsilon|^2 - \langle \nabla^2 V(\Gamma_\varepsilon) \Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \rangle + 2\varepsilon \frac{\langle \nabla^2 h(\Gamma_\varepsilon) \Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \rangle}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \right]}_{=: A_\varepsilon} dt \quad (3.29) \end{aligned}$$

$$- \underbrace{6\tau_\varepsilon \cdot \varepsilon \int_0^1 \frac{\langle \nabla h(\Gamma_\varepsilon), \Psi_\varepsilon \rangle^2}{h^4(\Gamma_\varepsilon)} ds}_{=: B_\varepsilon} \quad (3.30)$$

$$+ \tau_\varepsilon \int_0^1 \underbrace{\left[ 2 \cdot d\alpha_{\Gamma_\varepsilon} \left( \frac{1}{\tau_\varepsilon} \Psi'_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \right) + \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial q^2}(\Gamma_\varepsilon) \Gamma'_{\varepsilon, j} \Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \right\rangle \right]}_{=: C_\varepsilon} dt. \quad (3.31)$$

Nun müssen wir zeigen, dass dieser Ausdruck negativ ist. Dafür prüfen wir zunächst, dass die Summanden  $|A_\varepsilon|$  und  $|C_\varepsilon|$  unabhängig von  $\varepsilon$  uniform beschränkt sind.

Nach Proposition 3.2.1 Aussage (i) wissen wir, dass  $\Gamma_\varepsilon$  in  $H^1$  konvergiert. Daher ist das Vektorfeld  $\Psi_\varepsilon$  nach Definition uniform beschränkt in  $H^1$  und folglich ist  $\Psi'_\varepsilon$  per Definition der Sobolev-Norm uniform beschränkt in  $L^2$ . In der Gleichung (3.18) auf Seite 13 haben wir gesehen, dass  $2\varepsilon \cdot h^{-3}(\Gamma_\varepsilon)$  uniform beschränkt ist in  $L^1$ . Somit ist auch der letzte Term in  $A_\varepsilon$  uniform beschränkt in  $L^1$ .

Nach der Ungleichung in (3.19) auf Seite 14 wissen wir, dass der Term  $|\mathrm{d}\alpha_{\Gamma_\varepsilon}(\frac{1}{\tau_\varepsilon}\Psi'_\varepsilon, \Psi_\varepsilon)|$  uniform beschränkt ist in  $L^1$ . Weiter gilt

$$\left| \left\langle \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial q^2}(\Gamma_\varepsilon) \Gamma'_{\varepsilon,j} \Psi_\varepsilon, \Psi_\varepsilon \right\rangle \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial q^2}(\Gamma_\varepsilon) \right| \cdot |\Gamma'_{\varepsilon,j}|_{L^1} \cdot |\Psi_\varepsilon|_{H^1} \cdot |\Psi_\varepsilon|_{H^1} < \infty.$$

Also ist auch der Term  $|C_\varepsilon|$  uniform in  $\varepsilon$  beschränkt.

Für  $B_\varepsilon$  zeigen wir, dass  $B_\varepsilon \rightarrow +\infty$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Da  $\Gamma_\varepsilon \rightarrow \Gamma$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $H^1$  konvergiert, liegt diese Konvergenz nach dem Sobolev-Einbettungs-Theorem insbesondere in  $C^0$  (vgl. Kapitel 5 in [Ada75]). Es gilt  $|\nabla h| = 1$  auf  $\partial\Omega$ . Wir können ein  $\delta'' \in (0, \delta']$  finden, sodass  $|\nabla h(\Gamma_\varepsilon(s))|^4 \geq \frac{1}{2}$  für jedes  $s \in [t - \delta'', t + \delta'']$  und genügend kleines  $\varepsilon > 0$  gilt. Nach Definition in Gleichung (3.27) gilt  $\Psi_\varepsilon(s) = -\Phi(s)\nabla h(\Gamma_\varepsilon(s))$  und die Inklusion  $[t - \delta'', t + \delta''] \subset [t - \delta', t + \delta']$  ist erfüllt. Insbesondere haben wir  $\Phi = 1$  auf  $[t - \delta', t + \delta']$ . Also schätzen wir folgendes ab:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon &\geq 6T_1 \cdot \varepsilon \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{\langle \nabla h(\Gamma_\varepsilon), \Psi_\varepsilon \rangle^2}{h^4(\Gamma_\varepsilon)} \mathrm{d}s \\ &= 6T_1 \varepsilon \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{|\nabla h(\Gamma_\varepsilon)|^4}{h^4(\Gamma_\varepsilon)} \mathrm{d}s \\ &\geq \frac{6}{2} T_1 \varepsilon \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^4(\Gamma_\varepsilon)} \mathrm{d}s \\ &\geq \frac{6T_1 \varepsilon}{2(2\delta'')^{\frac{1}{3}}} \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \mathrm{d}s \right)^{\frac{4}{3}} \\ &= \frac{6T_1}{2(2\delta'')^{\frac{1}{3}}} \left( \underbrace{\int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{\varepsilon}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \mathrm{d}s}_{=: B'_\varepsilon} \right) \left( \underbrace{\int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} \mathrm{d}s}_{B''_\varepsilon} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt die Hölder-Ungleichung angewandt. Genauere Ausführungen dazu befinden sich im Anhang auf Seite 54. Nach Gleichung (3.18) auf Seite 13 wissen wir, dass die Funktion  $2\varepsilon h^{-3}(\Gamma_\varepsilon)$  schwach-\* in  $L^1$  gegen das Maß  $\tilde{\mu}$  konvergiert. Folglich konvergiert  $B'_\varepsilon$  gegen eine Konstante  $B' \geq \frac{1}{2} \tilde{\mu}(\{t\}) > 0$ , vergleiche Seite 19 Gleichung (3.25). Es bleibt zu zeigen, dass  $B''_\varepsilon \rightarrow +\infty$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Die Hölder-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} B_\varepsilon'' &= \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^3(\Gamma_\varepsilon)} ds \\ &\geq (2\delta'')^{-1/2} \underbrace{\left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^2(\Gamma_\varepsilon)} ds \right)}_{=: B_\varepsilon'''}^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Genauere Ausführungen der Anwendung der Hölder-Ungleichung können im Anhang auf Seite 54 nachgelesen werden. Wir erinnern uns, dass  $\Gamma_\varepsilon$  bis auf Teilfolge in  $H^1$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen ein  $\Gamma$  konvergiert und es gilt  $\Gamma(t) \in \partial\Omega$ . Für genügend kleines  $\delta''$  erhalten wir für alle  $s \in [t - \delta'', t + \delta'']$  nach Definition von  $h$  auf Seite 8 für alle  $\varepsilon > 0$  genügend klein

$$h(\Gamma_\varepsilon(s)) = \text{dist}_{\partial\Omega}(\Gamma_\varepsilon(s)). \quad (3.32)$$

Sei  $D > 0$  eine uniforme obere Schranke für die  $L^2$ -Norm der Vektorfelder  $\Gamma'_\varepsilon$ . Für jedes  $s \in [t - \delta'', t + \delta'']$  erhalten wir mit  $|\nabla h| \leq 1$  und Gleichung (3.32) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |h(\Gamma_\varepsilon(s)) - h(\Gamma_\varepsilon(t))| &\leq |\Gamma_\varepsilon(s) - \Gamma_\varepsilon(t)| \\ &\leq |s - t|^{\frac{1}{2}} \cdot |\Gamma'_\varepsilon|_{L^2} \\ &\leq |s - t|^{\frac{1}{2}} \cdot D \end{aligned} \quad (3.33)$$

Das impliziert

$$\begin{aligned} B_\varepsilon''' &= \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^2(\Gamma_\varepsilon)} ds \\ &\geq \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{\left( h(\Gamma_\varepsilon(t)) + |s - t|^{\frac{1}{2}} \cdot D \right)^2} ds \\ &= \int_{-\delta''}^{\delta''} \frac{1}{\left( h(\Gamma_\varepsilon(0)) + |s|^{\frac{1}{2}} D \right)^2} ds \\ &= 2 \int_0^{\delta''} \frac{1}{\left( h(\Gamma_\varepsilon(0)) + s^{\frac{1}{2}} D \right)^2} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int_0^{\delta''} \frac{1}{h^2(\Gamma_\varepsilon(0)) + sD^2} ds \\
&= \left[ \frac{1}{D^2} \cdot \log(h^2(\Gamma_\varepsilon(0)) + sD^2) \right]_0^{\delta''} \\
&= \frac{1}{D^2} \log(h^2(\Gamma_\varepsilon(0)) + \delta''D^2) - \frac{1}{D^2} \log(h^2(\Gamma_\varepsilon(0)) + 0) \\
&= \frac{1}{D^2} \log\left(1 + \frac{\delta''D^2}{h^2(\Gamma_\varepsilon(0))}\right).
\end{aligned}$$

Bis auf Übergang zu einer Teilfolge gilt für  $\varepsilon \rightarrow 0$  die Konvergenz  $h(\Gamma_\varepsilon(0)) \rightarrow 0$  nach Gleichung (3.32). Daher folgt  $B_\varepsilon''' \rightarrow +\infty$  und damit gilt insgesamt  $B_\varepsilon \rightarrow +\infty$ . Folglich ist Gleichung (3.26) erfüllt.  $\square$

### 3.4. Konstante Kurve

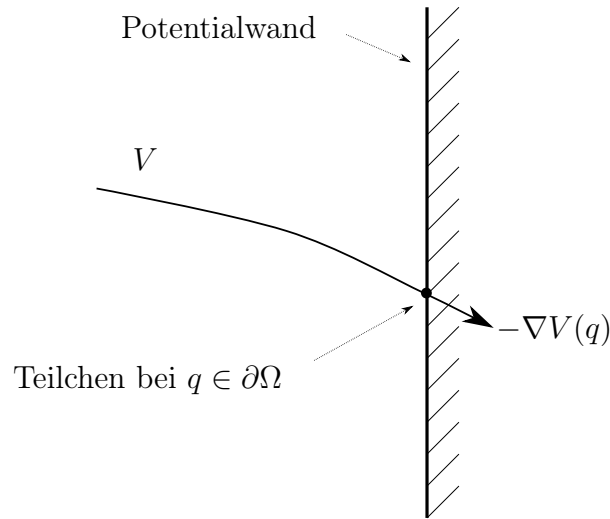
Als nächstes wollen wir uns den Fall in Proposition 3.2.1 anschauen, bei dem die Perioden  $\tau_\varepsilon$  eines kritischen Punktes  $(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$  des Free-time-Wirkungsfunktionals  $\mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}$  gegen Null tendieren.

