

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Wissenschaftliche Arbeit im Fach
Mathematik

Die Definition der euklidischen
Geometrie über die Abstandsfunktion

23. November 2017

Autorin: Kira-Maria Rolli

Betreuer: Prof. Dr. Anna Wienhard
Dr. Andreas Ott

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
2	Wiederholung und Begriffsklärung aus der Analysis	5
2.1	Wichtige Grundideen für die Geometrie	5
2.2	Metrische Räume	5
2.3	Definitionen und Beispiele	6
2.3.1	Begriff der Norm und die euklidische Norm	7
2.3.2	Bemerkung	8
2.4	Zusammenhänge	8
2.4.1	Metrik und Abstand	9
2.4.2	Beispiele	9
2.4.3	Bemerkung	10
2.5	Der euklidische Abstand	10
3	Die ebene euklidische Geometrie - Punkte und Geraden	11
3.1	Vorwort	11
3.2	Die Abstandsaxiome	12
3.3	Die Geradenaxiome	14
4	Lineare Mengen	18
4.1	Definitionen für Lineare Mengen	18
4.2	Axiome für Lineare Mengen	19
4.3	Dreiecke	22
5	Strecken, Winkel und Kongruenzaxiome	24
5.1	Die Winkelaxiome	24
5.2	Das Ähnlichkeitsaxiom	30
5.3	Von Ähnlichkeit zu Kongruenz	32
5.4	Kongruenzaxiome	33
6	Das Kontinuitätsaxiom und das Axiom von Pasch	35
6.1	Axiom von Pasch	35
6.2	Kontinuitätsaxiom	37
7	Metrische Axiome für euklidische Räume und Hilberts Axiomensystem	38
7.1	Die Inzidenzaxiome	38
7.2	Die Axiome der Anordnung	39
8	Inkommensurabilität	41

9 Die Strahlensätze	49
9.1 Der Flächeninhalt eines Dreiecks	49
9.2 Erster Strahlensatz	51
9.3 Zweiter Strahlensatz	56
9.4 Dritter Strahlensatz	57
9.5 Anwendungsbeispiel	57
9.6 Strahlensätze für inkommensurable Strecken	58
10 Schulbezogener Teil	59
10.1 Aufgaben mit Anwendungsbezug - rein rechnerisch	60
10.2 Praktische Aufgaben mit Anwendungsbezug	65
11 Eigenständigkeitserklärung	71

1 Vorwort

Die folgende Arbeit, welche unter dem Titel „die Definition der euklidischen Geometrie über die Abstandsfunktion“ steht, soll einen Aufbau der Ebenen euklidischen Geometrie mit Hilfe der Abstandsfunktion ermöglichen. Es wird hierbei axiomatisch die ebene euklidische Geometrie mit Hilfe der Verbindung von zweier der Arbeit zugrunde liegender Hauptquellen [1] und [2] eingeführt werden. Bevor wir uns dem Kern der Thematik widmen, werden wir uns in Kapitel 2 zunächst einige Grundlagen aus der Analysis ins Gedächtnis rufen, welche die zentralen Begrifflichkeiten zum Verständnis der Arbeit enthalten und auf einfache Beispiele zurückgreifen. Im Anschluss wird im Hauptteil der Arbeit der axiomatische Aufbau der euklidischen Geometrie mit Hilfe der Abstandsfunktion im Fokus stehen. Zur Verifizierung dieser Axiome werden wir ein einfaches Modell betrachten, den \mathbb{R}^2 versehen mit dem Standardskalarprodukt, und hierbei Schritt für Schritt zeigen, dass wir hiermit ein Modell gefunden haben, welches offensichtlich unsere Axiome erfüllt. Diesen axiomatischen Aufbau beginnen wir zunächst in Kapitel 3 mit der Definition der ebenen euklidischen Geometrie durch die Einführung der Abstands- bzw. Geradenaxiome. Diese Axiome werden natürlich mit Hilfe der Abstandsfunktion dargestellt. Im Anschluss an die axiomatische Einführung mit Hilfe der Abstandsfunktion stellen wir im darauffolgenden Kapitel 4 die Thematik der linearen Mengen dar, welche wichtig für die vollständige Definition der euklidischen Geometrie sind. Im weiteren Verlauf ergänzen wir nun unsere bisherigen Axiome durch Strecken-, Winkel- und Kongruenzaxiome (Kapitel 5), bis wir schließlich als letzten axiomatischen Aspekt über das Axiom von Pasch zum Kontinuitätsaxiom gelangen (Kapitel 6). Im 7. Kapitel schauen wir uns exemplarisch an, inwiefern sich Hilberts Axiomensystem relativ einfach aus den hier über die Abstandsfunktion angeführten Axiomen ableiten lässt und wir somit die ebene Geometrie vollständig eingeführt haben. Nach dem theoretischen, axiomatischen Teil gehen wir dann in einen Anwendungsteil über, welcher sich mit dem Thema der Inkommensurabilität von Strecken (Kapitel 8) beschäftigt und den Beweis der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im regelmäßigen Pentagramm enthält. Als weiterer Anwendungspunkt steht dann die Formulierung und der Beweis der Strahlensätze im Vordergrund (Kapitel 9), welcher auch unter dem Aspekt betrachtet wird, ob denn die allgemein bekannten Strahlensätze auch für inkommensurable Strecken gelten. Zum Ende der Arbeit soll mit einer Orientierung an die vorangegangenen Kapitel versucht werden ein Schulbezug (Kapitel 10) herzustellen, welcher die Thematik der Abstände und Abstandsberechnung unter Berücksichtigung des alltäglichen Anwendungsbezugs versucht zu verknüpfen.

2 Wiederholung und Begriffsklärung aus der Analysis

2.1 Wichtige Grundideen für die Geometrie

Im Alltag denken wir nicht nur eindimensional, sondern oft auch in der Ebene, also in zwei Dimensionen, oder auch im Raum, also in drei Dimensionen. Reelle Zahlen entsprechen den Punkten der Zahlengeraden die wir schon aus der Schule kennen, diese ist jedoch eindimensional. Es gibt aber nicht nur die reellen Zahlen, den zwei oder dreidimensionalen reellen Raum, sondern auch den n -dimensionalen reellen Raum:

$$\mathbb{R}^n = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$$

In der folgenden Arbeit werden wir uns vor allem auf \mathbb{R} und \mathbb{R}^2 beziehen, dazu sind allerdings gewisse Grundlagen aus der Analysis 2 von Nöten. Zur Darstellung dieser Grundlagen greife ich im folgenden Kapitel auf die Quellen [15], [14], [5] und [12] zurück. Diese Eigenschaften lassen sich dann auch auf n Dimensionen übertragen, welche jedoch in der folgenden Arbeit nicht im Vordergrund stehen.

2.2 Metrische Räume

Ziel ist es nun die grundlegenden Komponenten, die wir für die reellen Zahlen kennengelernt haben auf den \mathbb{R}^n zu übertragen. Die beiden wichtigen Stichworte sind hier Konvergenz und Stetigkeit. Die Definition der Konvergenz schließt den Abstands begriff in sich ein und wird auch für den n dimensionalen reellen Raum eine sehr wichtige Rolle spielen. Konvergenz ist in jedem Kontext vorhanden, in dem ein Abstands begriff sinnvoll ist. Mengen mit einem Abstands begriff nennt man metrische Räume, die Idee dahinter ist Folgende: Funktionen werden auch als Punkte in einem riesig großen Raum betrachtet und den Abstand zwischen zwei Punkten kennen wir bereits aus dem Eindimensionalen durch die Punkte auf der gewöhnlichen Zahlengeraden. Die Abstraktion besteht nun darin, dass wir Funktionen in einem riesig großen Raum auch als Punkte betrachten.

2.3 Definitionen und Beispiele

Im Folgenden sollen nun die wichtigsten Grundlagen der Analysis angeführt werden, welche für die Arbeit unerlässlich sind:

Definition 2.1 (Metrik, metrischer Raum). Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Metrik auf X** , falls für alle $p, q, r \in X$ gilt:

Definitheit $d(p, q) \geq 0$ und $d(p, q) = 0$ genau dann, wenn $p = q$

Symmetrie $d(p, q) = d(q, p)$

Dreiecksungleichung $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$

X zusammen mit einer Metrik d heißt **metrischer Raum** (X, d) .

Man stellt sich $d(p, q)$ als **Abstand der Punkte P und Q** vor. Die erste Bedingung sagt anschaulich, dass ein Abstand nie negativ sein kann und dass zwei nicht identische Punkte nie den Abstand Null haben können, aber jeder Punkt hat von sich selbst den Abstand Null. Die zweite Gleichung sagt anschaulich, dass der Abstand auf dem Hin- und Rückweg identisch ist. Die Dreiecksungleichung besagt, dass ein Umweg über einen dritten Punkt nie kürzer sein kann als der direkte Weg.

Beispiel 2.1. (i) Wähle für die Menge $X = \mathbb{R}$ und der Abstand ergebe sich als $d(p, q) = |p - q|$

(ii) $X =$ Städte in Deutschland $d(p, q) =$ Auto-Entfernung von p nach q gemäß Entfernungstabelle

1. Auf derselben Menge können verschiedene Metriken existieren.

2. Welche Metrik von Interesse ist, hängt dabei vom Kontext ab.

Definition 2.2 (Induzierte Metrik). Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$. Definiere $d|_Y(p, q) = d(p, q)$ für alle $p, q \in Y$. $d|_Y$ heißt die von d auf Y **induzierte Metrik**.

Beispiel 2.2. Jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ wird selbst zu einem metrischen Raum.

Definition 2.3 (Norm). Sei V ein \mathbb{R} Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \|v\|$$

heißt **Norm**, falls für alle v, w gilt:

Definitheit $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Homogenität $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$ für $t \in \mathbb{R}$

Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

V zusammen mit einer Norm $\|\cdot\|$ heißt **normierter Raum** $(V; \|\cdot\|)$.

2.3.1 Begriff der Norm und die euklidische Norm

Nun stellt sich natürlich die Frage, was denn der Begriff der Norm bedeutet bzw. welche Bedeutung er für die vorliegende Arbeit hat. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definiert man auf einem Vektorraum \mathbb{R}^n die sogenannte **euklidische Norm**. Dabei stellt diese natürlich auch direkt ein Beispiel für eine Norm dar. Die euklidische Norm ist folgendermaßen definiert:

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \text{ für alle } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

Die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n wird gelegentlich auch als die Standardnorm auf \mathbb{R}^n bezeichnet. Für $n = 1$ stellt die euklidische Norm genau die Betragsfunktion dar; somit kann die euklidische Norm also als Verallgemeinerung der Betragsfunktion angesehen werden. Im Mathematikunterricht der Oberstufe wird die euklidische Norm eines Vektors im \mathbb{R}^3 als **Betrag eines Vektors** eingeführt. Da für diese Arbeit vor allem die **Abstandsfunktion** im Vordergrund steht, sollen zum genaueren Verständnis im nun Folgenden, angelehnt an die bereits angeführten Definitionen und Beispiele, die Zusammenhänge zwischen Norm bzw. euklidischer Norm, Metrik und dem Abstand bzw. dem euklidischen Abstand dargestellt werden. Dabei ist folgender Satz von wichtiger Bedeutung:

Satz 2.1. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $d(p, q) = \|p - q\|$ eine Metrik.

Beweis. Wir wollen zeigen, dass die Norm die drei bereits in Def.1.1.1. angeführten Eigenschaften einer Metrik erfüllt.

- (i) $d(p, q) \geq 0$ folgt aus der Definition der Norm. Nun bleibt nur noch zu zeigen: $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$ $d(p, q) = 0$ nach Definition $\|p - q\| = 0 \Leftrightarrow p - q \Leftrightarrow p = q$
- (ii) Die Eigenschaft folgt durch: $d(q, p) = \|q - p\| = \|(-1)(p - q)\| = |-1| \cdot \|p - q\| = d(p, q)$
- (iii) $d(p, r) = \|p - r\| = \|(p - q) + (q - r)\| \leq \|p - q\| + \|q - r\| = d(p, q) + d(q, r)$

□

Definition 2.4 (Standardskalarprodukt). Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ das **Standardskalarprodukt**.