**Proposition 3.4.1.** *Sei  $K > 0$  und  $(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$  ein kritischer Punkt von  $\mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}$ , wobei  $E_\varepsilon \leq K$  und  $\tau_\varepsilon \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dann konvergiert  $\Gamma_\varepsilon$  bis auf Übergang zu einer Teilfolge für  $\varepsilon \rightarrow 0$  in  $C^0$  gegen eine konstante Kurve  $\gamma \equiv q \in \bar{\Omega}$ . Darüber hinaus gilt eine der folgenden Aussagen:*

- (i)  $q$  ist ein kritischer Punkt des Potentials  $V$ .
- (ii)  $q$  liegt in  $\partial\Omega$  und dort existiert ein  $a > 0$ , sodass  $\nabla V(q) = -a\nu(q)$ , wobei  $\nu$  die äußere Normale zu  $\partial\Omega$  ist.

*Bemerkung 3.4.2.* Mit Hilfe dieser Proposition kreieren wir in Abschnitt 4.4 im Beweis des Theorems 2.2.1 einen Widerspruch.

*Bemerkung 3.4.3.* Im Fall (ii) der Proposition 3.4.1 beschreibt die stationäre Kurve  $\gamma(t) \equiv q \in \bar{\Omega}$  ein Teilchen, welches durch eine Potentialwand begrenzt wird. Das können wir in der Abbildung 3.4 sehen.



**Abbildung 3.4.:** Ein Teilchen begrenzt durch das Potential  $V$ .

*Beweis.* Wir wählen eine Folge positiver ganzer Zahlen  $\{\kappa_\varepsilon\}$ , sodass  $T_1 < \kappa_\varepsilon \tau_\varepsilon < T_2$  für geeignete  $T_2 > T_1 > 0$  gilt und wir definieren  $(\Theta_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in H^1(S^1; \bar{\Omega}) \times \mathbb{R}_{>0}$  durch  $\Theta_\varepsilon(t) := \Gamma_\varepsilon(\kappa_\varepsilon t)$  und  $\sigma_\varepsilon := \kappa_\varepsilon \tau_\varepsilon$ . Dann ist  $(\Theta_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  ebenfalls ein kritischer Punkt des Funktionals  $\mathcal{L}_\varepsilon^{E_\varepsilon}$ . Proposition 3.2.1 auf Seite 11 impliziert dann bis auf Übergang zu einer Teilfolge die Konvergenz von  $(\Theta_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$  gegen einen Punkt  $(\Theta, \sigma)$  in  $H^1(S^1; \bar{\Omega}) \times \mathbb{R}_{>0}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Insbesondere gilt  $\Theta_\varepsilon \rightarrow \Theta$  in  $C^0$ .

Wir behaupten, dass  $\Theta$  eine konstante Kurve ist. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass  $t_1 < t_2$  existieren, sodass

$$|\Theta(t_1) - \Theta(t_2)| > 0 \quad (3.34)$$

gilt,  $\Theta$  also nicht konstant ist. Jedes  $\Theta_\varepsilon$  ist  $\kappa_\varepsilon^{-1}$ -periodisch und insbesondere gilt die Gleichung  $\Theta_\varepsilon(t_2) = \Theta_\varepsilon(t_2 - j \cdot \kappa_\varepsilon^{-1})$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Da  $\kappa_\varepsilon \rightarrow \infty$ , können wir eine Folge positiver ganzer Zahlen  $\{j_\varepsilon\}$  finden, sodass  $j_\varepsilon \kappa_\varepsilon^{-1} \rightarrow t_2 - t_1$ . Zusammen mit der  $C^0$ -Konvergenz von  $\Theta_\varepsilon \rightarrow \Theta$  impliziert dies

$$\begin{aligned} \Theta(t_1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_\varepsilon(t_1) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_\varepsilon(t_2 - j_\varepsilon \kappa_\varepsilon^{-1}) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Theta_\varepsilon(t_2) \\ &= \Theta(t_2). \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass  $|\Theta(t_1) - \Theta(t_2)| > 0$  gilt. Also ist  $\Theta$  konstant.

Da jede Kurve  $\Theta_\varepsilon$  eine Iteration von  $\Gamma_\varepsilon$  ist, muss zwangsläufig auch  $\Gamma_\varepsilon$  in  $C^0$  gegen die gleiche konstante Kurve  $\Gamma = \Theta \equiv q \in \bar{\Omega}$  konvergieren. Dann liefert das Integral aus Punkt (i) in Proposition 3.2.1 für alle  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}/\sigma\mathbb{Z}; \mathbb{R}^n)$  die Gleichung

$$-\int_0^\sigma \langle \nabla V(q), \psi \rangle dt = \int_{\mathcal{C}} \langle \nu(q), \psi \rangle d\mu. \quad (3.35)$$

Falls  $q \in \Omega$ , ist  $\mathcal{C} = \emptyset$  und somit gilt für alle  $\psi$ :

$$-\int_0^\sigma \langle \nabla V(q), \psi \rangle dt = 0 \quad (3.36)$$

Folglich ist  $\nabla V(q) = 0$  und  $q$  ein kritischer Punkt von  $V$ . Falls  $q$  in  $\partial\Omega$  liegt, ist  $\mathcal{C} = \mathbb{R}/\sigma\mathbb{Z}$  und daher existiert ein  $a > 0$ , sodass  $\nabla V(q) = -a\nu(q)$ . Daraus resultiert die Aussage dieser Proposition.  $\square$

Damit beschließen wir den Abschnitt und verwenden das konstruierte Approximationsschema im Nachfolgenden.



## 4. Existenz magnetischer Anstoßorbits

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, die gesuchte Folge von kritischen Punkten des Free-time-Wirkungsfunktionals zu finden. Wir beginnen damit, das Lagrange-System via Legendre-Dualität in ein Hamiltonsches System zu übersetzen. Mit Hilfe der dadurch erhaltenen symplektischen Sprache zeigen wir die Existenz dieser kritischen Punkte und wenden darauf unsere Ergebnisse aus Kapitel 3 an. Dadurch erhalten wir schließlich den Beweis von Theorem 2.2.1.

### 4.1. Hamiltonsche Formulierung

Zuerst führen wir das Kotangentialbündel ein. Weitere Details finden sich in [MS98], [Zeh10] sowie in [HZ94]. Wir erinnern an die  $n$ -dimensionale zuvor betrachtete Mannigfaltigkeit  $\Omega$  und definieren das Kotangentialbündel

$$\pi: T^*\Omega \rightarrow \Omega.$$

Für alle  $(q, p) \in T^*\Omega$  gilt  $\pi(q, p) := q$ . Das Differential von  $\pi$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} D\pi(q, p): T_{(q,p)}T^*\Omega &\longrightarrow T_{\pi(q,p)}\Omega = T_q\Omega \\ (\hat{q}, \hat{p}) &\longmapsto \hat{q}. \end{aligned}$$

Die kanonische 1-Form  $\lambda$  auf  $T^*\Omega$  ist für alle  $v \in T_{(q,p)}T^*\Omega$  durch

$$\lambda_{(q,p)}(v) := p_q(D\pi(q, p)(v)) \tag{4.1}$$

gegeben und heißt **Liouville-Form**. Seien  $(q_1, \dots, q_n)$  lokale Koordinaten auf  $\Omega$  und  $(p_1, \dots, p_n)$  zugehörige kotangentiale Koordinaten. Dann können wir die Liouville-Form als

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$$

schreiben. Damit bildet das Kotangentiale Bündel vermöge der symplektischen Form

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i = d\lambda$$

eine symplektische Mannigfaltigkeit.

Nun fügen wir ein magnetisches Feld hinzu, indem wir eine gedrehte Form auf dem Kotangentiale Bündel  $T^*\Omega$  betrachten. Sei dazu  $\sigma$  wie zuvor eine geschlossene 2-Form auf der Menge  $\Omega$  (vgl. Abschnitt 2.1). Dann behaupten wir:

**Lemma 4.1.1.** *Die 2-Form*

$$\omega_\sigma := \omega_0 + \pi^* \sigma$$

*ist eine symplektische Form auf dem Kotangentiale Bündel  $T^*\Omega$ .*

*Beweis.* Die 2-Form  $\omega_\sigma$  ist offenbar eine Bilinearform als Summe von Bilinearformen. Zudem ist sie nach folgender Rechnung geschlossen:

$$\begin{aligned} d\omega_\sigma &= d(\omega_0 + \pi^* \sigma) \\ &= d\omega_0 + d\pi^* \sigma \\ &= \pi^*(d\sigma) = 0 \end{aligned}$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass  $\omega_\sigma$  punktweise nicht-degeneriert ist. Dafür betrachten wir kanonische lokale Koordinaten  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  auf  $T^*\Omega$ . Dann gilt für alle  $v \in T_{(q,p)} T^*\Omega$  und für alle  $i = 1, \dots, n$ :

$$\pi^* \sigma \left( \frac{\partial}{\partial p_i}, v \right) = 0$$

Dementsprechend genügt es für eine Basisdarstellung  $\frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_i}$  von  $T_{(q,p)}T^*\Omega$  einen Vektor  $v \in T_{(q,p)}T^*\Omega$  zu finden, sodass

$$\omega_\sigma \left( \frac{\partial}{\partial q_i}, v \right) \neq 0.$$

Dies ist für  $v := \frac{\partial}{\partial p_i}$  erfüllt:

$$\omega_\sigma \left( \frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \right) = \underbrace{\omega_0 \left( \frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \right)}_{=-1} + \underbrace{\pi^* \sigma \left( \frac{\partial}{\partial q_i}, \frac{\partial}{\partial p_i} \right)}_{=0} \neq 0$$

□

Damit definieren wir die *gedrehte symplektische Form*.

**Definition 4.1.2.** Wir nennen die symplektische Form  $\omega_\sigma$  **gedrehte symplektische Form** und die 2-Form  $\sigma$  nennen wir **magnetische Form**.

Im Folgenden schränken wir unsere Betrachtungen dahingehend ein, dass die 2-Form  $\sigma$  eine exakte Form ist, das heißt, es existiert eine 1-Form  $\alpha$ , sodass  $\sigma = d\alpha$  gilt.

*Bemerkung 4.1.3.* Falls  $\sigma$  nicht exakt ist, erhalten wir keine Lagrange-Formulierung und somit kein Approximationsschema. Zudem müssen die Energiehyperflächen nicht vom Kontakttyp sein, vergleiche [AM11].