Satz 2.2 (Cauchy-Schwarz). Auf \mathbb{R}^n sei $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (1)$$

2.3.2 Bemerkung

- (i) Die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n ist wirklich eine Norm und die euklidische Metrik wirklich eine Metrik.
- (ii) Auf beliebige V Vektorräume lässt sich folgendes verallgemeinern: Ist v Skalarprodukt, so wird $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm und durch $d(v, w) = \|v - w\|$ eine Metrik auf V definiert und es gilt Cauchy-Schwarz.

2.4 Zusammenhänge

Nun sollen die Zusammenhänge der erworbenen Kenntnisse zusammengeführt werden. Dabei steht natürlich die Frage im Vordergrund, was die Abstandsfunktion ist und was man sich unter einem Abstand versteht. Des Weiteren wurde angeführt, dass durch eine Norm eine Metrik induziert wird. Gilt allerdings auch die Umkehrung? Anhand einiger anschaulicher Beispiele soll im nun folgenden Abschnitt vor allem der Abstand im Fokus stehen:

2.4.1 Metrik und Abstand

Unter einem metrischen Raum versteht man eine Menge, auf der eine Metrik definiert ist. Eine Metrik oder auch Abstandsfunktion ordnet dabei je zwei Elementen des Raumes einen nichtnegativen reellen Wert zu und erfüllt außerdem die Eigenschaften von Def. 1.1.1. Dieser zugeordnete Wert kann als **Abstand** der beiden Elemente voneinander aufgefasst werden.

Definition 2.5 (Abstand in einem normierten Raum). In einem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ über einem Körper kann man auf einem Vektorraum V den Abstand $d(v, w)$ zwischen zwei Vektoren folgendermaßen definieren: $d(v, w) = \|w - v\|$, dies stellt den sogenannten **euklidischen Abstand** dar. Somit kann festgestellt werden, dass sich durch Normen Abstände bzw. Metriken erzeugen lassen. Dabei gilt Folgendes:

- (i) Die Eigenschaften des Abstandes zwischen zwei Vektoren oder Punkten gelten unabhängig von jeder Norm, durch die der Abstand gilt.
- (ii) Die Norm bestimmt lediglich die **Größe** des Abstandes.
- (iii) In $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ist der Abstand, den man für die euklidische Norm erhält, genau der geometrische Abstand, den man quasi mit dem Lineal messen würde.

2.4.2 Beispiele

Es gibt zwei Möglichkeiten Abstände zu erzeugen. Zum einen gibt es, wie wir eben gesehen haben, **durch Normen erzeugte Metriken**:

- (i) Jede Norm auf einem Vektorraum induziert durch die folgende Festlegung eine Metrik: $d(x, y) = \|x - y\|$. Somit ist jeder normierte Vektorraum ein metrischer Raum.
- (ii) Zum anderen gibt es **nicht durch Normen erzeugte Metriken**: Auf jeder Menge lässt sich eine triviale Metrik, die sogenannte **diskrete Metrik** definieren durch

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{für } x = y \\ 0, & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

Dieses Beispiel der diskreten Metrik ist auch gleichzeitig ein Beispiel dafür, dass nicht jede Metrik eine Norm induziert.

Beweis. Über \mathbb{R} gilt mit der oben definierten Funktion für alle $x \neq 0$ $\|x\| = \|x - 0\| = d(x, 0) = 1$ (falls $\|\cdot\|$ die induzierte Norm wäre) Nach Eigenschaft 2 einer Norm gilt aber auch $\|x\| = \|x \cdot 1\| = \|x\| \cdot \|1\| = \|x\| \neq 1$ für $|x| \neq 1$ Widerspruch! \square

2.4.3 Bemerkung

Es lässt sich also festhalten, dass jede Norm eine Metrik induziert, aber nicht jede Metrik eine Norm.

2.5 Der euklidische Abstand

In der zweidimensionalen Ebene oder im dreidimensionalen euklidischen Raum stimmt der euklidische Abstand $d(x, y)$ mit dem anschaulichen Abstand überein. Im allgemeinen Fall des n -dimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^n ist er für zwei Punkte oder Vektoren durch die euklidische Norm $\|x - y\|^2$ des Differenzvektors zwischen den beiden Punkten definiert. Sind die Punkte x und y durch die Koordinaten $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ gegeben, so gilt:

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Spezialfall Im Spezialfall der Berechnung eines euklidischen Abstandes für $n = 2$ wird dieser mit Hilfe des Satz des Pythagoras berechnet.

Rechenbeispiel

Berechnung des euklidischen Abstandes der beiden Punkte $x = (8, 4, 2)$ und $y = (2, 3, 1)$

$$d(x, y) = \sqrt{(8 - 2)^2 + (4 - 3)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{6^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{38}$$

3 Die ebene euklidische Geometrie - Punkte und Geraden

3.1 Vorwort

Im nun folgenden Teil soll die klassische ebene Geometrie, wie sie meist ganz intuitiv aus der Schule gekannt wird, axiomatisch eingeführt werden. Die ursprünglichen Definitionen, Postulate und Axiome gehen auf Euklid zurück. Dabei wird bereits ein Denkmbruch deutlich, da an den Axiomen erkennbar ist, dass die Frage: „Warum funktioniert etwas auf eine bestimmte Art und Weise?“ im Zentrum steht. Der kontroverseste Punkt von Euklids Axiomen stellt wohl das Parallelenaxiom dar [3]:

Parallelenaxiom Zu einem Punkt außerhalb einer Gerade gibt es genau eine Gerade durch diesen Punkt, die die gegebene Gerade nicht schneidet.

Dieses Axiomensystem wurde daraufhin von Hilbert vor ca. 100 Jahren so überarbeitet, wie wir heute damit arbeiten. Hilberts Axiomensystem gliedert sich dabei insgesamt in fünf wichtige Axiomengruppen

Inzidenzaxiome Axiome der Verknüpfung

Axiome der Lage Wann liegt ein Punkte zwischen zwei anderen Punkten?

Kongruenzaxiome Im Bezug auf Strecken und Winkel, Kongruenz von Dreiecken

Das Parallelenaxiom

Das Vollständigkeitsaxiom

Die Grundobjekte in Hilberts Geometrie bildet das Tupel $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$, wobei wir \mathcal{P} als Punkte identifizieren und \mathcal{G} als Geraden. Im nun Folgenden soll dargestellt werden, wie es möglich ist Hilberts Axiomensystem für die ebene Geometrie mit Hilfe der Abstandsfunktion zu definieren. Dabei werden des Weiteren auch das Phänomen der Inkommensurabilität und die Strahlensätze im Fokus stehen.[1], [2], [6]

3.2 Die Abstandsaxiome

Das Paar (\mathcal{P}, d) , wobei \mathcal{P} eine Menge von Punkten und $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung ist, soll folgende Axiome erfüllen:

A1 Es gibt mindestens zwei Punkte.

A2 Wenn A und B Punkte sind, dann ist $d(A, B)$ eine nichtnegative Zahl.

A3 Für Punkte A und B gilt $d(A, B) = 0$ genau dann, wenn $A = B$.

A4 Wenn A und B Punkte sind, gilt $d(A, B) = d(B, A)$.

Diese Axiome bilden zusammen einen semi-metrischen Raum. Zur Bildung eines metrischen Raumes fehlt noch die Dreiecksungleichung.

Beispiel 3.1. Wir wollen nun ein einfaches Modell finden, welches gut vorstellbar ist und unsere Axiome erfüllt. Deshalb wählen wir das Beispiel der euklidischen Ebene $\mathbb{E} : (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wir verstehen also den reellen Vektorraum \mathbb{R}^2 mit dem Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die Punkte dieser Geometrie sind die Elemente von \mathbb{R}^2 . Wir schreiben für einen Punkt A von \mathbb{E} oft einfach $A \in \mathbb{E}$. Weiter ist für $A \in \mathbb{E}$ und $v \in \mathbb{R}^2$ die Menge $g = A + \mathbb{R}v = A + tv, v \in \mathbb{R}$ eine Gerade in \mathbb{E} . Ein Punkt P gehört zu g , falls $P \in g$ gilt, d.h. wenn es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $P = A + tv$ gilt. Erinnerung: Der Euklidische Abstand ist im \mathbb{R}^2 folgendermaßen definiert:

$$d(A, B) = \|B - A\| = \sqrt{\langle B - A, B - A \rangle} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Nun soll die Gültigkeit des Modells nachgeprüft werden. Für (A1) ist die Gültigkeit relativ einfach einsehbar, denn die Punkte $A = (0, 0)$ und $B = (1, 0)$ liegen offensichtlich in unserem Modell. (A2) folgt direkt aus der Definition des euklidischen Abstandes aus Kapitel 1. (A3) Eigenschaft des euklidischen Abstandes. (A4) folgt aus der Symmetrie.

Nun stellt sich natürlich die Frage, wann liegt ein Punkt B zwischen zwei Punkten A und C ?

Definition 3.1. Seien A, B, C Punkte aus \mathcal{P} . Ein Punkt B liegt zwischen zwei Punkte A und C , falls alle drei Punkte verschieden sind und Folgendes gilt:

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C) \tag{2}$$

Beispiel 3.2. Nun wollen wir die Eigenschaft, wann ein Punkt B zwischen zwei Punkten A und C , liegt wieder auf unser Beispiel der eindimensionalen affinen Unterräume des K -Vektorraum \mathbb{R}^2 übertragen: Zunächst müssen wir uns überlegen, wie die Verbindungsgerade der Punkte A und C definiert ist:

$$g_{A,C} = \{C + t(A - C) | t \in \mathbb{R}\} = \{tA + (1 - t)C | t \in \mathbb{R}\}$$

B liegt auf dieser Geraden genau dann zwischen A und C , falls folgendes t existiert: $t \in \mathbb{R}$ mit $0 < t < 1$, sodass $B = tA + (1 - t)C$

Definition 3.2. Wenn $A \neq C$ gilt, wird das Intervall, $\text{Int } AC$, definiert durch alle Punkte B , welche zwischen A und C liegen. Wir erhalten das offene Intervall von A nach C .

Definition 3.3 (Strahl). Seien A, O Punkte aus \mathcal{P} , wobei $A \neq O$. Dann definieren wir den **Strahl** \overrightarrow{OA} folgendermaßen:

$$\overrightarrow{OA} = \{P | P \neq O \text{ und } d(AP) = |d(O, A) - d(O, P)|\}.$$

Bemerkung 3.1. (i) Wenn $O \neq A$ und $B \in \overrightarrow{OA}$, dann gilt $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}$.

(ii) Alle zwei Strahlen von einem festen Punkt O sind gleich oder disjunkt.

Definition 3.4 (Kollinearität). Seien A, B, C Punkte aus \mathcal{P} . Wir sagen, die Punkte A, B und C sind **kollinear**, falls es eine Gerade durch alle drei Punkte gibt.

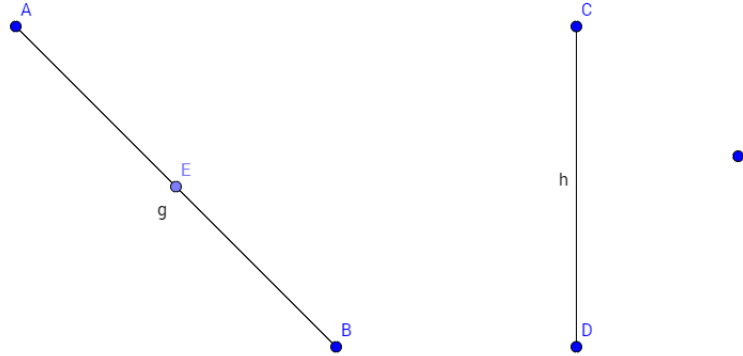


Abbildung 1: Die Punkte A, E und F sind kollinear und liegen auf der Geraden g . Die Punkte C, D und F sind nicht kollinear.

Lemma 3.1. *Wenn A, B und C kollinear sind, dann gilt*

$$d(AC) \leq d(AB) + d(BC).$$

Es lässt sich also festhalten, dass das Paar (\mathcal{P}, d) , falls die Punkte A, B und C nicht kollinear sind, die Dreiecksungleichung erfüllt und somit einen metrischen Raum bildet.

Definition 3.5 (Gerade). Wir verstehen unter einer Geraden $g \in \mathcal{G}$ eine nichtleere Teilmenge von Punkten aus \mathcal{P} . \mathcal{G} bezeichne hierbei die Menge aller Geraden.

3.3 Die Geradenaxiome

Das Paar (\mathcal{P}, d) , wobei \mathcal{P} eine Menge von Punkten und $d : P \times P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung ist, soll folgende Axiome erfüllen:

G1 Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.

G2 Durch zwei verschiedene Punkte gibt es genau eine Gerade.

G3 Es gibt drei nicht kollineare Punkte.

G4 Drei verschiedene Punkte liegen auf einer Geraden genau dann, wenn ein Punkt zwischen den beiden anderen liegt.

G5 Auf jedem Strahl ausgehend von einem Punkt O und für jede positive reelle Zahl b existiert ein Punkt B sodass gilt $d(O, B) = b$.

Beispiel 3.3. Nun wollen wir zeigen, dass unser Beispiel auch die Geradenaxiome erfüllt:

Zum Nachweis von (G1) wollen wir zeigen, dass mindestens zwei Punkte auf einer Geraden liegen. Sei g eine beliebige Gerade: Nach der Definition einer Geraden im \mathbb{R}^2 gibt es dann $A, v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, sodass wir $g = g_{A,v}$ schreiben können. Offensichtlich liegen dann die Punkte A und $A+v$ auf der Geraden g , da nach Voraussetzung $v \neq 0$ gilt und somit auch A und $A+v$ verschieden sind.

(G2) sagt uns, dass zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ existieren, durch die genau eine Verbindungsgerade g existiert. Seien $A \neq B \in \mathbb{R}^2$ Punkte. Dann ist offensichtlich $g_{A,B-A}$ die Gerade durch A und B . Wir müssen nun noch zeigen, dass jede Gerade g durch A und B mit $g_{A,B-A}$ identisch ist. Nach Definition können wir eine solche Gerade g schreiben als $g_{C,v}$ mit geeigneten $C, v \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$. Da ja nach Voraussetzung $A, B \in g$, gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$A = C + \lambda v; B = C + \mu v.$$

Da aber A und B als verschieden angenommen waren gilt $\lambda \neq \mu$. Einsetzen liefert:

$$v = \frac{1}{\mu - \lambda}(B - A)$$

Wir erhalten nun die Gleichheit der Geraden:

$$g = g_{C,v} = g_{A-\lambda v,v} = g_{A,v} = g_{A,B-A}$$

Unsere Gerade g durch die Punkte A und B ist somit eindeutig festgelegt.

Um (G3) zu verifizieren, überlegen wir uns einfach ein Beispiel für drei Punkte, welche offensichtlich nicht kollinear sind. Wir könnten die Punkte $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ und $B = (0, 1)$ wählen. Diese sind alle Punkte aus unserer Punktmenge $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^2$, aber der Punkt A liegt nicht auf der Verbindungsgeraden von O und B . Wir sagen auch, diese drei Punkte befinden sich in allgemeiner Lage.

Um (G4) nachzuweisen betrachten wir drei verschiedene, kollineare Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$. Diese erfüllen insbesondere folgende Gleichung:

$$B = C + \lambda(A - C) = \lambda A + (1 - \lambda)C$$

Da B weder mit A noch mit C identisch ist, gilt dabei $\lambda \notin \{0, 1\}$. Es verbleiben genau drei Fälle:

Fall 1: $0 < \lambda < 1$ Dies ist offenbar äquivalent zur Gültigkeit, dass B zwischen den Punkten A und C liegt. Wir schreiben hierfür $A * B * C$.

Fall 2: $1 < \lambda$ Dies ist offenbar äquivalent zur Gültigkeit von $0 < \frac{1}{\lambda} < 1$. Setzen wir nun $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, so erhalten wir aus mit Hilfe folgender Gleichung:

$$B = C + (A - C) = \lambda A + (1 - \lambda)C$$

die folgende Gleichung (Division durch λ und Auflösen nach A):

$$A = \lambda' B + (1 - \lambda')C$$

und insbesondere $B * A * C$.

Fall 3: $\lambda < 0$. Dies ist offenbar äquivalent zur Gültigkeit von $0 < \frac{1}{1-\lambda} < 1$. Definieren wir $\lambda'' = \frac{1}{1-\lambda}$, dann erhalten wir durch Division der obigen Gleichung mit $1 - \lambda$ und Auflösen nach C die Gleichung:

$$C = \lambda'' B + (1 - \lambda'')A$$

und insbesondere $A * B * C$. Es folgt, dass es unter den drei Punkten A, B, C genau einen gibt, der zwischen den beiden anderen liegt.

Als letztes betrachten wir nun das Axiom (G5): Zunächst wollen wir uns das dargestellte Axiom geometrisch veranschaulichen:

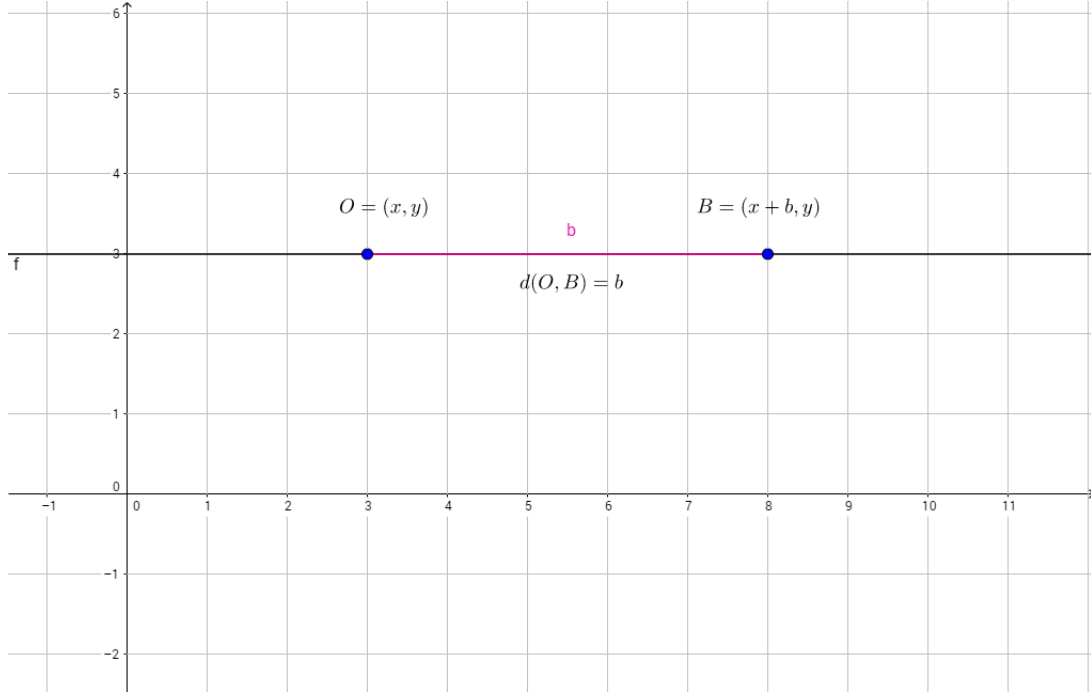


Abbildung 2: Auf jedem Strahl ausgehend von einem Punkt O und für jede positiven reelle Zahl b existiert ein Punkt B , sodass gilt $d(O, B) = b$.

Durch die Skizze ist jetzt intuitiv klar, was gemeint ist und das Axiom wird offensichtlich durch unser Modell erfüllt. Dies wollen wir jedoch nun noch algebraisch mit Hilfe der Definition des euklidischen Abstandes aus Kapitel 1 nachrechnen:

$$d(A, B) = \sqrt{(x - x, b)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{b^2 + 0^2} = \sqrt{b^2} = b$$

Definition 3.6 (Strecke und Länge). Die **Strecke** \overline{AB} mit den Endpunkten A und B ist die Menge bestehend aus A und B und allen Punkten C , die zwischen A und B liegen. Der Abstand $d(A, B)$ zwischen A und B ist die **Länge** $|AB|$ von \overline{AB} .

4 Lineare Mengen

Das nun folgende Kapitel zum Thema der Linearen Mengen orientiert sich an [2].

4.1 Definitionen für Lineare Mengen

Definition 4.1 (Lineare Menge). Seien A, B, C drei Punkte in einem metrischen Raum (\mathcal{P}, d) . Wir sagen, dass $\{A, B, C\}$ eine **lineare Menge** in (\mathcal{P}, d) ist, wenn

$$\pm d(AC) \pm d(CB) = d(AB) \text{ gilt.}$$

Wenn beide Summanden auf der linken Seite $\neq 0$ sind und ein positives Vorzeichen haben, sagen wir C liegt zwischen A und B .

Bemerkung 4.1. Wenn drei verschieden Punkte einen linearen Raum formen, dann liegt offenbar einer der Punkte zwischen den beiden anderen. Wir sagen solche Punkte sind kollinear angeordnet. Eine Gerade ist nicht notwendigerweise eine lineare Menge.

Im Allgemeinen können drei Punkte auf einer Geraden liegen, welche keine lineare Menge ist.

Beispiel 4.1. Wir wählen $X = \{A, B, C, D\}$ und $d(A, B) = 1, d(A, C) = 3, d(A, D) = 5, d(B, C) = 3, d(B, D) = 4$ und $d(C, D) = 2$. X genüge den Axiomen eines metrischen Raumes und es sei $[AD] = X$, aber $\{B, C, D\}$ nicht linear. Dann ist die Strecke \overline{AD} nicht linear.

Beweis. Wähle die Punkte A, B, C und D beispielsweise auf der x -Achse, so dass sie offensichtlich auf einer Geraden liegen und die gegebenen Abstände erfüllen: $A = (0, 0), B = (6, 0), C = (3, 0)$ und $D = (5, 0)$. Dann ist die Menge B, C, D nicht linear, denn $\pm 3 \pm 2 \neq 4$. Somit ist die Bedingung für eine lineare Menge nicht erfüllt, obwohl alle vier Punkte auf einer Geraden liegen. \square

Definition 4.2. Zwei Mengen sind **linear verbunden** wenn ihr Schnitt mindestens zwei Punkte enthält.

Definition 4.3. Ein endliches **System von Mengen in (\mathcal{P}, d) ist linear verbunden**, wenn es derart numeriert werden kann (möglicherweise auch mit Wiederholungen), dass jede zwei benachbarten Mengen linear verbunden sind.

4.2 Axiome für Lineare Mengen

L1 Für beliebige Punkte A und B ist ein Punkt M , welcher die Bedingung

$$\pm|AM| \pm |MB| = |AB| \text{ bzw. } |AM| \text{ bzw. } |MB|$$

erfüllt, eindeutig bestimmt.

L2 Die Vereinigung von Mengen eines linear verbundenen Systems von linearen Mengen ist wieder eine lineare Menge.

L3 Für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$, welche die folgende Relation erfüllen

$$\pm d_1 \pm d_2 = d(A, B) \wedge d_1 \geq 0 \wedge d_2 \geq 0$$

existiert ein Punkt C , sodass

$$d(A, C) = d_1 \wedge d(C, B) = d_2.$$

Beispiel 4.2. Wir wollen nun unser Modell aus Kapitel 2 auf Lineare Mengen und deren Eigenschaften anwenden:

Zunächst wollen wir (L1) verifizieren, welches die folgende Aussage beinhaltet: Für beliebige Punkte A und B ist ein Punkt M , welcher folgende Bedingung erfüllt:

$$\pm|AM| \pm |MB| = |AB| \text{ bzw. } |AM| \text{ bzw. } |MB|$$

eindeutig bestimmt. Punkte im \mathbb{R}^2 sind von folgender Form: $M_1 = M$, $M_2 = M + v$, $v \neq 0$. Wir nehmen nun an, es gäbe zwei solcher Punkte, M_1 und M_2 , welche verschieden seien und die Bedingung erfüllen. Dann müsste Folgendes gelten:

$$\begin{aligned} \pm|AM_1| \pm |M_1B| &= |AB| \\ &= \pm|AM_2| \pm |M_2B| = |AB| \\ &= \pm|AM + v| \pm |M + vB| = |AB| \end{aligned}$$

Damit diese Gleichheit allerdings erfüllt ist, muss $v = 0$ gelten, was aber nach Annahme ungleich 0 vorausgesetzt ist. Somit erhalten wir einen Widerspruch zu Annahme und es muss gelten $M_1 = M_2$, woraus die Eindeutige Bestimmung von M unmittelbar folgt.

Nun gilt es (L2) mit Hilfe unserer Standardebene zu verifizieren: Jede lineare Menge L in euklidischen Räumen ist in einer bestimmten Geraden enthalten. Im \mathbb{R}^2 müssen wir nun zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: L ist eine Ein-Punkt Menge. Dieser Fall ist trivial und das Axiom ist offensichtlich erfüllt.