Mit Hilfe der Legendre-Transformation lässt sich die Lagrangesche Beschreibung auf dem Tangentialbündel aus dem Abschnitt 3.1 auf das Kotangentialbündel übertragen. Dadurch erhalten wir das gewünschte Hamiltonsche Setup.

**Lemma 4.1.4.** Sei  $L_\varepsilon$  die Lagrange-Funktion definiert in Gleichung (3.4) auf Seite 8. Dann ist das Legendre-Dual  $H_\alpha^\varepsilon: T^*\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$H_\alpha^\varepsilon(q, p) = \frac{1}{2}|p - \alpha_q|^2 + V(q) + \varepsilon \cdot U(q),$$

wobei  $\alpha$  die oben genannte 1-Form beschreibt.

*Beweis.* Nach [Maz11] auf Seite 6 kann man die Legendre-Transformierte  $H_\alpha^\varepsilon$  zu der Lagrange-Funktion  $L_\varepsilon$  definiert in Gleichung (3.4) durch die Gleichung

$$H_\alpha^\varepsilon \left( q, \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v}(q, v) \right) = \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v}(q, v) \cdot v - L_\varepsilon(q, v)$$

bestimmen. Wir betrachten das Vektorfeld  $X: \Omega \rightarrow T\Omega$ , welches für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  eindeutig durch

$$\alpha_q(v) = \langle X(q), v \rangle$$

definiert ist. Dann gilt

$$\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v}(q, v)(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle + \alpha_q(\cdot) = \langle v, \cdot \rangle + \langle X(q), \cdot \rangle = \langle v + X(q), \cdot \rangle.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} H_\alpha^\varepsilon \left( q, \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v}(q, v) \right) &= H_\alpha^\varepsilon (q, \langle v + X(q), \cdot \rangle) \\ &= |v|^2 + \alpha_q(v) - \frac{1}{2}|v|^2 - \alpha_q(v) + V(q) + \varepsilon \cdot U(q) \\ &= \frac{1}{2}|v|^2 + V(q) + \varepsilon \cdot U(q) \end{aligned}$$

und somit erhalten wir die Behauptung

$$H_\alpha^\varepsilon(q, p) = \frac{1}{2}|p - \alpha_q|^2 + V(q) + \varepsilon \cdot U(q).$$

□

Damit können wir die Bewegung im magnetischen Feld bezüglich der kanonischen symplektischen Form  $\omega_0$  auf dem Kotangentialbündel  $T^*\Omega$  beschreiben. Aufgrund der Legendre-Dualität stehen die  $\tau$ -periodischen Hamiltonschen Orbits  $v: \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n$  von  $H_\alpha^\varepsilon$  in Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit den  $\tau$ -periodischen Lösungen  $\gamma = \pi(v)$  des Euler-Lagrange-Systems von  $L_\varepsilon$  via der Projektion  $\pi: T^*\Omega \rightarrow \Omega$  definiert durch  $(q, p) \mapsto q$ , vergleiche dazu Lemma 1.3 auf Seite 14 in [MS98].

Es ist auch möglich, eine Hamilton-Funktion bezüglich der gedrehten symplektischen Form zu definieren. Dafür betrachten wir das folgende Transformationsgesetz für Hamiltonsche Vektorfelder.

**Satz 4.1.5.** Sei  $\phi: (T^*\Omega, \omega_\sigma) \rightarrow (T^*\Omega, \omega_0)$  ein Symplektomorphismus und  $X_{H_\alpha^\varepsilon}$  das Hamiltonsche Vektorfeld auf  $T^*\Omega$  bezüglich  $\omega_0$  generiert durch die Hamilton-Funktion  $H_\alpha^\varepsilon$ . Dann wird  $X_{H_\alpha^\varepsilon}$  unter  $\phi$  auf ein Hamiltonsches Vektorfeld

$$X_{H_\sigma^\varepsilon} := \phi^* X_{H_\alpha^\varepsilon}$$

bezüglich  $\omega_\sigma$  abgebildet, das die Funktion  $H_\sigma^\varepsilon: T^*\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$H_\sigma^\varepsilon := H_\alpha^\varepsilon \circ \phi$$

als Hamilton-Funktion besitzt.

Einen Beweis zu diesem Satz kann man in [HZ94] auf Seite 9 nachlesen. Wir zeigen nun, dass ein solcher Symplektomorphismus existiert.

**Lemma 4.1.6.** Die Abbildung  $\phi: (T^*\Omega, \omega_\sigma) \rightarrow (T^*\Omega, \omega_0)$  gegeben durch

$$\phi(q, p) := (q, p + \alpha_q)$$

ist ein Symplektomorphismus.

*Beweis.* Wir wissen, dass auf dem Kotangentialbündel  $\omega_0 = d\lambda$  erfüllt ist. Daher zeigen wir  $\phi^*\lambda = \lambda + \pi^*\alpha$ , denn daraus folgt

$$\phi^*\omega_0 = \phi^*(d\lambda) = d(\phi^*\lambda) = d(\lambda + \pi^*\alpha) = \omega_0 + \pi^*d\alpha = \omega_0 + \pi^*\sigma = \omega_\sigma.$$

Sei also  $(q, p) \in T^*\Omega$  und sei  $v \in T_{(q,p)}T^*\Omega$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi^*\lambda_{(q,p)}(v) &= \lambda_{\phi(q,p)}(D\phi(q,p)(v)) \\ &= \lambda_{(q,p+\alpha_q)}(D\phi(q,p)(v)) \\ &= (p + \alpha_q)_q \circ \underbrace{D\pi(q, p + \alpha_q) \circ D\phi(q, p)}_{D(\pi \circ \phi)(q,p)}(v) \\ &= p_q \circ D(\pi(q, p))(v) + \alpha_q \circ D(\pi(q, p))(v) \\ &= \lambda_{(q,p)}(v) + \pi^*\alpha_q(v) \\ &= (\lambda + \pi^*\alpha)_{(q,p)}(v). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass  $\phi$  ein Symplektomorphismus ist. □

Demzufolge erhalten wir die Hamilton-Funktion  $H_\sigma^\varepsilon: T^*\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  vermöge

$$H_\sigma^\varepsilon(q, p) := \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + \varepsilon \cdot U(q)$$

bezüglich der gedrehten symplektischen Form  $\omega_\sigma$ . Zu dieser Hamilton-Funktion berechnen wir nun das Hamiltonsche Vektorfeld.

**Lemma 4.1.7.** *Das Hamiltonsche Vektorfeld zu  $H_\sigma^\varepsilon = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + \varepsilon \cdot U(q)$  mit der symplektischen Form  $\omega_\sigma$  ist komponentenweise gegeben durch*

$$X_{H_\sigma^\varepsilon} = p_k \frac{\partial}{\partial q_k} - \left( \sum_{j=1}^n p_j \sigma_{jk}(q) + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \varepsilon \cdot \frac{\partial U}{\partial q_k} \right) \frac{\partial}{\partial p_k},$$

wobei  $\sigma_{jk}(q) := \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_j}(q) - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_k}(q)$ .

*Beweis.* Das Hamiltonsche Vektorfeld ist definiert durch  $\omega_\sigma(X_{H_\sigma^\varepsilon}, \cdot) = -dH_\sigma^\varepsilon(\cdot)$ . Es gilt

$$dH_\sigma^\varepsilon = \sum_{i=1}^n \left[ p_i dp_i + \frac{\partial V}{\partial q_i}(q) dq_i + \varepsilon \cdot \frac{\partial U}{\partial q_i}(q) dq_i \right].$$

Wir können die 1-Form  $\alpha$  auf  $\bar{\Omega}$  mit Funktionen  $\alpha_i: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , schreiben als

$$\alpha_q = \sum_{i=1}^n \alpha_i(q) dq_i.$$

Nach Voraussetzung ist die 2-Form  $\sigma$  exakt und definiert als  $\sigma := d\alpha$ . Aus Bemerkung 2.1.1 auf Seite 4 erhalten wir die symplektische Form

$$\omega_\sigma = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ji}(q) dq_j \wedge dq_i.$$

Wir machen den folgenden Ansatz:

$$X_{H_\sigma^\varepsilon} = \sum_{k=1}^n \left[ A_k \frac{\partial}{\partial p_k} + B_k \frac{\partial}{\partial q_k} \right]$$

Das liefert

$$\omega_\sigma(X_{H_\sigma^\varepsilon}, \cdot) = \sum_{i=1}^n [A_i dq_i - B_i dp_i] + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n B_k \sigma_{ki}(q) dq_i - \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n B_k \sigma_{jk}(q) dq_j.$$

Somit folgt  $B_i = p_i$  und  $A_i = -\sum_{k=1}^n p_k \sigma_{ki}(q) - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}$ . Dadurch, dass  $\omega_\sigma$  nicht-degeneriert ist, erhalten wir das in der Behauptung angegebene Hamiltonsche Vektorfeld.  $\square$

Wir zeigen jetzt:

**Lemma 4.1.8.** *Jeder Energiewert  $E > \max_{\bar{\Omega}} V$  ist ein regulärer Wert der Hamiltonschen Funktion  $H_\sigma^\varepsilon$ , vorausgesetzt  $\varepsilon > 0$  ist genügend klein.*

*Beweis.* Um zu zeigen, dass jeder Energiewert  $E$  ein regulärer Wert von  $H_\sigma^\varepsilon$  ist, müssen wir nach Definition prüfen, dass für alle  $(\tilde{q}, \tilde{p}) \in (H_\sigma^\varepsilon)^{-1}(E)$  die Abbildung

$$\text{grad}H_\sigma^\varepsilon(q, p): \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

surjektiv ist. Wir stellen fest, dass

$$\text{grad}H_\sigma^\varepsilon(q, p) = \begin{pmatrix} \nabla V(q) + \varepsilon \nabla U(q) \\ p \end{pmatrix}.$$