Fall 2: Enthalte L mindestens zwei Punkte A und B und sei $C \in L$. Dann gilt wegen der Linearität folgendes:

$$|AB| = \pm|AC| \pm |CB|$$

woraus folgt, es muss gelten, dass $C \in AB$. Es folgt also, dass $L \subset AB$. Wenn zwei lineare Mengen X und Y linear verbunden sind, dann existieren zwei Punkte A und B so dass $X, Y \subset AB$ und $X \cup Y$ eine lineare Menge ist. Entsprechend zu einem linear verbundenen System von linearen Mengen gibt es auch eine korrespondierende endliche Folge von linear verbundenen Mengen. Dies wollen wir uns nun im Folgenden ansehen.

Um die Gültigkeit von (L3) darzustellen, ist es zunächst sinnvoll, sich die drei möglichen Fälle von (L3) in unserem Modell vor Augen zu führen und sich diese Situation mit einer Skizze zu veranschaulichen:

Fall 1: $d_1 + d_2 = d(A, B)$

Fall 2: $d_1 - d_2 = d(A, B)$

Fall 3: $-d_1 + d_2 = d(A, B)$

Um uns dieses Axiom klar zu machen und es für unser Modell zu belegen, betrachten wir exemplarisch den ersten Fall und veranschaulichen den Sachverhalt zunächst durch eine Skizze:

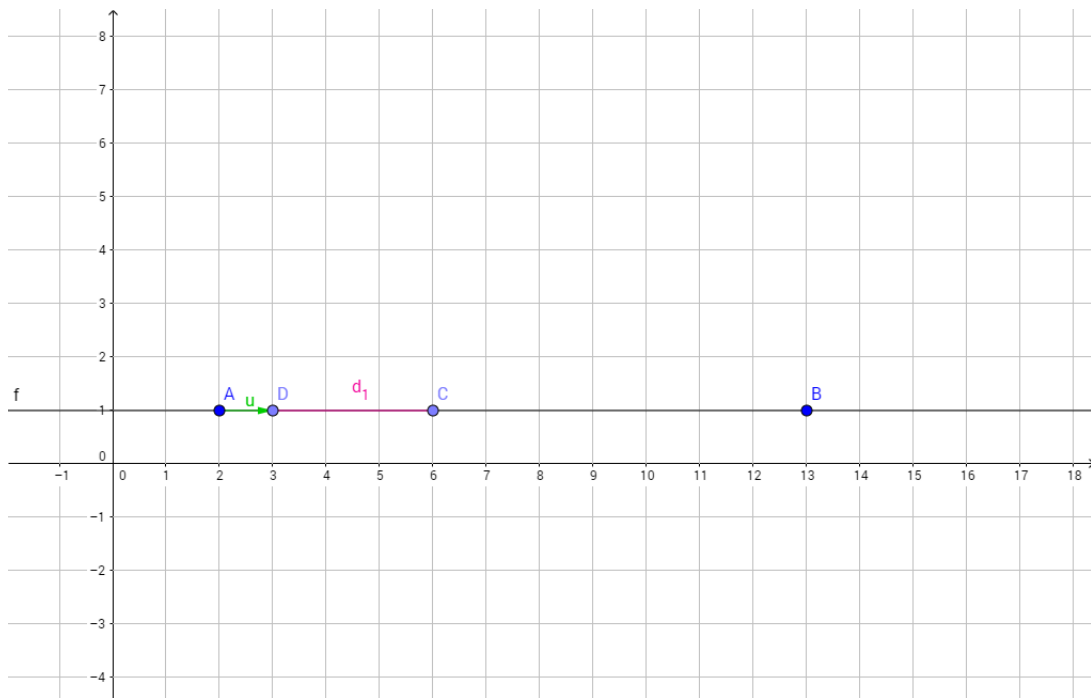


Abbildung 3: Der Vektor u soll auf die Länge 1 normiert werden

Wir betrachten nun also Fall 1 und wollen zeigen, dass für beliebige Punkte $A, B \in \mathcal{P}$, welche die gegebene Relation erfüllen, solch ein Punkt C existiert, sodass gilt:

$$d(A, C) = d_1 \quad \text{und} \quad d(C, B) = d_2$$

Wir betrachten nun also eine Gerade g durch die Punkte A und B , welche von folgender Form ist:

$$g = A + t(B - A); t \in \mathbb{R}$$

Des Weiteren wählen wir unser t folgendermaßen:

$$t = \frac{d_1}{\|B - A\|}$$

Wenn wir nun dies in die Definition unseres euklidischen Abstandes aus Kapitel 1 einsetzen und somit unser $d(A, C)$ berechnen sollten wir d_1 als

Ergebnis erhalten:

$$\begin{aligned}
 d(A, C) &= d\left(A, A + d_1 \frac{B - A}{\|B - A\|}\right) \\
 &= \|C - A\| \\
 &= \left\|A + d_1 \frac{B - A}{\|B - A\|} - A\right\| \\
 &= d_1 \left\|\frac{B - A}{\|B - A\|}\right\| \\
 &= d_1 \frac{\|B - A\|}{\|B - A\|} \\
 &= d_1
 \end{aligned}$$

Da wir nun nachgerechnet haben, dass der Abstand von Punkt A zu Punkt C also d_1 sein muss, muss der Abstand von C zu B also d_2 sein und wir haben gezeigt, dass unser Modell das Axiom erfüllt. Die Fälle 2 und 3 folgen analog.

Bemerkung 4.2. Das Axiom (L3) impliziert nicht alleine die Linearität einer Geraden. Wenn ein metrischer Raum (\mathcal{P}, d) die Axiome (L1)-(L3) erfüllt, dann ist jede Gerade dieses Raumes isometrisch zur reellen Zahlengerade mit der üblichen Metrik.

Für den weiteren Verlauf unserer Arbeit benötigen wir ein relativ einfaches, aber anschauliches Beispiel, welches eine Ebene Geometrie darstellt. Das einfachste Beispiel bildet hier ein Dreieck. Dieses wird im Folgenden definiert werden und weitere Axiome anhand des Beispiels erläutert.

4.3 Dreiecke

Definition 4.4 (Dreieck). Seien A, B und C beliebige Punkte von X . Wir sagen diese definieren ein **Dreieck** $\triangle ABC$. Die Abschnitte $[AB]$, $[BC]$ und $[CA]$ sind die **Seiten** des Dreiecks und A, B und C stellen die **Eckpunkte** des Dreiecks dar. Die Zahl $|ABC| = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ in der a, b und c die Längen der Seiten und $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ der halbe Umfang des Dreiecks ist, ist der Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$. (Der Beweis wird im Kapitel zur Inkommensurabilität und den Strahlensätzen folgen).

Bemerkung 4.3. Wir sagen ein Dreieck $\triangle ABC$ heißt **entartet**, wenn die Menge $\{A, B, C\}$ linear ist. In diesem Fall verschwindet einer der Faktoren des Produkts $p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Anschaulich kann man bemerken, dass ein **entartetes Dreieck** ein Dreieck ist, bei dem die Ecken A, B, C auf einer Geraden liegen.

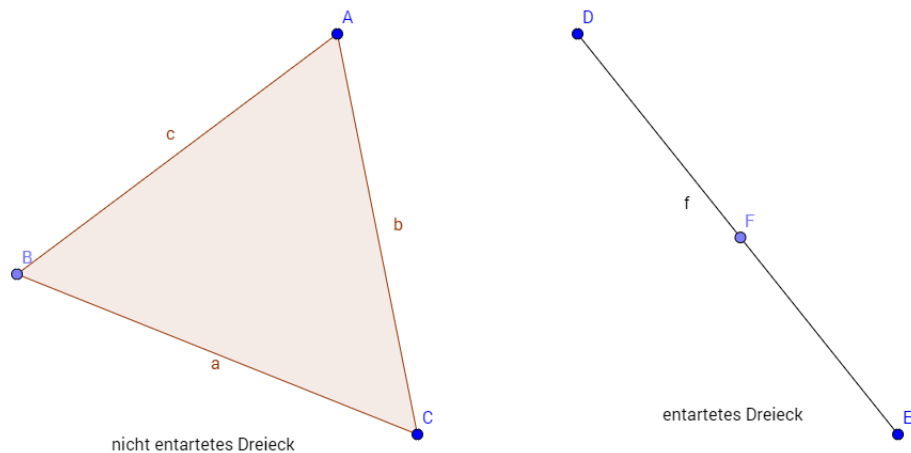


Abbildung 4: Darstellung eines nicht entarteten und eines entarteten Dreiecks

Definition 4.5. Wir sagen, ein Punkt $M \in (\mathcal{P}, d)$ gehöre zum Dreieck ΔABC , wenn gilt

$$|ABC| = |MAB| + |MBC| + |MCA|$$

Jedes Dreieck kann also als Menge der Punkte, die zu ihm gehören, gesehen werden.

Im Folgenden betrachten wir nun das letzte Axiom für Lineare Mengen, welches wir auch wieder mit Hilfe unseres Modells verifizieren möchten:

L4 Für eine beliebige, aber feste Gerade $g \in \mathcal{G}$ und einen beliebigen Punkt $C \in \mathcal{P}$ gilt Folgendes:

$$|ABC| = h \cdot |AB|,$$

wobei h nicht abhängig ist von der Wahl der Strecke $\overline{AB} \subset g$.

Beispiel 4.3. Unser Modell erfüllt die gegebene Relation $|ABC| = h|AB|$. Die Zahl h ist dann genau die Höhe des Dreiecks ΔABC mit der Basis \overline{AB} , was äquivalent zum Abstand des Punktes C zur Strecke \overline{AB} ist.

5 Strecken, Winkel und Kongruenzaxiome

In diesem Kapitel beziehen wir uns auf folgende Quellen: [1] [2] [6].

Nun benötigen wir noch Definitionen, um feststellen zu können, wann zwei Strecken bzw. Winkel gleich sind, um mit deren Hilfe auf die Gleichheit oder Ähnlichkeit oder sogar Kongruenz von Figuren, beispielsweise von Dreiecken, schließen zu können. Des Weiteren benötigen wir die Gleichheit von Strecken für den Beweis der Strahlensätze.

Die Definition einer Strecke wurde bereits zu Beginn des Kapitels eingeführt, im Folgenden wird nun die Definition eines Winkels mit Hilfe der Abstandsfunktion und die Kongruenzaxiome für Strecken bzw. Winkel beschrieben.

Bevor wir allerdings direkt weiter zu den Winkelaxiomen übergehen können, soll nun im Folgenden zunächst die Definition eines Winkels eingeführt werden:

Definition 5.1 (Winkel). Seien A, B und $C \in \mathcal{P}$ drei Punkte, sodass $B \neq A \neq C$. Dann heißt

$$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$

der **Winkel** $\angle BAC$, A sein **Scheitel** und \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} seine **Schenkel**. Im Folgenden werden wir auch $\angle rs$ schreiben, falls die Strahlen mit r und s bezeichnet werden.

5.1 Die Winkelaxiome

Es gibt vier Axiome um einen Winkel zu bemessen:

W1 Wenn r und s zwei Strahlen mit gemeinsamem Ausgangspunkt sind, dann wird ihnen eine reelle Zahl modulo 2π zugeordnet, wobei wir zwischen $\angle rs$ und $\angle sr$ unterscheiden.

Definition 5.2 (Winkelmaß). Seien r und s zwei Strahlen mit gemeinsamem Ausgangspunkt. Die dem Winkel $\angle rs$, nach (W1), zugeordnete reelle Zahl modulo 2π heißt das **Maß** des Winkels $\angle rs$ und wird mit $\angle rs$ bezeichnet.