Daher ist die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon = \{H_\sigma^\varepsilon = E\}$  regulär, solange

$$\Upsilon_\varepsilon := \partial(\pi(\Sigma_\varepsilon)) = \{V + \varepsilon U = E\} \subset \mathbb{R}^n$$

keine kritischen Punkte des Potentials  $V + \varepsilon U$  enthält. Andernfalls wäre der Gradient  $\text{grad}H_\sigma^\varepsilon(q, p) = 0$  für  $p = 0$ . In der Tat ist dies immer sichergestellt für genügend kleines  $\varepsilon > 0$ . Für  $q \in \Upsilon_\varepsilon$  gilt

$$h^2(q) = \frac{\varepsilon}{E - V(q)} \tag{4.2}$$

und deshalb

$$\begin{aligned} |\nabla V(q) + \varepsilon \cdot \nabla U(q)| &\geq |\varepsilon \nabla U(q)| - |\nabla V(q)| \\ &= \frac{2\varepsilon}{h^3(q)} |\nabla h(q)| - |\nabla V(q)| \\ &= 2\varepsilon^{-1/2} (E - V(q))^{3/2} |\nabla h(q)| - |\nabla V(q)| \\ &\geq 2\varepsilon^{-1/2} (E - \max_{\bar{\Omega}} V)^{3/2} |\nabla h(q)| - |\nabla V(q)|. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nach Gleichung (4.2) tendiert  $h|_{\Upsilon_\varepsilon}$  uniform gegen 0 für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , denn es gilt

$$0 \leq h^2(q) = \frac{\varepsilon}{E - V(q)} \leq \frac{\varepsilon}{E - \max_{\bar{\Omega}} V}.$$

Daher folgt für genügend kleines  $\varepsilon > 0$ , dass

$$h|_{\Upsilon_\varepsilon} = \text{dist}_{\partial\Omega}|_{\Upsilon_\varepsilon}$$

gilt und somit per Definition von  $h$  die Norm des Gradienten  $|\nabla h| = 1 \geq \frac{1}{2}$  gilt. Das liefert mit (4.3) für alle  $q \in \Upsilon_\varepsilon$  folgende Abschätzung:

$$|\nabla V(q) + \varepsilon \nabla U(q)| \geq \varepsilon^{-1/2} (E - \max_{\bar{\Omega}} V)^{3/2} - |\nabla V(q)|$$

Daraus schließen wir, dass  $\nabla V + \varepsilon \nabla U(q)$  auf  $\Upsilon_\varepsilon$  für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  nicht verschwindet. Wir erhalten somit die Behauptung.  $\square$

Ab jetzt fixieren wir einen Energiewert  $E > \max_{\bar{\Omega}} V$  und betrachten  $\varepsilon > 0$  klein genug, sodass Lemma 4.1.8 erfüllt ist. Dann ist die Energiehyperfläche

$$\begin{aligned} \Sigma_\varepsilon &:= \{H_\sigma^\varepsilon = E\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + \varepsilon U(q) = E \right\} \subset \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

nach Lemma 4.1.8 eine glatte und nichtleere geschlossene Mannigfaltigkeit.

Wir stellen weiter fest, dass die Projektionsabbildung  $\pi: T^*\Omega = \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$  als stetige Abbildung die kompakte Menge  $\Sigma_\varepsilon$  auf ihr kompaktes Bild

$$\begin{aligned} \pi(\Sigma_\varepsilon) &= \pi(\{H_\sigma^\varepsilon = E\}) \\ &= \{V(q) + \varepsilon U(q) = E\} \\ &\subseteq \{\varepsilon U(q) \leq E\} =: \Omega_\varepsilon \end{aligned} \tag{4.4}$$

projiziert. Aus diesem Grund können wir das Potential  $\varepsilon U$  außerhalb der kompakten Menge  $\Omega_\varepsilon$  modifizieren und es zu einem globalen Potential  $U_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ausweiten, sodass  $U_\varepsilon = \varepsilon U$  auf  $\Omega_{\varepsilon/2}$ ,  $U_\varepsilon > E$  außerhalb von  $\Omega_{\varepsilon/2}$  und  $U \equiv E' > E$  außerhalb von  $\Omega$  gelten, vergleiche Abbildung 4.1. Analog weiten wir  $V$  zu  $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit kompaktem Träger aus, sodass  $V > -(E' - E)$ . Insbesondere gelten  $V + U_\varepsilon > E$  außerhalb von  $\Omega_\varepsilon$  und  $V + U_\varepsilon \equiv E'$  außerhalb einer kompakten Umgebung von  $\bar{\Omega}$ .



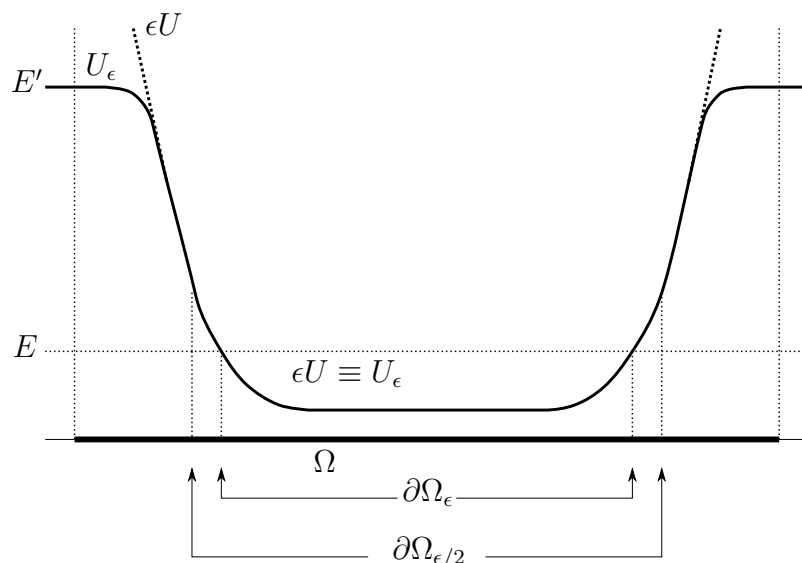


Abbildung 4.1.: Das Potential  $\varepsilon U$  und seine Modifikation  $U_\varepsilon$ .

Darüber hinaus kompaktifizieren wir aus technischen Gründen  $\mathbb{R}^n$  zu  $S^n$ , wobei

$$\text{vol}(S^n) \geq \text{vol}(\Omega)$$

gilt. Wir weiten auch die Funktionen  $U_\varepsilon$  und  $V$  zu glatten Funktionen auf  $S^n$  aus, behalten aber die Bezeichnungen  $U_\varepsilon$  bzw.  $V$  bei. Zuletzt modifizieren wir die Hamiltonsche Funktion  $H_\sigma^\varepsilon$  zu der Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} K_\varepsilon: T^*S^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (q, p) &\longmapsto \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + U_\varepsilon(q). \end{aligned} \tag{4.5}$$

*Bemerkung 4.1.9.* Es gilt  $\Sigma_\varepsilon = \{K_\varepsilon = E\}$  und die Hamiltonschen Flüsse von  $H_\sigma^\varepsilon$  und  $K_\varepsilon$  stimmen auf  $\Sigma_\varepsilon$  überein.

## 4.2. Restringierter Kontakttyp

Wir fixieren weiterhin  $E > \max_{\bar{\Omega}} V$ . Zusätzlich beschränken wir unsere Betrachtungen auf Energiewerte  $E > c(\alpha)$ , wobei  $c(\alpha)$  der Mañé-kritische Wert aus der Definition 2.1.5 ist. Des Weiteren setzen wir  $\alpha \equiv 0$  in dem Bereich  $\{\text{dist}_{\partial\Omega}(q) < 2d_0\}$ , wobei  $d_0$  wie in (3.1) auf Seite 7 gewählt ist. Das heißt, in dem Bereich, in dem das Potential  $U$  nicht konstant ist, gilt  $\alpha \equiv 0$ . Bildlich gesprochen schalten wir das Magnetfeld in der Nähe von  $\partial\Omega$  ab (vgl. Abbildung 4.2). Diese Bedingungen behalten wir für die gesamte weitere Arbeit bei.

Als nächstes zeigen wir, dass die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  unter diesen Voraussetzungen restringierten Kontakttyp besitzt. Weitere Informationen zur Kontaktgeometrie befinden sich in [Gei08].

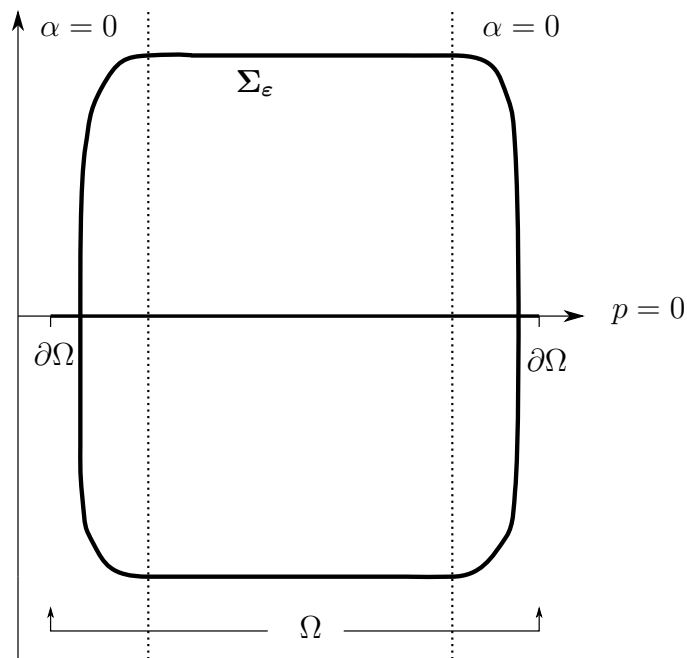


Abbildung 4.2.: Skizze der Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$ .

Wir zitieren das folgende Lemma aus [HZ94] im Kapitel 4.3.

**Lemma 4.2.1.** *Eine Primitive  $\lambda_\varepsilon$  der symplektischen Form  $\omega_\sigma$  schränkt sich genau dann auf eine Kontaktform auf der Energiefläche  $\Sigma_\varepsilon$  ein, wenn das assoziierte Liouville-Vektorfeld  $P_\varepsilon$ , definiert durch  $\omega_\sigma(P_\varepsilon, \cdot) = \lambda_\varepsilon(\cdot)$ , transversal zu  $\Sigma_\varepsilon$  ist.*

Mit Hilfe dieses Lemmas zeigen wir, dass die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  restringierten Kontakttyp hat.