W2 Wenn r , s und t drei Strahlen mit gemeinsamem Ausgangspunkt sind, dann gilt

$$\angle rs + \angle st = \angle rt$$

W3 Sei $O \in \mathcal{P}$ ein Punkt. Falls r ein Strahl ausgehend von O und c eine reelle Zahl ist, so existiert ein Strahl s , welcher ebenfalls von O ausgeht, sodass gilt

$$\angle rs = c.$$

W4 Seien $A \neq O \neq B$ Punkte in \mathcal{P} . Dann gilt

$$\angle AOB = \angle BOA \neq 0 \Leftrightarrow d(A, B) = d(A, O) + d(O, B).$$

Beispiel 5.1. Zunächst wollen wir (W1) mit Hilfe unseres Modells verifizieren. Wir befinden uns wie zuvor in $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Wir veranschaulichen unsere Gegebenheiten mit Hilfe der folgenden Skizze:



Wir wollen nun zeigen, dass der dargestellte Winkel, welcher von den Strahlen \overrightarrow{OA} bzw. s und \overrightarrow{OB} bzw. r dargestellt wird, welche beide vom selben Punkt O ausgehen, das Winkelmaß einer reellen Zahl modulo 2π besitzt. Wenn wir nun unser Modell betrachten, so bezeichnet das Skalarprodukt zwischen \overrightarrow{OA} und \overrightarrow{OB} genau Folgendes:

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\| \cdot \cos \angle BOA$$

Wenn wir diese Gleichung nun umstellen erhalten wir Folgendes:

$$\cos \angle BOA = \frac{\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle}{\|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OB}\|}$$

Da der Kosinus eine 2π periodische Funktion ist, folgt somit sofort, dass das Winkelmaß von $\angle BOA$ bzw. $\angle rs$ eine reelle Zahl modulo 2π sein muss und die Behauptung ist gezeigt.

Die Veranschaulichung von (W2) sagt uns im Grunde, dass wir Winkelmaße addieren können. Um dies nun mit Hilfe unseres Modells zu verifizieren betrachten wir zunächst folgende Skizze:

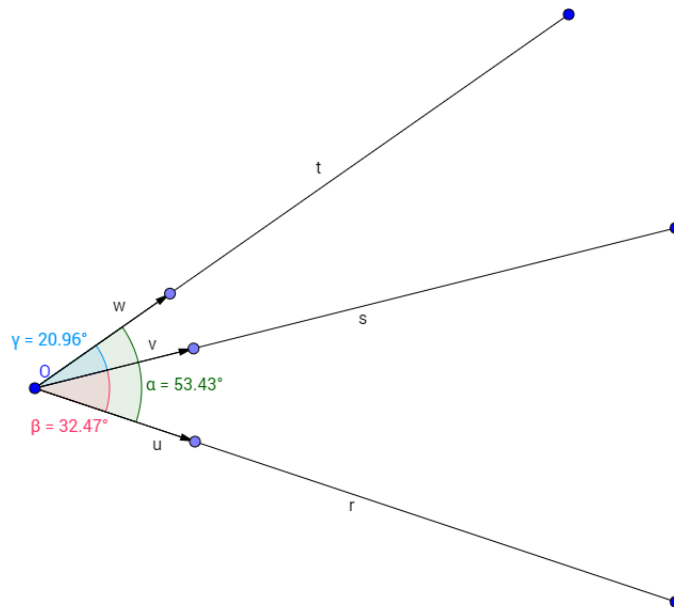


Abbildung 5: Wir betrachten nun die Strahlen r , s und t . Die dargestellten Vektoren u , v und w seien auf die Länge 1 normiert und der Strahl r sei gerade die x -Achse.

Um (W2) möglichst einfach zu verifizieren benötigen wir noch einige Annahmen, welche bereits in der Skizze deutlich werden. Zunächst sei der Scheitel der drei Winkel α , β und γ o.B.d.A. der Ursprung. Der Strahl r sei des Weiteren genau die x -Achse und es gelte o.B.d.A. die Normierung der Vektoren u, v, w auf die Länge 1. Es gelte $u = e_1 = (1, 0)$. Wir können nun mit Hilfe unseres Wissens über das Skalarprodukt zweier Strahlen und der Verifikation von (W1) festhalten, dass außerdem gilt:

$$\cos \gamma = \langle u, v \rangle, \cos \alpha = \langle v, w \rangle, \cos \beta = \langle u, w \rangle,$$

und wir wissen auch, dass wir die Vektoren v und w folgendermaßen dar-

stellen können:

$$v = (\cos \beta, \sin \beta); w = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Nun gilt es mit Hilfe dieses Wissens nachzurechnen, dass gilt:

$$\cos \angle(v, w) = \cos(\alpha - \beta)$$

Es gilt also Folgendes:

$$\begin{aligned} \cos \angle(v, w) &= \langle v, w \rangle \\ &= \cos \gamma \\ &= (\cos \beta, \sin \beta), (\cos \alpha, \sin \alpha) \rangle \\ &= \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \sin \alpha = \cos(\alpha - \gamma) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun, dass sich der Winkel γ modulo 2π aus der Differenz der Winkel α und β darstellen lässt. Dadurch erhalten wir die Additivität der Winkel, es gilt nun also

$$\alpha - \beta = \gamma \pmod{2\pi} \Rightarrow \alpha = \beta + \gamma$$

Daraus folgt nun somit auch direkt, durch Verwendung der obigen Definitionen, die Additivität des Winkelmaßes.

Um das Axiom (W3) nachzuweisen, wollen wir zunächst die Definition der Isometrie, sowie einige Beispiele für Isometrien einführen, um schlussendlich mit Hilfe eines Lemmas zum eigentlichen Beweis von (W3) zu kommen [16]. Es bezeichne im folgenden \mathbb{E}^n die euklidische Standardebene für $n = 2$.

Definition 5.3. Eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ heißt eine **Kongruenztransformation** oder **Isometrie**, wenn sie die Abstände erhält, falls also Folgendes gilt:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$$

Die Menge aller Isometrien von \mathbb{E} wird mit $\text{Isom}(\mathbb{E})$ bezeichnet.

Beispiel 5.2. Die folgenden Abbildung sind isometrisch:

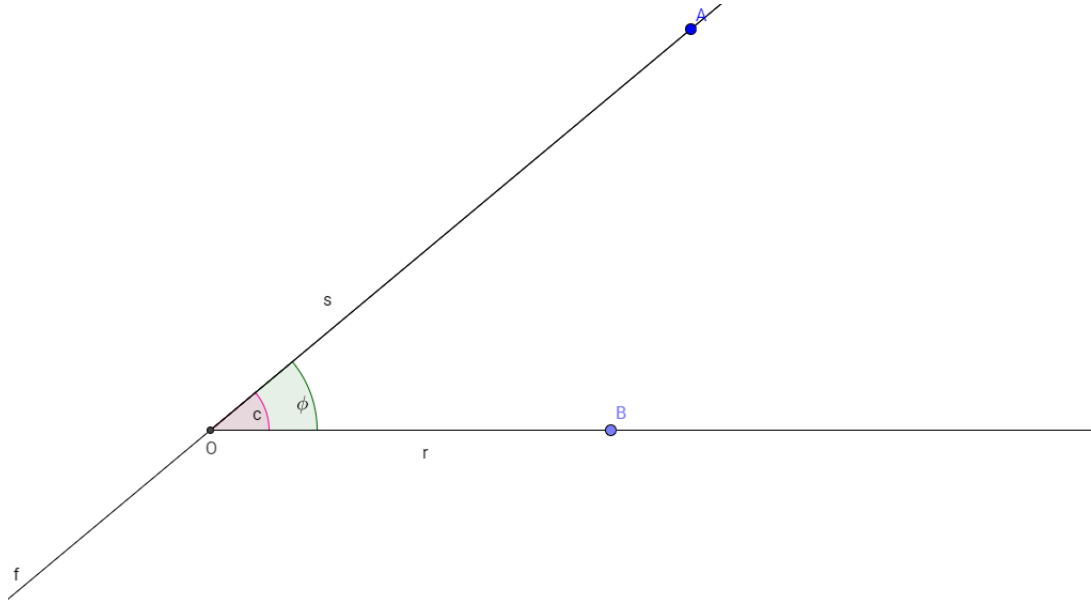
- (1) Translation um einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$.
- (2) Spiegelung an einer Geraden in \mathbb{E} .
- (3) Drehung um einen Punkt in \mathbb{E} .

Um nun (W3) verifizieren zu können benötigen wir nun noch folgendes Hilfslemma:

Lemma 5.1. *Das Winkelmaß ist invariant unter Isometrien von $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.*

Beweis. Der Beweis ist mit Hilfe der zuvor angeführten Beispiele offensichtlich, da das Skalarprodukt per Definition unter $O(2)$ also der Gruppe der orthogonalen (2×2) Matrizen invariant ist. \square

Wir können nun also Translation und Drehung anwenden und gehen o.B.d.A von folgender Situation aus:



(W3) Nun bleibt die Frage zu beantworten: Was ist s ? Wir nehmen o.B.d.A. an, dass O der Ursprung sei und r die x -Achse. Somit ist s der Strahl, welcher gegeben ist durch den Vektor $(\cos c, \sin c)$. Wenn wir nun das Skalarprodukt zwischen r und s betrachten, welches nach Konstruktion genau den $\cos \phi$ darstellt, ergibt sich Folgendes:

$$\langle (1, 0), (\cos c, \sin c) \rangle = \cos \phi$$

Per Definition gilt nun aber

$$\langle (1, 0), (\cos c, \sin c) \rangle = \cos c$$

Somit folgt folgende Gleichheit:

$$\cos c = \cos \phi$$

und somit schließlich

$$c = \phi$$

Wir verwenden hier (W1) und somit die Eigenschaft, dass Winkeln eine reelle Zahl mod 2π zugeordnet wird. Daraus folgt die Behauptung, denn wir können nach Konstruktion zu jedem von O ausgehenden Strahl r und jeder reellen Zahl c einen Strahl s finden, sodass gilt $\angle rs = c$.

(W4) Dieses Axiom überlegen wir uns relativ intuitiv, indem wir von der Annahme der Gegenposition ausgehen: Falls gilt $\angle AOB \neq \angle BOA$, folgt sofort wegen der Dreiecksungleichung $d(A, B) < d(A, O) + d(O, B)$. Somit wäre die Hinrichtung bereits gezeigt. Falls wir o.B.d.A. annehmen es gelte $d(A, B) < d(A, O) + d(O, B)$, dann ergibt sich sofort $\angle AOB \neq \angle BOA$. Somit folgt aus der Annahme der Gegenposition die Ungleichheit und die geforderte Gleichheit, welche durch das Axiom gefordert ist, wird verifiziert.

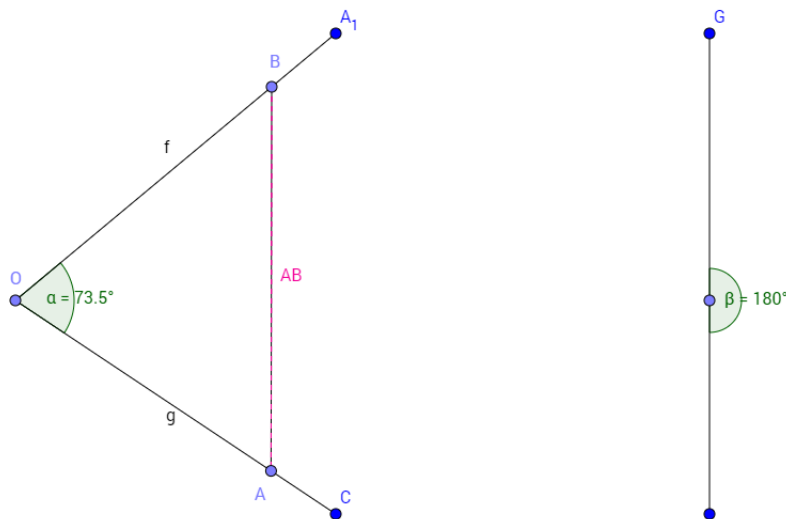


Abbildung 6: Veranschaulichung von (W4) im Falle der Gegenannahme (linke Abbildung) und im Falle der eigentlichen Aussage (rechte Abbildung)

Da wir uns im Laufe der Arbeit hauptsächlich mit Dreiecken als einfaches Beispiel für eine Ebene Geometrie beschäftigen und mit Hilfe der Kongruenz von Dreiecken einige interessante Folgerungen näher betrachten werden,

soll nun im Folgenden dargestellt werden, wann zwei Dreiecke kongruent zueinander sind.

Definition 5.4 (Ähnliche Dreiecke). Zwei angeordnete Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit $A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{P}$ sind **ähnlich**, wenn es eine positive reelle Zahl k und $\epsilon = \pm 1$ gibt, sodass gilt:

$$\angle ABC = \epsilon \angle A'B'C'$$

$$\angle BCA = \epsilon \angle B'C'A'$$

$$\angle CAB = \epsilon \angle C'A'B'$$

und

$$k \cdot d(A, B) = d(A', B')$$

$$k \cdot d(B, C) = d(B', C')$$

$$k \cdot d(C, A) = d(C', A').$$

Die Dreiecke sind **kongruent**, wenn dies für $k = 1$ gilt.

5.2 Das Ähnlichkeitsaxiom

Das Ähnlichkeitsaxiom lautet wie folgt:

S Seien ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zwei angeordnete Dreiecke. Dabei seien die Eckpunkte $A, B, C, A', B', C' \in \mathcal{P}$. Wenn gilt

$$\angle ABC = \epsilon \angle A'B'C',$$

$$d(A, B) = k \cdot d(A', B'),$$

$$d(B, C) = k \cdot d(B', C')$$

für $\epsilon = \pm 1$ und $k > 0$, dann sind die beiden Dreiecke **ähnlich**.

Nun wollen wir (S) verifizieren. Ausgangspunkt ist wieder die Standardebene $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Wir wenden wie zuvor die Eigenschaften der Isometrie an und gehen o.B.d.A. von der folgenden Situation aus:

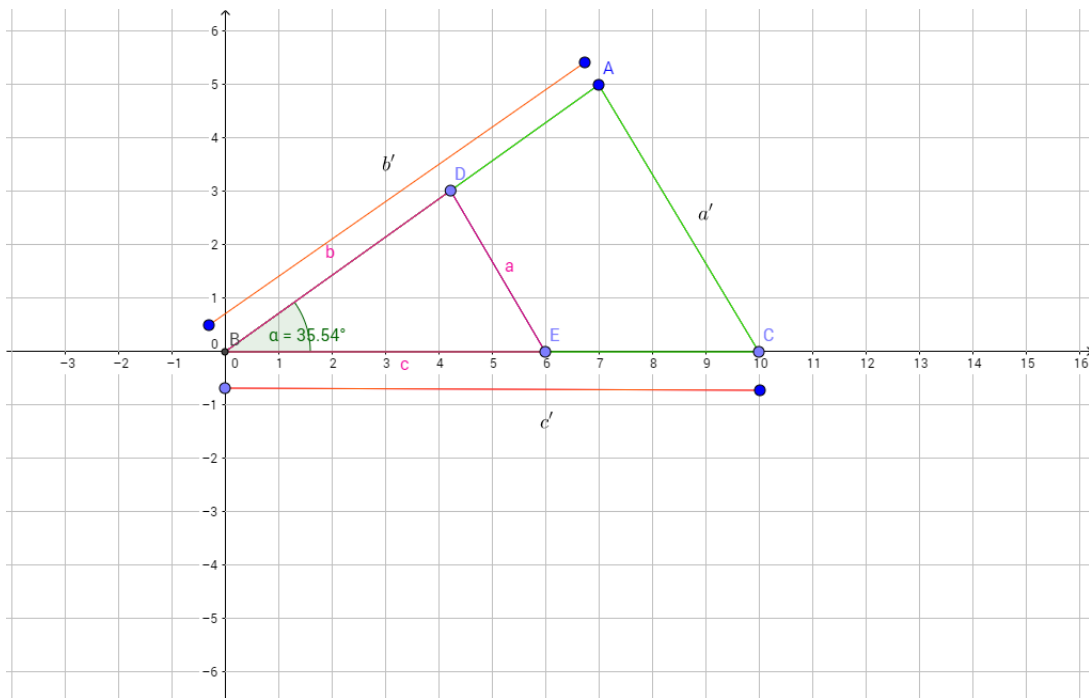


Abbildung 7: Die Winkel α und α' seien gleich.

Wir wollen im Folgenden also zeigen, dass gilt:

$$a' = ka$$

Der Nachweis erfolgt mit Hilfe des Kosinussatzes:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ a'^2 &= b'^2 + c'^2 - 2b'c' \cos \alpha' \\ &= k^2(b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha) \\ &= k^2 a^2 \\ a' &= \pm ka (k > 0) \\ a' &= ka \end{aligned}$$

5.3 Von Ähnlichkeit zu Kongruenz

Um unser Beispiel weiterzuführen und im \mathbb{R}^2 zu veranschaulichen, wollen wir uns zunächst einmal anschauen, welche mathematische Bedeutung der Begriff der Ähnlichkeit hat, die Definition der Ähnlichkeitsabbildung betrachten und uns anschauen, wie eine Kongruenzabbildung aus einer Ähnlichkeitsabbildung hervorgeht. Im Folgenden sei \mathbb{E} die euklidische Standardebene, versehen mit dem Standardskalarprodukt. Als Grundlage dieses Kapitels dienen die beiden Quellen [3] und [6].

Definition 5.5 (Ähnlichkeitsabbildung). Eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ heißt **Ähnlichkeitsabbildung**, wenn f **geradentreu** und **verhältnistreu** ist, das heißt wenn für alle $A, B, C, D \in \mathcal{P}$ und jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ Folgendes gilt:

- i) $f(g) \in \mathcal{G}$ (**Geradentreue**)
- ii) $|f(A)f(B)||CD| = |f(C)f(D)||AB|$ (**Verhältnistreue**)

Offenbar ist eine Abbildung genau dann verhältnistreu, wenn es eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(A)f(B)| = \lambda|AB|$ für alle $A, B \in \mathcal{P}$. Man nennt diese λ auch den **Streckfaktor** von f .

Lemma 5.2. Falls $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Ähnlichkeitsabbildung ist, dann gilt

$$\Delta ABC \simeq \Delta f(A)f(B)f(C)$$

Beispiel 5.3. Jede Ähnlichkeitsabbildung $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$ lässt sich als lineare Abbildung des \mathbb{R}^2 auffassen.

Um uns den Beweis anschauen zu können, benötigen wir noch folgendes Hilfslemma:

Lemma 5.3 (Hilfslemma). Es seien $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Ähnlichkeitsabbildung und $A, B, C \in \mathbb{E}$ drei Punkte auf einer Geraden mit B zwischen A und C . Dann liegt auch $f(B)$ zwischen $f(A)$ und $f(C)$.

Beweis. Es seien $U \in \mathbb{R}$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann liegen die Punkte $0, U, \alpha U$ auf einer Geraden. Wir betrachten nur den Fall $\alpha < 1$ (die anderen Fälle gehen analog), d.h. U liegt zwischen 0 und αU . Da $|0(\alpha U)| = \alpha|0U|$ gilt liefert die Verhältnistreue sofort $|0f(\alpha U)| = \alpha|0f(U)|$, da f geradentreu ist liegen $0, f(U)$ und $f(\alpha U)$ auch auf einer Geraden, und aufgrund des Hilfslemmas liegt $f(U)$ zwischen 0 und $f(\alpha U)$. Daraus folgt $f(\alpha U) = \alpha f(U)$. Es sei nun auch $W \in \mathbb{R}^2$. Dann liegen U, W und $V = \frac{1}{2}(U + W)$ auf einer Gerade und es gilt $|UV| = |WV|$. Die Verhältnistreue und die Geradentreuen liefern

einerseits $|f(U)f(V)| = |f(W)f(V)|$ und andererseits, dass $f(U)$, $f(W)$ und $f(V)$ auf einer Geraden liegen. Wegen unseres Hilfslemmas gilt zudem $f(V)$ zwischen $f(U)$ und $f(W)$.

$$\frac{1}{2}(f(U) + f(W)) = f(V) = f\left(\frac{1}{2}(U + W)\right) = \frac{1}{2}f(U + W)$$

□

Wir können also Ähnlichkeitsabbildungen dadurch charakterisieren, dass

$$|f(A)f(B)| = \lambda|AB|$$

mit einem geeignetem $\lambda > 0$ gilt. Ein Spezialfall liegt vor, falls dieses λ den Wert 1 annimmt. Eine Ähnlichkeitsabbildung $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ heißt eine Kongruenzabbildung, falls f längentreu ist;

$$|f(A)f(B)| = |AB| \quad \forall A, B \in \mathbb{E}$$

Ist $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine Ähnlichkeitsabbildung mit Streckfaktor λ , so ist $\frac{1}{\lambda}f$ eine Kongruenzabbildung.

5.4 Kongruenzaxiome

Wenn wir Kongruenzen betrachten, stehen vor allem Äquivalenzrelationen bzw. Isomorphismen im Mittelpunkt unserer Betrachtung. Im Rahmen der hier verfassten wissenschaftlichen Arbeit befinden wir uns in metrischen Räumen. Daher müssen wir uns zunächst vor Augen führen, wann zwei metrische Räume gleich bzw. kongruent zueinander sind.

Definition 5.6 (Kongruenz von metrischen Räumen). Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zwei Unterräume sind **kongruent oder gleich**, falls ein Isomorphismus $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ existiert, sodass gilt $f(U) = V$.

Mit Hilfe dieser Definition können wir nun sagen, wann zwei Strecken die gleiche Länge besitzen.

K1 Sei $|AB| = |A'B'|$. Dann existiert ein Isomorphismus

$$f : (X, d) \rightarrow (X, d), \text{ sodass gilt } f(A) = A' \text{ und } f(B) = B'$$

Beispiel 5.4 (Kongruenz von zwei nicht entarteten Dreiecken). Zwei nicht entartete Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ sind genau dann kongruent, wenn es eine Kongruenzabbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$.

Beweis. Die Rückrichtung folgt direkt aus dem Kongruenzaxiom. Hinrichtung: Weil das Dreieck $\triangle ABC$ nicht entartet ist, sind die Vektoren $v = B - A$ und $w = C - A$ linear unabhängig, also eine Basis des \mathbb{R}^2 . Die lineare Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei definiert durch $h(v) = v' = B' - A'$ und $h(w) = w' = C' - A'$. Es sei nun $u \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Vektor. Dieser besitzt eine Darstellung der Form $u = \lambda v + \beta w$ und es gilt:

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \lambda^2 \|v\|^2 + \beta^2 \|w\|^2 + 2\lambda\beta \langle v, w \rangle$$

Auf der anderen Seite gilt $h(u) = \lambda v' + \beta w'$ und damit

$$\|h(u)\|^2 = \langle h(u), h(u) \rangle = \lambda^2 \|v'\|^2 + \beta^2 \|w'\|^2 + 2\lambda\beta \langle v', w' \rangle$$

Die Kongruenz der Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ impliziert aber schon folgende Gleichheiten:

$$\|v\| = \|v'\|, \|w\| = \|w'\| \text{ sowie } \langle v, w \rangle = \langle v', w' \rangle$$

Ein Vergleich der beiden obigen Gleichungen für die Skalarprodukte zeigt nun $\|u\| = \|h(u)\|$, somit ist h längentreu. Setzt man nun $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto h(x - A) + A'$ so ist f eine Kongruenzabbildung und erfüllt folgendes:

$$f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'.$$

□

6 Das Kontinuitätsaxiom und das Axiom von Pasch

Im folgenden Kapitel greifen wir auf die Quellen [6], [1] und [2] zurück. Das in der dargestellten Quelle als **Axiom von Pasch** bekannte Phänomen sagt im Bezug auf Dreiecke anschaulich Folgendes aus: Wenn wir ein angeordnetes $\triangle ABC$ betrachten und eine Gerade durch eine Seite in das Innere eines Dreieckes eintritt, so tritt sie gewiss auch wieder durch eine Seite des Dreieckes heraus. Dieser intuitiv logische Zusammenhang soll nun mit Hilfe der Abstandsfunktion und den Eigenschaften der Winkel in einem Dreieck formalisiert werden. Zunächst wollen wir das Axiom von Pasch betrachten und dieses verifizieren, um anschließend aus dessen Gültigkeit das Kontinuitätsaxiom als Sonderfall folgern zu können:

6.1 Axiom von Pasch

Bevor wir uns jedoch direkt das Axiom von Pasch anschauen, wollen wir noch eine kurze Definition einführen. Wir wollen festhalten, wann wir sagen können, dass zwei Punkte $A, B \in \mathcal{P}$ auf zwei verschiedenen Seiten von einem weiteren Punkt $P \in \mathcal{P}$ liegen und daraus einige Äquivalenzen folgern, welche wir für unseren Beweis des Axioms von Pasch benötigen:

Definition 6.1 (Lage von drei Punkten). Seien $A, B, P \in \mathcal{P}$ paarweise verschieden und kollinear. Falls $A * P * B$ gilt, dann sagen wir, A und B liegen auf verschiedenen Seiten von P . Ist dies nicht der Fall, dann sagen wir, A und B liegen auf der selben Seite von P .