**Proposition 4.2.2.** *Die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  hat restringierten Kontakttyp, das heißt, es existiert eine Primitive  $\lambda_\varepsilon$  der gedrehten symplektischen Form  $\omega_\sigma$  auf  $T^*S^n$ , sodass  $\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}$  eine Kontaktform ist.*

*Beweis.* Nach Lemma 4.2.1 gilt, dass eine Primitive  $\lambda_\varepsilon$  von  $\omega_\sigma$  sich genau dann zu einer Kontaktform auf  $\Sigma_\varepsilon$  einschränkt, wenn das assoziierte Liouville-Vektorfeld  $P_\varepsilon$ , definiert durch  $\omega_\sigma(P_\varepsilon, \cdot) = \lambda_\varepsilon(\cdot)$ , transversal zu  $\Sigma_\varepsilon$  ist. Das ist wiederum äquivalent zu der

Ungleichung  $\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon}) \neq 0$ , wobei  $X_{K_\varepsilon}$  das zu  $K_\varepsilon$  assoziierte Hamiltonsche Vektorfeld ist. In der Tat gilt

$$\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon}) = \omega_\sigma(P_\varepsilon, X_{K_\varepsilon}) = -\omega_\sigma(X_{K_\varepsilon}, P_\varepsilon) = dK_\varepsilon(P_\varepsilon)$$

und  $dK_\varepsilon(P_\varepsilon) \neq 0$  ist äquivalent dazu, dass  $P_\varepsilon$  transversal zu  $\Sigma_\varepsilon$  ist.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass  $\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon}) \neq 0$  auf  $\Sigma_\varepsilon$  gilt. Dafür verweisen wir auf die nachfolgende Proposition 4.2.4. Abschließend folgt, dass  $\Sigma_\varepsilon$  restringierten Kontakttyp besitzt.  $\square$

*Bemerkung 4.2.3.* Wir verweisen in dem Beweis der Proposition 4.2.2 auf die nachfolgende Proposition 4.2.4, denn in dem Beweis dieser Proposition zeigen wir sogar, dass  $\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})$  uniform in  $\varepsilon$  von unten von null weg beschränkt ist. Diese Aussage brauchen wir später für die Betrachtung des zugehörigen Reeb-Vektorfeldes.

**Proposition 4.2.4.** *Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  existiert eine 1-Form  $\lambda_\varepsilon$  auf dem Kotangentialbündel  $T^*S^n$  mit  $d\lambda_\varepsilon = \omega_\sigma$ , welche sich zu einer Kontaktform auf der Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon = \{K_\varepsilon = E\}$  einschränkt. Darüber hinaus gilt auf  $\Sigma_\varepsilon$  die uniforme Abschätzung*

$$\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon}) \geq \Lambda(E, \alpha, \delta) > 0, \quad (4.6)$$

wobei  $\Lambda(E, \alpha, \delta) > 0$  eine Konstante unabhängig von  $\varepsilon$  ist.

*Beweis.* Wir erinnern an die Liouville-Form  $\lambda$  auf dem Kotangentialbündel  $T^*S^n$  (vergleiche Gleichung (4.1) auf Seite 29), welche in lokalen Koordinaten  $(q, p)$  durch

$$\lambda = \sum_i p_i dq_i \quad (4.7)$$

definiert ist. Dadurch erhalten wir eine gedrehte 1-Form auf dem Kotangentialbündel  $T^*S^n$  gegeben durch

$$\tilde{\lambda} := \lambda + \pi^* \alpha.$$

Diese 1-Form ist ebenfalls eine Primitive der symplektischen Form  $\omega_\sigma$ , denn es gilt

$$d\tilde{\lambda} = \omega_0 + \pi^* \sigma = \omega_\sigma.$$

Nun betrachten wir die Funktion  $u_\varepsilon: T^*\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$u_\varepsilon(q, p) = dU_\varepsilon(q)[p] = \sum_i \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial q_i}(q) p_i. \quad (4.8)$$

Damit modifizieren wir die 1-Form  $\tilde{\lambda}$  nahe der Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  und erhalten die 1-Form

$$\lambda_\varepsilon := \tilde{\lambda} - C\varepsilon \cdot du = \tilde{\lambda} - C\varepsilon \cdot \sum_{i,j} \frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial q_i \partial q_j}(q) p_i dq_j - C\varepsilon \cdot \sum_i \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial q_i}(q) dp_i, \quad (4.9)$$

wobei  $C = C(E) > 0$  eine Konstante unabhängig von  $\varepsilon$  ist, die in Gleichung (4.11) fixiert wird. Damit ist wiederum  $\omega_\sigma = d\lambda_\varepsilon$  erfüllt und folglich auch  $\lambda_\varepsilon$  eine Primitive zu  $\omega_\sigma$ . Wir erinnern an das Hamiltonsche Vektorfeld zu der Hamiltonschen Funktion  $K_\varepsilon$

$$X_{K_\varepsilon} = \sum_k \left[ p_k \frac{\partial}{\partial q_k} - \left( \sum_j p_j \sigma_{jk}(q) + \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) \frac{\partial}{\partial p_k} \right],$$

welches wir in dem Lemma 4.1.7 berechnet haben. Durch Einsetzen des Hamiltonschen Vektorfeldes  $X_{K_\varepsilon}$  in die 1-Form  $\lambda_\varepsilon$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &= |p|^2 + \langle \alpha, p \rangle - C\varepsilon \sum_{i,j} \frac{\partial^2 U_\varepsilon}{\partial q_i \partial q_j} p_i p_j \\ &\quad + C\varepsilon \sum_i \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial q_i} \left[ \sum_j p_j \sigma_{ji}(q) + \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} \right]. \end{aligned}$$

Auf der Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  gilt  $U_\varepsilon = \varepsilon \cdot U$ . Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &= |p|^2 + \langle \alpha, p \rangle - C\varepsilon^2 \text{Hess } U(q)[p, p] \\ &\quad + C\varepsilon^2 \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \sum_j p_j \sigma_{ji}(q) + C\varepsilon^3 |\nabla U|^2 + C\varepsilon^2 \langle \nabla U, \nabla V \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Es gilt

$$\nabla U(q) = -2h^{-3}(q) \nabla h(q)$$

und die Funktion  $\text{Hess } U(q): \text{T}^*\Omega \times \text{T}^*\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$\text{Hess } U(q)[v, w] = -2h^{-3}(q)\text{Hess } h(q)[v, w] + 6h^{-4}(q) |\langle \nabla h, v \rangle| \cdot |\langle \nabla h, w \rangle|.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &= |p|^2 + \langle \alpha, p \rangle + 2C\varepsilon^2 h^{-3}(q)\text{Hess } h(q)[p, p] \\ &\quad - 6C\varepsilon^2 h^{-4}(q)|\langle \nabla h, p \rangle|^2 - 2C\varepsilon^2 h^{-3}(q) \sum_i \frac{\partial h}{\partial q_i}(q) \sum_j p_j \sigma_{ji}(q) \\ &\quad + 4C\varepsilon^3 h^{-6}(q)|\nabla h|^2 - 2C\varepsilon^2 h^{-3}(q)\langle \nabla h, \nabla V \rangle. \end{aligned}$$

Für  $(q, p) \in \Sigma_\varepsilon$  gilt  $E = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + \varepsilon \cdot U(q)$  und somit

$$h^2(q) = \frac{\varepsilon}{E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2}.$$

Die Funktionen  $\text{Hess } h(q): \text{T}^*\bar{\Omega} \times \text{T}^*\bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\text{Hess } h(q)[v, w] = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 h}{\partial q_i \partial q_j}(q) v_i w_j$$

sind bilinear, stetig in  $v, w$  und hängen stetig von  $q \in \bar{\Omega}$  ab. Daher können wir  $\kappa_q \geq 0$  so wählen, dass

$$\text{Hess } h(q)[v, w] \geq -\kappa_q |v| |w|,$$

wobei  $\kappa_q$  stetig von  $q$  abhängt. Dann gilt

$$\text{Hess } h(q)[v, w] \geq -\kappa |v| |w|$$

für  $\kappa$  unabhängig von  $q \in \Omega$ . Unter Beachtung von  $|\nabla h| \leq 1$  folgt damit

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &\geq |p|^2 + \langle \alpha, p \rangle - 6C\varepsilon^2 h^{-4}(q)|p|^2 \\ &\quad - 2C\varepsilon^2 h^{-3}(q)\kappa |p|^2 - 2C\varepsilon^2 h^{-3}(q) \sum_i \frac{\partial h}{\partial q_i}(q) \sum_j p_j \sigma_{ji}(q) \\ &\quad + 4C\varepsilon^3 h^{-6}(q)|\nabla h|^2 - 2C\varepsilon^2 h^{-3}(q)\langle \nabla h, \nabla V \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |p|^2 + \langle \alpha, p \rangle - 6C(E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2)^2 |p|^2 \\
&\quad - 2C\varepsilon^{1/2}\kappa|p|^2(E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2)^{3/2} \\
&\quad - 2C\varepsilon^{1/2}\nabla h(E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2)^{3/2} \sum_{i,j} p_j \sigma_{ji}(q) \\
&\quad + 4C(E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2)^3 |\nabla h|^2 \\
&\quad - 2C\varepsilon^{1/2}(E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2)^{3/2} \langle \nabla h, \nabla V \rangle \\
&= |p|^2 + \langle \alpha, p \rangle - 6C(E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2)^2 |p|^2 \\
&\quad + 4C(E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2)^3 |\nabla h|^2 \\
&\quad - 2C\varepsilon^{1/2}(E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2)^{3/2} \left[ \kappa|p|^2 + \nabla h \sum_{i,j} p_j \sigma_{ji} + \langle \nabla h, \nabla V \rangle \right].
\end{aligned}$$

Jetzt fordern wir, dass  $C = C(E) > 0$  die Ungleichung

$$6C(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2 < 1 \quad (4.11)$$

erfüllt. Dann können wir weiter abschätzen

$$\begin{aligned}
\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &\geq |p|^2 + \langle \alpha, p \rangle - 6C(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2 |p|^2 \\
&\quad + 4C(E - \max_{\bar{\Omega}} V - \frac{1}{2}|p|^2)^3 |\nabla h|^2 - c_\varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei

$$c_\varepsilon := 2C\varepsilon^{1/2}(E - \min_{\bar{\Omega}} V(q))^{3/2} \left[ 2\kappa(E - \min_{\bar{\Omega}} V) + \nabla h \sum_{i,j} p_j \sigma_{ji} + \max_{\bar{\Omega}} |\nabla V| \right].$$

Da auf der Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  die Gleichung  $|p|^2 = 2(E - V(q) - \varepsilon U(q))$  erfüllt ist, ist  $|p|$  beschränkt. Des Weiteren gilt  $|\sigma| < \infty$  auf dem beschränkten Gebiet  $\bar{\Omega}$ . Folglich erhalten wir für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dass  $c_\varepsilon \rightarrow 0$  gilt.