Bemerkung 6.1. Für drei paarweise verschiedenen und kollineare Punkte $A, B, P \in \mathcal{P}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) A und B liegen auf verschiedenen Seiten von P .
- (ii) A und B liegen auf verschiedenen Seiten einer von AB verschiedenen Geraden durch P .
- (iii) A und B liegen auf verschiedenen Seiten aller von AB verschiedenen Geraden durch P .

Axiom von Pasch Seien A, B und C drei nicht kollineare Punkte und sei $g \in \mathcal{G}$ eine Gerade im Inneren von $\triangle ABC$, welche keinen der Punkte A, B, C enthält. Falls g durch einen Punkt $P \in \mathcal{P}$ mit $A * P * B$ der Strecke \overline{AB} geht, dann geht g auch durch einen Punkt der Strecke \overline{AC} oder \overline{BC} .

Anschaulich bedeutet dies, wenn eine Gerade durch eine Seite ins Innere eines Dreiecks eintritt, so tritt sie gewiss auch wieder durch eine Seite des Dreiecks heraus.

Beweis. Wir wollen den Beweis nun mit Hilfe folgender Quelle [6] betrachten: Da für $C \in g$ trivialerweise nichts mehr zu zeigen ist nehmen wir o.B.d.A. an, dass $C \notin g$. Wegen der Voraussetzung, dass der Punkt P zwischen den Punkten A und B liege, gilt also, dass die Punkte A und B auf verschiedenen Seiten von g liegen, sodass der Punkt C entweder auf derselben Seite wie A oder auf der selben Seite wie B liegen muss. Diese beiden möglichen Situtationen lassen sich aber durch eine Umbenennung von A in B bzw. umgekehrt ineinander überführen, so können wir o.B.d.A. annehmen, C liege auf der selben Seite von g wie A . Nach dieser Annahme liegen die Punkte B und C also auf verschiedenen Seiten von g , sodass es also einen weiteren Punkt $Q \in g$ mit $B * Q * C$ gibt. Dieser Punkt Q liegt nach Konstruktion im Durschnitt $g \cap \overline{BC}$, der somit nicht leer sein kann. Andererseits liegen die Punkt A und C auf der selben Seite von g , sodass es keinen Punkt $Q \in g$ gibt mit $A * Q * C$, der Durschnitt $g \cap \overline{AC}$ ist also leer.

□

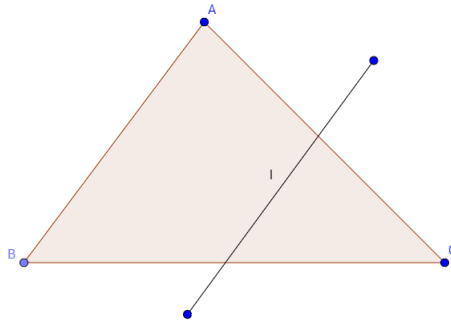


Abbildung 8: Veranschaulichung des Axiom von Pasch

6.2 Kontinuitätsaxiom

Wir gehen nun zu unserem letzten Axiom über, dem Kontinuitätsaxiom: Es bewege sich hierbei X entlang der Geraden AB und O sei auf einer Seite von AB . Das Kontinuitätsaxiom soll bestätigen, dass der Winkel $\angle AOX$ eine monotone und stetige Funktion von $d(A, X)$ ist.

Definition 6.2 (Überstumpfe Winkel). Seien $A, O, B \in \mathcal{P}$. Betrachte den Winkel $\angle AOB$ unter der Annahme, dass $0 < \angle AOB < \pi$. Wir sagen dann, der Winkel $\angle AOB$ sei **nicht überstumpf**.

Kontinuitätsaxiom Sei $\angle AOB$ nicht überstumpf. Des Weiteren sei C ein Punkt im Inneren des Dreiecks $\triangle AOB$. Falls ein weiterer Punkt D zwischen A und B liegt, dann gilt $0 < \angle AOD < \angle AOB$. Umgekehrt, falls $0 < \angle AOC < \angle AOB$ gilt, dann schneidet der Strahl \overrightarrow{OC} das Intervall $\text{Int } AB$.

Lemma 6.1. *Wenn ein angeordnetes Dreieck $\triangle ABC$ einen Winkel $\angle ABC$ hat, welcher nicht überstumpf ist, dann sind die übrigen Winkel $\angle BCA$ und $\angle CAB$ auch nicht überstumpf.*

Beweis. Sei X auf $B \cup \overrightarrow{BC}$ und setze $x = d(B, X)$. Sei nun $f(x) = 180^\circ - \angle ABC - \angle XAB$. Für alle $x \geq 0$ ist nun $f(x)$ eine stetige Funktion. Für $x > 0$ gilt nach der Winkelsumme im Dreieck $f(x) = \angle BXA$, welcher zwischen 0° und 180° beträgt. Für $x = 0$ gilt: $f(0) = 180^\circ - \angle ABC$, welcher nicht überstumpf ist. Somit ist $f(x)$ eine stetige Funktion auf dem Abschnitt $0 \leq x \leq d(B, C)$, sie ist weder 0° noch 180° . Daraus folgt, dass $f(x)$ nie überstumpf ist und daraus, dass $f(d(B, C)) = \angle BCA$. \square

Die Verifikation des Kontinuitätsaxioms ergibt sich als Spezialfall aus dem Axiom von Pasch und wird daher nicht ausführlicher dargestellt.

7 Metrische Axiome für euklidische Räume und Hilberts Axiomensystem

Dieses Kapitel orientiert sich an folgenden Darstellungen: [2], [3].

Das nun neu eingeführte Axiomensystem, also die Definition der euklidischen Geometrie über der Abstandsfunktion, soll nun in Bezug zu Hilberts Axiomensystem gestellt werden. Anhand des Aufbaus lassen sich bereits große Ähnlichkeiten erkennen, es bleibt allerdings die Frage, ob das hier dargestellte Axiomensystem wirklich alle fünf Gruppen von Hilberts Axiomen impliziert. Das ist in der Tat der Fall und wir können sogar ein Modell finden, welches uns zeigt, dass das System wirklich gültig ist. Die Implikation von Hilberts Axiomen soll nun anhand der Inzidenzaxiome bzw. der Axiome der Verknüpfung und die Anordnungsaxiome exemplarisch erläutert werden, die restlichen vier Axiomengruppen sind dann analog nachweisbar. Im Folgenden beziehe ich mich auf A.A. Ivanovs Darstellung [2]:

7.1 Die Inzidenzaxiome

Die folgenden Inzidenzaxiome werden aus [3] zitiert und die Notation entsprechend der vorangegangenen Arbeit angepasst. Sowohl für die Inzidenzaxiome (Axiome der Verknüpfung) als auch für die Anordnungsaxiome betrachten wir eine Menge \mathcal{P} (Punkte) und eine Menge \mathcal{G} (Geraden). Des Weiteren betrachten wir eine Relation R auf $\mathcal{P} \times \mathcal{G}$. Wir sagen ein Punkt P gehört genau dann zu einer Geraden $g \in \mathcal{G}$, falls $(P, g) \in R$.

Axiom I_1 Zu zwei verschiedenen Punkten $A, B \in \mathcal{P}$ gibt es genau eine Gerade $g \in \mathcal{G}$, sodass A und B zu g gehören: $A, B \in g$. Für diese Gerade schreiben wir oft kurz $g = AB$.

Beweis. Per Definition gilt, dass jede Gerade durch A und B , zum Beispiel die Gerade AB , auch die Strecke \overline{AB} enthält. Wenn eine Gerade CD ebenfalls \overline{AB} enthält, dann existiert eine Strecke von CD , welche sowohl \overline{AB} als auch \overline{CD} enthält. Daraus folgt, dass gilt $\overline{CD} \subset [AB]$. In diesem Fall gilt $AB \subset CD$. Zur umgekehrten Inklusion: Sei $M \in CD$, dann ist $\{C, D, M\}$ eine lineare Menge. Des Weiteren ist die lineare Menge $\{A, B, C, D\}$ verbundenen mit der linearen Menge $\{C, D, M\}$ nach Axiom (E2) wieder eine lineare Menge $\{A, B, C, D, M\}$. Die Menge $\{A, B, M\}$ ist also auch linear und einer der Punkte liegt zwischen den beiden anderen. Falls M zwischen A und B liegt, dann gilt $M \in [AB] \subset AB$. Wenn A zwischen M und B liegt, gilt $[AB] \subset [BM]$, $M \in AB$. Analog erfolgt der Fall, dass B zwischen M und A liegt. \square

Axiom I_2 Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.

Beweis. Folgt direkt aus dem Geradenaxiom (G1). \square

Axiom I_3 Es gibt drei Punkte, die nicht zu einer Geraden gehören, d.h. es gibt drei Punkte und eine Gerade, die nicht alle diese Punkte enthält.

Beweis. Folgt direkt aus dem Geradenaxiom (G3). \square

7.2 Die Axiome der Anordnung

Betrachtet man nun die dreistellige Relation $Z \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$, nennen wir diese Relation Zwischenrelation. Man sagt dann, dass ein Punkt $P \in \mathcal{P}$ zwischen zwei Punkten A und B liegt, falls $(A, P, B) \in Z$ gilt. Dafür schreiben wir dann einfach auch $P \in \overline{AB}$ und definieren folgendes:

Definition 7.1. Sind $A, B \in \mathcal{P}$, so versteht man unter der Strecke \overline{AB} alle Punkte, die zwischen A und B liegen.

Axiom A1 Liegt der Punkt C zwischen den Punkten A und B ($C \in \overline{AB}$), so sind die Punkte A, B und C drei verschiedene Punkte einer Geraden und C liegt dann auch zwischen B und A ($C \in \overline{BA}$).

Beweis. Dies folgt direkt aus der metrischen Notation von der Eigenschaft, dass ein Punkt B zwischen zwei Punkten A und C liegt. \square

Axiom A2 Zu zwei verschiedenen Punkten A und C gibt es mindestens einen Punkt B auf der Geraden AC , sodass C zwischen A und B liegt.

Beweis. Sei $d \in (0, |AC|)$. Nach Axiom (L3) existiert ein Punkt B , sodass gilt $|AB| = d$ und $|AB| + |BC| = |AC|$. Daraus folgt direkt, dass B zwischen A und C liegen muss. \square

Axiom A3 Sind drei Punkte einer Geraden gegeben, so liegt ein Punkt zwischen den beiden anderen Punkten.

Beweis. Seien $A, B, C \in \mathcal{P}$ Punkte auf einer Geraden $g \in \mathcal{G}$. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass B zwischen den Punkten A und C liege, dann gilt $|AB| + |BC| = |AC|$. Wenn beide Seiten der Gleichung ungleich 0 sind, gilt also $|AB| < |AC|$ und $|BC| < |AC|$. Es folgt also, dass die beiden Gleichheiten $|AC| + |CB| = |AB|$ und $|BA| + |AC| = |BC|$ nicht möglich sind. Somit kann weder der Punkt C zwischen den Punkten A und B liegen, noch der Punkt A zwischen den Punkten B und C . Es folgt also dass nur B zwischen den Punkten A und C liegen kann und die Behauptung ist gezeigt. \square

Bemerkung 7.1. Das Axiom (A1) besagt anschaulich, dass \overline{AB} und \overline{BA} übereinstimmen, weiter liegen alle Punkte der Strecke \overline{AB} auf der Geraden AB . Die Axiome (A2) und (A3) besagen anschaulich, dass sich Strecken beliebig verlängern lassen.

Das letzte Anordnungsaxiom, Axiom (A4) ist etwas komplizierter, aber stellt genau das Axiom von Pasch dar, welches bereits ausführlich bewiesen wurde. Dessen Kernaussage ist im Wesentlichen, dass die betrachtete Geometrie eine ebene Geometrie ist, also nicht mehr als zwei Dimensionen besitzt:

Axiom A4 Es seien A, B und C drei Punkte, die nicht zu einer Geraden gehören und g einer Gerade, zu der keiner der drei Punkte A, B und C gehört und die durch einen Punkt der Strecke \overline{AB} geht. Dann geht g entweder durch einen Punkt der Strecke \overline{AC} oder durch einen Punkt der Strecke \overline{BC} .

Bemerkung 7.2. Da das Axiom bereits bewiesen wurde, sollen nun noch einige Kommentare zur Anschaulichkeit dieses Axioms folgen. Zunächst ist es wichtig festzuhalten, dass das Axiom in der räumlichen Geometrie nicht erfüllt ist. Des Weiteren besagt das Axiom, dass eine Gerade, die ein Dreieck betritt, dieses auch wieder verlassen muss. Wir fordern hier somit, dass eine Gerade g nur genau eine der beiden verbleibenden Dreiecksseiten schneidet.