Nun unterscheiden wir drei Fälle. Zuerst betrachten wir den Bereich

$$\Sigma_\varepsilon \cap \{U = \text{const.}\}.$$

In diesem Bereich gelten  $\nabla U = 0$  und die Inklusion  $\{\alpha \neq 0\} \subset (\Sigma_\varepsilon \cap \{U = \text{const.}\})$ . Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt aus Gleichung (4.10)

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &= |p|^2 + \langle \alpha, p \rangle \\ &\geq |p|^2 - |\alpha| \cdot |p| = |p| \cdot (|p| - |\alpha|). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt  $E > c(\alpha)$ . Daher können wir  $\delta > 0$  so wählen, dass

$$E > c(\alpha) + \delta$$

und

$$E > \max_{\Omega} V + \delta$$

gelten. Für  $U = \text{const.}$  finden wir ein  $\varepsilon > 0$ , sodass

$$\varepsilon \cdot U \leq \delta$$

erfüllt ist. Darüber hinaus ist  $p \neq 0$  für  $U = \text{const.}$ , denn es gilt

$$\frac{1}{2}|p|^2 = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + \varepsilon U(q) - V(q) - \varepsilon U(q) \geq E - \max_{\Omega} V - \delta > 0.$$

Aus der Ungleichung  $E > c(\alpha) + \delta$  folgt

$$E = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + \varepsilon U(q) > c(\alpha) + \delta > \frac{1}{2}|\alpha_q|^2 + V(q) + \delta \geq \frac{1}{2}|\alpha_q|^2 + V(q) + \varepsilon U(q).$$

Das ist äquivalent dazu, dass  $|p| > |\alpha|$  gilt. Die uniforme Abschätzung erhalten wir aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{2}|\alpha_q|^2 &= \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + \varepsilon U(q) - \frac{1}{2}|\alpha_q|^2 - V(q) - \varepsilon U(q) \\ &\geq E - \max_{\Omega} \left( \frac{1}{2}|\alpha|^2 + V \right) - \delta \\ &= E - c(\alpha) - \delta > 0. \end{aligned}$$

Als zweites untersuchen wir den Bereich

$$\Sigma_\varepsilon \cap \{|p|^2 \geq E - \max_{\Omega} V\} \cap \{\alpha = 0\}.$$

Hier gilt

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &\geq |p|^2(1 - 6C(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2) - c_\varepsilon \\ &\geq (E - \max_{\bar{\Omega}} V)(1 - 6C(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2) - c_\varepsilon.\end{aligned}$$

Zum Schluss betrachten wir den Bereich

$$\Sigma_\varepsilon \cap \{|p|^2 \leq E - \max_{\bar{\Omega}} V\} \cap \{\alpha = 0\}.$$

Für genügend kleines  $\varepsilon > 0$  gilt  $|\nabla h| = 1$ . Dafür zeigen wir, dass  $h(q) \leq d_0$  für alle  $q \in \Omega$  gilt, denn daraus folgt per Definition von  $h$  die Behauptung. Wir berechnen für genügend kleines  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}0 \leq h^2(q) &= \frac{\varepsilon}{E - V(q) - \frac{1}{2}|p|^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\frac{1}{2}(E - \max_{\bar{\Omega}} V)} \\ &= \frac{2\varepsilon}{E - \max_{\bar{\Omega}} V} \\ &< (d_0)^2.\end{aligned}$$

Somit gilt  $|\nabla h| = 1$ . Daher schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &\geq 4C \left( E - \max_{\bar{\Omega}} V - \frac{1}{2}|p|^2 \right)^3 \cdot |\nabla h|^2 - c_\varepsilon \\ &\geq 4C \left( E - \max_{\bar{\Omega}} V - \frac{1}{2}(E - \max_{\bar{\Omega}} V) \right)^3 - c_\varepsilon \\ &= \frac{1}{2}C \left( E - \max_{\bar{\Omega}} V \right)^3 - c_\varepsilon\end{aligned}$$

Da  $c_\varepsilon \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ , gilt für genügend kleines  $\varepsilon > 0$

$$\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} \geq \frac{1}{2} \cdot \min \left\{ \frac{1}{2}C(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^3, (E - \max_{\bar{\Omega}} V)(1 - 6C(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2), E - c(\alpha) - \delta \right\}.$$

Nun setzen wir

$$C := \frac{2}{(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^2 + 24(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2}. \quad (4.12)$$



Dann ist immer noch die Ungleichung (4.11) erfüllt, denn

$$6 \cdot \frac{2}{(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^2 + 24(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2} \cdot (E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2 < 1$$

ist äquivalent zu

$$(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^2 > 0.$$

Schließlich folgt mit (4.12) die Behauptung

$$\begin{aligned} \lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} &\geq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^3}{[(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^2 + 24(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2]}, \right. \\ &\quad \frac{(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^3 + (E - \max_{\bar{\Omega}} V - 1) \cdot 24(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2}{[(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^2 + 24(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2]}, \\ &\quad \left. E - c(\alpha) - \delta \right\} \\ &=: \Lambda(E, \alpha, \delta) > 0, \end{aligned}$$

denn wir betrachten nach Voraussetzung Energiewerte  $E > c(\alpha)$ , das heißt, insbesondere gilt  $E > \max_{\bar{\Omega}} V$ . Zudem ist

$$(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^3 > (E - \max_{\bar{\Omega}} V - 1) \cdot 24(E - \min_{\bar{\Omega}} V)^2.$$

äquivalent zu

$$23(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^2 \leq 24(E - \max_{\bar{\Omega}} V)^2.$$

Folglich ist  $\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} > 0$  uniform in  $\varepsilon$ . □

Sei nun  $R_\varepsilon$  das Reeb-Vektorfeld auf der Energiefläche  $\Sigma_\varepsilon$  eindeutig assoziiert zu der Kontaktform  $\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}$ , das heißt, es sind nach Definition des Reeb-Vektorfeldes

$$R_\varepsilon: T^*S^n \rightarrow TT^*S^n$$

die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $d\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}(R_\varepsilon, \cdot) = 0$  und
- $\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}(R_\varepsilon) = 1$

*Bemerkung 4.2.5.* Die Eindeutigkeit folgt direkt aus der Kontaktbedingung der Kontaktform, vergleiche dazu Seite 6 in [Gei08].

Nach Proposition 4.2.4 gilt  $\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}(X_{K_\varepsilon}) \neq 0$ . Wir haben schon in Proposition 4.2.2 gezeigt, dass die reguläre Energiefläche  $\Sigma_\varepsilon$  restringierten Kontakttyp besitzt. Sei  $P_\varepsilon$  wie zuvor das Liouville-Vektorfeld transversal zu  $\Sigma_\varepsilon$  und  $\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}$  die induzierte Kontaktform. Dann erhalten wir

$$\iota_{X_{K_\varepsilon}} d\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon} = d\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}(X_{K_\varepsilon}, \cdot) = \omega_\sigma|_{\Sigma_\varepsilon}(X_{K_\varepsilon}, \cdot) = -dK_\varepsilon(\cdot)|_{\Sigma_\varepsilon} = 0$$

und

$$\iota_{X_{K_\varepsilon}} \lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon} = \lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}(X_{K_\varepsilon}) = \omega_\sigma(P_\varepsilon, X_{K_\varepsilon}) = -\omega_\sigma(X_{K_\varepsilon}, P_\varepsilon) = dK_\varepsilon(P_\varepsilon) \neq 0.$$

Deshalb ist  $X_{K_\varepsilon}$  ein nicht verschwindendes Vielfaches des Reeb-Vektorfeldes  $R_\varepsilon$ , das heißt, das Hamiltonsche Vektorfeld  $X_{K_\varepsilon}$  und das Reeb-Vektorfeld  $R_\varepsilon$  unterscheiden sich nur durch Reparametrisierung. Insbesondere stimmen auch deren Orbits bis auf Reparametrisierung überein. Daher existiert  $r_\varepsilon: \Sigma_\varepsilon \rightarrow (0, \infty)$  mit  $X_{K_\varepsilon} = r_\varepsilon R_\varepsilon$  und es gilt offenbar  $\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}(X_{K_\varepsilon}) = r_\varepsilon \cdot \underbrace{\lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}(R_\varepsilon)}_{=1}$ . Nach Proposition 4.2.4 gilt

$$\Lambda(E, \alpha, \delta) \leq \lambda_\varepsilon|_{\Sigma_\varepsilon}(X_{K_\varepsilon}) = r_\varepsilon.$$

**Lemma 4.2.6.** *Sei  $v$  ein Reeb-Orbit der Periode  $T$  und  $\gamma_\varepsilon$  ein Hamiltonscher Orbit zu  $X_{K_\varepsilon}$  der Periode  $\tau_\varepsilon$ . Dann gilt*

$$\tau_\varepsilon \cdot \Lambda(E, \alpha, \delta) \leq T.$$

*Beweis.* Sei  $x(t)$  eine Lösung der Hamiltonschen Gleichung  $x'(t) = X_{K_\varepsilon}(x(t))$  mit der Periode  $\tau_\varepsilon$ . Es gilt  $X_{K_\varepsilon}(x(t)) = r_\varepsilon R_\varepsilon(x(t))$ . Reparametrisieren der Kurve liefert eine Lösung  $y(t) = x(t/r_\varepsilon)$  von  $R_\varepsilon(x(t))$ , da

$$\begin{aligned} y'(t) &= (r_\varepsilon)^{-1} x'(t/r_\varepsilon) \\ &= (r_\varepsilon)^{-1} X_{K_\varepsilon}(y(t)) \\ &= (r_\varepsilon)^{-1} r_\varepsilon R_\varepsilon(y(t)) \\ &= R_\varepsilon(y(t)). \end{aligned}$$

Diese Lösung  $y(t)$  von  $y'(t) = R_\varepsilon(y(t))$  hat die Periode  $T = r_\varepsilon \tau_\varepsilon \geq \Lambda(E, \alpha, \delta) \cdot \tau_\varepsilon$ , weil

$$y(T) = y(r_\varepsilon \tau_\varepsilon) = x(r_\varepsilon \tau_\varepsilon (r_\varepsilon)^{-1}) = x(\tau_\varepsilon)$$

gilt. Also folgt insbesondere  $T \geq \tau_\varepsilon \cdot \Lambda(E, \alpha, \delta)$ .  $\square$

*Bemerkung 4.2.7.* Hier haben wir die uniforme Abschätzung von  $\lambda_\varepsilon(X_{K_\varepsilon})|_{\Sigma_\varepsilon} > 0$  aus Proposition 4.2.4 verwendet.

### 4.3. Verschiebbarkeit

Als nächstes zeigen wir, dass die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  Hamiltonsch verschiebbar ist.

**Definition 4.3.1.** Die Energiefläche  $\Sigma_\varepsilon$  ist **Hamiltonsch verschiebbar**, wenn ein Hamiltonscher Diffeomorphismus  $\phi_G \in \text{Ham}_c(\mathbb{T}^*S^n)$  generiert durch eine Hamiltonsche Funktion mit kompaktem Träger  $G: S^1 \times \mathbb{T}^*S^n \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodass

$$\phi_G(\Sigma_\varepsilon) \cap \Sigma_\varepsilon = \emptyset$$

gilt.

Wir wissen, dass die Projektionsabbildung  $\pi: \mathbb{T}^*S^n \rightarrow S^n$  die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  in die kompakte Menge  $\Omega_\varepsilon := \{\varepsilon U(q) \leq E\}$  abbildet, vergleiche dazu Gleichung (4.4) auf Seite 36. Sei  $a: S^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion, die keine kritischen Punkte in  $\bar{\Omega}$  besitzt. Dann weiten wir  $a$  durch die Projektionsabbildung zu einer Funktion  $A := a \circ \pi: \mathbb{T}^*S^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Kotangentialbündel aus. Der Hamiltonsche Fluss von  $A$  verschiebt jede kompakte Menge in  $\mathbb{T}^*S^n|_{\bar{\Omega}}$ , insbesondere auch  $\Sigma_\varepsilon$ . Damit wir einen Hamiltonschen Diffeomorphismus in  $\text{Ham}_c(\mathbb{T}^*S^n)$  erhalten, schneiden wir die Funktion  $A$  nahe unendlich ab.

Als nächstes schätzen wir die Verschiebungsenergie von  $\Sigma_\varepsilon$  ab.

**Definition 4.3.2.** Die **Verschiebungsenergie** von  $\Sigma_\varepsilon$  ist für einen Hamiltonschen Diffeomorphismus  $\phi_G \in \text{Ham}_c(\mathbb{T}^*S^n)$  generiert durch eine Hamiltonsche Funktion mit kompaktem Träger  $G: S^1 \times \mathbb{T}^*S^n \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$e(\Sigma_\varepsilon) := \inf_G \left\{ \int_0^1 \left[ \max_{\mathbb{T}^*S^n} G(t, \cdot) - \min_{\mathbb{T}^*S^n} G(t, \cdot) \right] dt \mid \phi_G(\Sigma_\varepsilon) \cap \Sigma_\varepsilon = \emptyset \right\}.$$

Damit können wir folgendes Lemma formulieren.

**Lemma 4.3.3.** *Die Verschiebungsenergie von  $\Sigma_\varepsilon$  können wir durch*

$$e(\Sigma_\varepsilon) \leq 2 \left( 2E - 2 \min_{\bar{\Omega}} V \right)^{1/2} \text{diam}(\Omega)$$

abschätzen, wobei  $\text{diam}(\Omega)$  der Durchmesser von  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist und  $E$  unser fixierter Energiewert.

*Beweis.* Für die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  gilt  $\Sigma_\varepsilon = \{ \frac{1}{2}|p|^2 + V(q) + U_\varepsilon(q) = E \}$ . Dann setzen wir  $R := (2E - 2 \min_{\bar{\Omega}} V)^{1/2}$ . Dadurch, dass  $U_\varepsilon(q) \geq 0$  gilt, erhalten wir für den Ball  $B_R \subset \mathbb{R}^n$  um 0 mit dem Radius  $R$  die Inklusion

$$\Sigma_\varepsilon \subset \Omega \times B_R \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Zur Abschätzung der Verschiebungsenergie wählen wir einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $(v + \Omega) \cap \Omega = \emptyset$  gilt, und betrachten die Hamilton-Funktion

$$G(q, p) := \sum_i v_i p_i : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann ist der zugehörige Hamiltonsche Diffeomorphismus gegeben durch

$$\phi_G(q, p) = (q + v, p).$$

Dafür betrachten wir die in dem Lemma 4.1.7 bestimmte gedrehte symplektische Form:

$$\omega_\sigma = \sum_i dp_i \wedge dq_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij}(q) dq_i \wedge dq_j$$

Nun machen wir den Ansatz

$$X_G := \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_i r_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

für das Hamiltonsche Vektorfeld zu  $G$ . Das liefert wie in Lemma 4.1.7 den Ausdruck

$$\omega_\sigma(X_G, \cdot) = \sum_i [r_i dq_i - v_i dp_i] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_i \sigma_{ij}(q) dq_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} v_i \sigma_{ji}(q) dq_j.$$

Es muss  $dG(q, p) = \sum_i v_i dp_i$  gelten. Somit folgt  $r_i = \sum_k v_k \sigma_{ik}(q)$ . Also gilt

$$(q(t), p(t)) = (q(0) + tv, p(0) + tr)$$

und daher

$$G(q(t), p(t)) = v \cdot (p(0) + tr) = v \cdot p(0),$$

da  $\sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$  für alle  $i, k$  gilt. Insbesondere schiebt der Hamiltonsche Diffeomorphismus  $\phi_G$  die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  von sich selbst weg. Damit wir eine Hamiltonfunktion mit kompaktem Träger erhalten, machen wir einen Cut-Off bei  $G$  außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von  $\Omega \times B_R$ . Folglich können wir für alle  $\delta > 0$  die Verschiebungsenergie abschätzen durch:

$$\begin{aligned} e(\Sigma_\varepsilon) &\leq e(\Omega \times B_R) \\ &\leq \int_0^1 \left[ \max_{\Omega \times B_R} G(t, \cdot) - \min_{\Omega \times B_R} G(t, \cdot) \right] dt + \delta \\ &= \max_{\Omega \times B_R} G(q, p) - \min_{\Omega \times B_R} G(q, p) + \delta \\ &\leq \max_{\Omega \times B_R} |v| \cdot |p| - \min_{\Omega \times B_R} |v| \cdot |p| + \delta \\ &= 2R|v| + \delta \end{aligned}$$

Wählen wir jetzt den optimalen Vektor  $v$ , so erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Den Beweis für das folgende Theorem kann man in Theorem 4.9 in [CFP10] nachlesen.

**Theorem 4.3.4.** *Die Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  besitzt einen Reeb-Orbit  $v_\varepsilon: \mathbb{R}/T\mathbb{Z} \rightarrow \Sigma_\varepsilon$  mit der Periode  $T$ , welche durch die Verschiebungsenergie von  $\Sigma_\varepsilon$  beschränkt ist, das heißt, es gilt*

$$T \leq e(\Sigma_\varepsilon).$$

Wir erinnern uns, dass für einen Reeb-Orbit  $v_\varepsilon$  mit der Periode  $T$  der zugehörige Hamiltonsche Orbit von  $X_{K_\varepsilon}$  mit der Periode  $\tau_\varepsilon$  die Beziehung

$$\Lambda(E, \alpha, \delta) \cdot \tau_\varepsilon \leq T$$

erfüllt. Diese Abschätzung liefert uns gemeinsam mit Lemma 4.3.3 direkt durch Einsetzen das folgende Lemma.

**Lemma 4.3.5.** *Das Hamiltonsche Vektorfeld  $X_{K_\varepsilon}$  auf der Energiehyperfläche  $\Sigma_\varepsilon$  hat einen periodischen Orbit der Periode  $\tau_\varepsilon$ , welche die Abschätzungen*

$$\Lambda(E, \alpha, \delta) \cdot \tau_\varepsilon \leq T \leq e(\Sigma_\varepsilon) \leq 2 \left( 2E - 2 \min_{\bar{\Omega}} V \right)^{1/2} \text{diam}(\Omega)$$

und

$$\tau_\varepsilon \leq \frac{2(2E - 2 \min_{\bar{\Omega}} V)^{1/2} \cdot \text{diam}(\Omega)}{\Lambda(E, \alpha, \delta)}. \quad (4.13)$$

erfüllt.

Dieses Lemma impliziert, dass die zu der Lagrange-Funktion  $L_\varepsilon$  (vgl. Gleichung (3.4)) gehörige Euler-Lagrange-Gleichung eine Lösung  $\gamma_\varepsilon$  mit der Energie  $E_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) = E$  und der Periode  $\tau_\varepsilon$  aus der Gleichung (4.13) besitzt.

Als Abschluss dieses Kapitels statuieren wir folgende Proposition aus [AM11], Proposition 3.7. Mit Hilfe dieser Proposition können wir das Approximationsschema aus Kapitel 3 anwenden. Wir erhalten aus dieser Proposition insbesondere die Existenz der gesuchten kritischen Punkte, eine obere Schranke an die Periode der magnetischen Anstoßorbits sowie eine obere Schranke an den Morse-Index, welche wir zur Beschränkung der Kardinalität  $|\text{supp}(\mu)|$  des Trägers des Maßes  $\mu$  aus Proposition 3.3.1 benötigen.

**Proposition 4.3.6.** *Für jedes  $\varepsilon > 0$  und  $E > c(\alpha)$  existiert ein kritischer Punkt  $(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$  des Free-time-Wirkungsfunktionals  $\mathcal{L}_\varepsilon^E$  mit*

$$\tau_\varepsilon \leq \frac{2(2E - 2 \min_{\bar{\Omega}} V)^{1/2} \cdot \text{diam}(\Omega)}{\Lambda(E, \alpha, \delta)},$$

$$E_\varepsilon(\Gamma_\varepsilon(t/\tau_\varepsilon)) = E,$$

$$\mu_{\text{Morse}} \left( \Gamma_\varepsilon; \mathcal{L}_\varepsilon^E|_{H^1 \times \{\tau_\varepsilon\}} \right) \leq N + 1.$$

## 4.4. Beweis

Nun haben wir alle Hilfsmittel für den Beweis des Theorems 2.2.1 bereitgestellt.

*Beweis von Theorem 2.2.1.* Wir betrachten die Folge  $\{(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)\}$  kritischer Punkte des Free-time-Wirkungsfunktionals  $\mathcal{L}_\varepsilon^E$  gegeben in Proposition 4.3.6. Wir zeigen zuerst, dass die Folge  $\{\tau_\varepsilon\}$  uniform in  $\varepsilon$  von unten durch eine Konstante  $T_1 > 0$  beschränkt ist. Dazu nehmen wir an, dass für  $\varepsilon \rightarrow 0$  bis auf Übergang zu einer Teilfolge  $\tau_\varepsilon \rightarrow 0$  gilt. Dann folgern wir nach Proposition 3.4.1 auf Seite 26 bis auf weiteren Übergang zu einer Teilfolge, dass  $\Gamma_\varepsilon$  uniform gegen eine konstante Kurve  $\gamma \equiv q \in \bar{\Omega}$  tendiert mit der Energie  $E(\gamma) = V(q) = E$ , dass entweder  $q$  ein kritischer Punkt von  $V$  ist oder  $q \in \partial\Omega$  und  $\nabla V(q) = -a\nu(q)$  für ein  $a > 0$  und die äußere Normale  $\nu$  zu  $\partial\Omega$ . Dies widerspricht aber der Voraussetzung  $E > \max_{\bar{\Omega}} V$ .

Folglich erhalten wir zusammen mit Proposition 4.3.6:

$$0 < T_1 \leq \tau_\varepsilon \leq T_2 := \frac{2(2E - 2\min_{\bar{\Omega}} V)^{1/2} \cdot \text{diam}(\Omega)}{\Lambda(E, \alpha, \delta)}$$

Nach Proposition 3.2.1 auf Seite 11 wissen wir (bis auf weiteren Übergang zu einer Teilfolge) demzufolge, dass  $(\Gamma_\varepsilon, \tau_\varepsilon)$  in  $H^1(S^1; \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}_{>0}$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gegen  $(\Gamma, \tau)$  konvergiert. Sei nun  $\mu$  das Maß gegeben in Proposition 3.2.1. Nach Proposition 3.3.1 auf Seite 20 und mit der uniformen Schranke an den Morse-Index von  $\Gamma_\varepsilon$  aus Proposition 4.3.6 folgt:

$$|\text{supp}(\mu)| \leq N + 1$$

Deshalb ist nach Proposition 3.2.1 die  $\tau$ -periodische Kurve  $\gamma(t) := \Gamma\left(\frac{t}{\tau}\right)$  ein  $\tau$ -periodischer Orbit des Lagrange-Systems gegeben durch  $L$  mit der Energie  $E(\gamma) = E$  und höchstens  $N + 1$  Anstoßpunkten.  $\square$

## A. Ausgeführte Berechnungen

In diesem Anhangskapitel befinden sich detaillierte Ausführungen einiger langer Berechnungen, welche im Hauptteil aus Gründen der Übersichtlichkeit nur kurz notiert wurden.

### A.1. Differential des Wirkungsfunktionals

Auf Seite 9 in Gleichung (3.6) haben wir das Differential des Free-time-Wirkungsfunktionals angegeben. Zur Berechnung verwenden wir die Definition der Richtungsableitung.

$$\begin{aligned}
d\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau)(\Psi, \sigma) &= \frac{d}{d\Gamma} \mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau) \Psi + \frac{d}{d\tau} \mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau) \sigma \\
&= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma + s\Psi, \tau) + \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau + s\sigma) \\
&= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \tau \cdot \int_0^1 \left[ L_\varepsilon \left( \Gamma + s\Psi, \frac{1}{\tau}(\Gamma + s\Psi)' \right) + E \right] dt \\
&\quad + \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\tau + s\sigma) \cdot \int_0^1 \left[ L_\varepsilon \left( \Gamma, \frac{1}{\tau + s\sigma} \Gamma' \right) + E \right] dt \\
&= \tau \cdot \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial q} \left( \Gamma, \frac{1}{\tau} \Gamma' \right) \Psi + \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v} \left( \Gamma, \frac{1}{\tau} \Gamma' \right) \frac{1}{\tau} \Psi' \right] dt \\
&\quad + \sigma \cdot \int_0^1 \left[ L_\varepsilon \left( \Gamma, \frac{1}{\tau} \Gamma' \right) + E \right] dt + \tau \cdot \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v} \left( \Gamma, \frac{1}{\tau} \Gamma' \right) \cdot \left( -\frac{1}{\tau^2} \Gamma' \right) \cdot \sigma \right] dt \\
&= \tau \cdot \int_0^1 \left[ \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial q} \left( \Gamma, \frac{1}{\tau} \Gamma' \right) \Psi + \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v} \left( \Gamma, \frac{1}{\tau} \Gamma' \right) \frac{1}{\tau} \Psi' \right] dt \\
&\quad + \sigma \cdot \int_0^1 \left[ L_\varepsilon \left( \Gamma, \frac{1}{\tau} \Gamma' \right) + E - \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial v} \left( \Gamma, \frac{1}{\tau} \Gamma' \right) \frac{1}{\tau} \Gamma' \right] dt.
\end{aligned}$$



Nun setzen wir die Definition der modifizierten Lagrange-Funktion  $L_\varepsilon$  ein und erhalten

$$\begin{aligned}
& d\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau)(\Psi, \sigma) \\
&= \tau \cdot \int_0^1 \left[ \frac{1}{\tau} \left\langle \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}(\Gamma) \Gamma'_j \right]_{i=1, \dots, n}, \Psi \right\rangle \right. \\
&\quad - \langle \nabla V(\Gamma), \Psi \rangle - \langle \varepsilon \cdot \nabla U(\Gamma), \Psi \rangle \\
&\quad \left. + \frac{1}{\tau^2} \langle \Gamma', \Psi' \rangle + \frac{1}{\tau} \alpha_\Gamma(\Psi') \right] dt \\
&+ \sigma \cdot \int_0^1 \left[ E + \frac{1}{2\tau^2} |\Gamma'|^2 - V(\Gamma) - \varepsilon \cdot U(\Gamma) - \frac{1}{\tau^2} |\Gamma'|^2 \right] dt.
\end{aligned}$$

Die 1-Form  $\alpha$  bestimmt ein eindeutig definiertes Vektorfeld  $X: \Omega \rightarrow T\Omega$  durch

$$\alpha_\Gamma(\Psi') := \langle X(\Gamma), \Psi' \rangle,$$

wobei  $X(\Gamma) = (\alpha_1(\Gamma), \dots, \alpha_n(\Gamma))$ .

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \alpha_\Gamma(\Psi') dt &= \int_0^1 \langle X(\Gamma), \Psi' \rangle dt \\
&= - \int_0^1 \langle DX(\Gamma) \Gamma', \Psi \rangle dt \\
&= - \int_0^1 \left\langle \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j}(\Gamma) \Gamma'_j \right]_{i=1, \dots, n}, \Psi \right\rangle dt.
\end{aligned}$$

Dann definieren wir

$$Y_\Gamma(\Gamma') := \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_j}(\Gamma) - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_i}(\Gamma) \right) \Gamma'_j \right]_{i=1, \dots, n}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} d\mathcal{L}_\varepsilon^E(\Gamma, \tau)(\Psi, \sigma) &= \int_0^\tau \left[ \frac{1}{\tau^2} \langle \Gamma', \Psi' \rangle - \langle \frac{1}{\tau} Y_\Gamma(\Gamma') + \nabla V(\Gamma) + \varepsilon \nabla U(\Gamma), \psi \rangle \right] dt \\ &\quad + \frac{\sigma}{\tau} \int_0^\tau \left[ E - \frac{1}{\tau^2} |\Gamma'|^2 - V(\Gamma) - \varepsilon \cdot U(\Gamma) \right] dt. \end{aligned}$$

## A.2. Hölder-Ungleichung

Wir zeigen nun die Anwendung der Hölder-Ungleichung aus Proposition 3.3.1. Es gilt für die erste Abschätzung mit Hilfe der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} & \frac{6T_1\varepsilon}{2(2\delta'')^{1/3}} \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^3(\Gamma_\varepsilon(s))} ds \right)^{4/3} \\ & \leq \frac{6T_1\varepsilon}{2(2\delta'')^{1/3}} \left( \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \left| \frac{1}{h^3(\Gamma_\varepsilon(s))} \right|^{4/3} ds \right)^{3/4} \cdot \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} |1|^4 ds \right)^{1/4} \right)^{4/3} \\ & = \frac{6T_1\varepsilon}{2(2\delta'')^{1/3}} \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \left| \frac{1}{h^4(\Gamma_\varepsilon(s))} \right| ds \right) \cdot ((2\delta'')^{1/4})^{4/3} \\ & = \frac{6T_1\varepsilon}{2} \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^4(\Gamma_\varepsilon(s))} ds \end{aligned}$$

Für die zweite Abschätzung mit der Hölder-Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\delta'')^{1/2}} \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^2(\Gamma_\varepsilon(s))} ds \right)^{3/2} \\ & \leq \frac{1}{(2\delta'')^{1/2}} \left( \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \left| \frac{1}{h^2(\Gamma_\varepsilon(s))} \right|^{3/2} ds \right)^{2/3} \cdot \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} 1^3 ds \right)^{1/3} \right)^{3/2} \\ & = \frac{1}{(2\delta'')^{1/2}} \left( \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^3(\Gamma_\varepsilon(s))} ds \right) \cdot (2\delta'')^{1/2} \\ & = \int_{t-\delta''}^{t+\delta''} \frac{1}{h^3(\Gamma_\varepsilon(s))} ds \end{aligned}$$

## Literaturverzeichnis

- [Abb13] A. Abbondandolo. Lectures on the free period lagrangian action functional. *J. fixed point theory appl.* 5, pages 397–430, 2013.
- [AD14] M. Audin and M. Damian. *Morse Theory and Floer Homology*. Springer London, 2014.
- [Ada75] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
- [AM11] P. Albers and M. Mazzucchelli. Periodic bounce orbits of prescribed energy. *International Mathematics Research Notices*, pages 3289–3314, 2011.
- [BG89] V. Benci and F. Giannoni. Periodic bounce trajectories with a low number of bounce points. *Annales de l’I.H.P. Analyse non linéaire*, pages 73–93, 1989.
- [CFP10] K. Cieliebak, U. Frauenfelder, and G.P. Paternain. Symplectic topology of mañé’s critical values. *Geometry & Topology* 14, pages 1765–1870, 2010.
- [CMP04] G. Contreras, L. Macarini, and G.P. Paternain. Periodic orbits for exact magnetic flows on surfaces. *International Mathematics Research Notices*, pages 361–387, 2004.
- [Gei08] H. Geiges. *An introduction to contact topology*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 2008.
- [HZ94] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Birkhäuser, 1994.
- [Maz11] M. Mazzucchelli. *Critical Point Theory for Lagrangian Systems*. Birkhäuser, 2011.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [MS98] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford University Press, 1998.

- [Tab05] S. Tabachnikov. *Geometry and Billiards*. Student Mathematical Library Vol.30, 2005.
- [Wer95] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 1995.
- [Zeh10] E. Zehnder. *Lectures on Dynamical Systems*. European Mathematical Society, 2010.

## Plagiatserklärung der Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über *Billards im Magnetfeld* selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, 9. Februar 2017

---

Anna-Maria Vocke

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Münster, 9. Februar 2017

---

Anna-Maria Vocke