8 Inkommensurabilität

Das bereits zuvor kurz erwähnte Phänomen der Inkommensurabilität wird nun im Folgenden Kapitel genauer erklärt werden. Diesen Begriff wollen wir nun mit Hilfe von [7] und [11] genauer darstellen und einen Beweis für die Existenz inkommensurabler Strecken betrachten. Man nennt zwei Strecken *kommensurabel*, wenn eine gemeinsame Einheit existiert, sodass die beiden Strecken jeweils ein Vielfaches der Einheit sind.

Definition 8.1 (Kommensurabilität). Wir werden im Folgenden Strecken mit kleinen Buchstaben bezeichnen. Zwei Strecken a und b heißen **kommensurabel**, falls eine „Referenzstrecke“ e existiert und $n, m \in \mathbb{N}$ sodass folgendes gilt:

$$|a| = m \cdot |e| \text{ und } |b| = n \cdot |e| \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}$$

Das Verhältnis der Streckenlängen von a und b ist also ein Verhältnis $\frac{m}{n}$ natürlicher Zahlen.

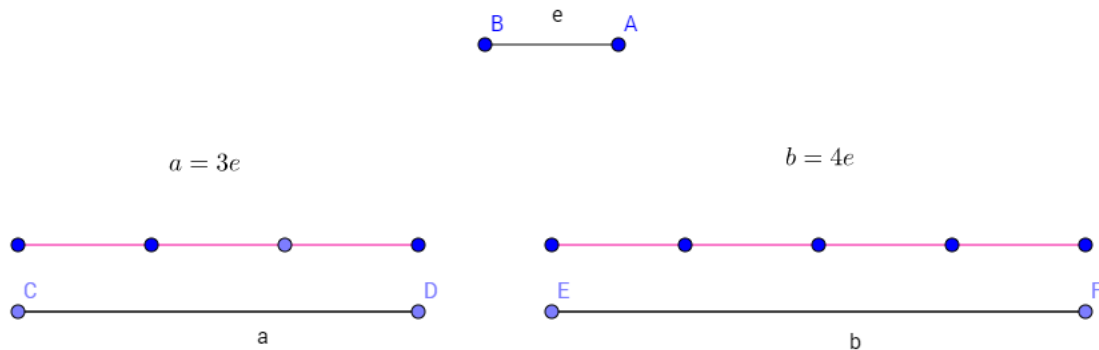
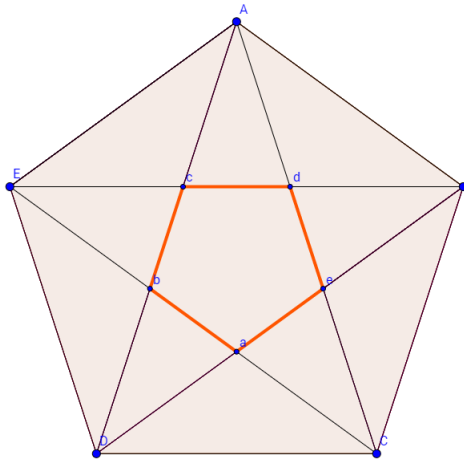


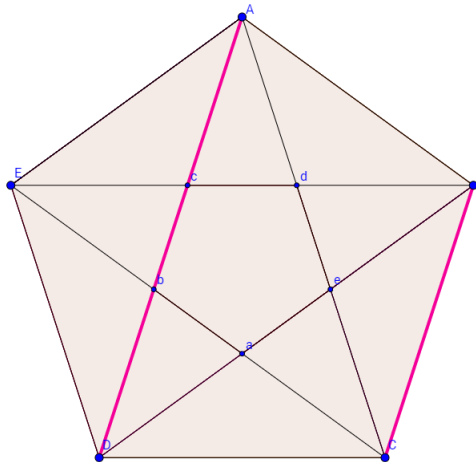
Abbildung 9: Veranschaulichung zur Kommensurabilität

Man glaubte früher, es gäbe immer ein gemeinsames Maß, das heißt, es gäbe nur kommensurable Strecken. Kommensurabel bedeutet, wenn wir uns die gegebene Definition und Veranschaulichung anschauen, dass jede Zahl als Bruch darstellbar ist. Wie wir heute wissen (bereits aus der Schule), gibt es nicht nur rationale Zahlen, also Zahlen, welche als Bruch darstellbar sind, sondern auch irrationale Zahlen, welche per Definition nicht als Bruch darstellbar sind. Ein sehr einfaches Beispiel für eine solche Zahl ist $\sqrt{2}$. Geometrisch ist diese sogenannte **Inkommensurabilität** zweier Strecken mit Hilfe der Diagonale eines Quadrates bewiesen. Ein weiterer sehr interessanter Nachweis über die Existenz inkommensurabler Strecken lässt sich über Diagonalen eines regelmäßigen Pentagrammes führen. Diesen wollen wir nun im Folgenden näher betrachten:

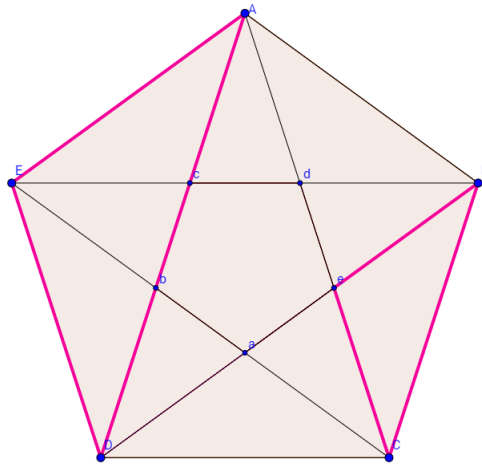
Zeichnet man in ein regelmäßiges Pentagramm A, B, C, D, E seine Diagonalen ein, so erhält man in der Mitte zunächst ein kleines regelmäßiges Fünfeck mit den Eckpunkten a, b, c, d, e .



Je eine Seite und eine Diagonale im regelmäßigen Pentagramm sind dann parallel.

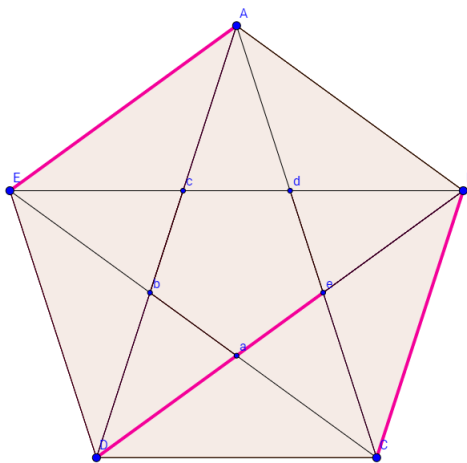


Daraus können wir nun erkennen, dass die Dreiecke $\triangle AED$ und $\triangle BeC$ ähnlich sind:

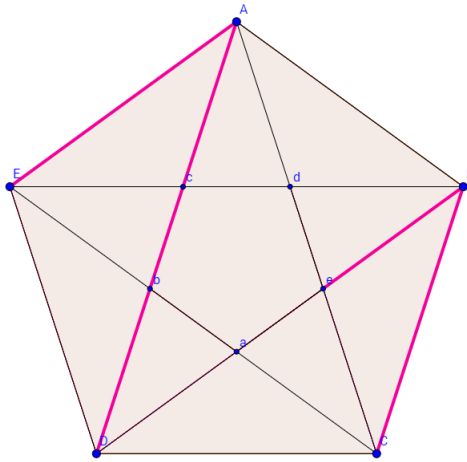


Aus der Ähnlichkeit können wir nun weiter folgern, dass gilt:

$$|AD| : |AE| = |BC| : |Be| \quad \text{und} \quad |BC| = |AE| = |De|$$



und weiter $BD - De = Be$ woraus folgt $BD - BC = Be$.

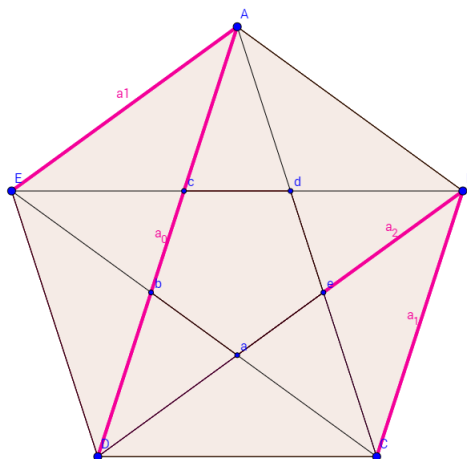


Insgesamt ergibt sich aus diesen Eigenschaften des regelmäßigen Pentagramms die folgende allgemeine Beziehung:

$$|Diagonale| : |Seite| = |Seite| : |(Diagonale - Seite)|$$

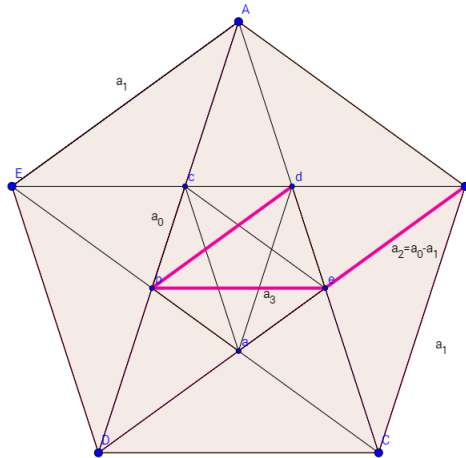
Sei nun a_0 die Länge einer Diagonalen und a_1 die Länge einer Seite. Wir bezeichnen die Differenz $a_0 - a_1 = a_2$. Dann gilt also

$$a_0 : a_1 = a_1 : a_2.$$



Bildet man nun die Differenz $a_1 - a_2 = a_3$, so kann man erkennen, dass a_3 eben genau eine Seite im Inneren des kleinen Pentagramm ist und a_2 der Diagonale des Pentagramms entspricht. Daraus ergibt sich dann:

$$a_2 : a_3 = a_1 : a_2 = a_0 : a_1$$



Dieses Verfahren ist nun unendlich oft fortsetzbar, weil durch Einzeichnen der Diagonalen im regelmäßigen Pentagramm eben immer wieder ein inneres, kleines, ebenfalls regelmäßiges Pentagramm entsteht und die Differenz aus Seite und (*Diagonale – Seite*) des größeren Pentagons genau die Länge der Seite des inneren, kleineren Pentagramms hat und die Differenz (*Diagonale – Seite*) genau der Diagonale des inneren Pentagramms entspricht. Also gilt:

$$a_0 : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = a_4 : a_5 \quad (3)$$

Dieser Prozess bricht niemals ab und beweist somit die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite im regelmäßigen Pentagramm, was wir nun im Folgenden beweisen wollen:

Satz 8.1. *Diagonale und Seite im regelmäßigen Pentagramm sind inkommensurabel.*

Beweis. Zunächst müssen wir einige wichtige Dinge aus (3) festhalten: Wir können, angelehnt an die obige Gleichung, jedes a_i folgendermaßen darstellen:

$$a_2 = a_0 - a_1$$

und

$$a_3 = a_1 - a_2.$$

Dieser Prozess setzt sich nun iterativ immer weiter fort. Allgemein können wir also folgenden Zusammenhang unserer a_i bzw. unserer a_{i+2} festhalten:

$$a_i : a_{i+1} = a_{i+1} : a_{i+2} > 1 \quad (4)$$

und

$$a_{i+2} = a_i - a_{i+1} \quad \forall i \geq 0. \quad (5)$$

Der Beweis erfolgt nun durch einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also zunächst an, Diagonale (a_0) und Seite (a_1) in einem regelmäßigen Pentagramm seien kommensurabel. Somit hätten diese folgende Darstellung:

$$a_0 = m \cdot |e| \text{ und } a_1 = n \cdot |e|.$$

Für a_2 würde mit Hilfe unserer Beobachtungen aus (3) und der Annahme der Kommensurabilität also folgendes gelten:

$$a_2 = a_0 - a_1 = (m - n) \cdot |e| = k \cdot e \text{ wobei } (m - n) \in \mathbb{N}, m > n$$

Würden wir diesen Prozess nun iterativ weiter verfolgen, würden wir für a_3 nun erhalten:

$$a_3 = a_1 - a_2 = (n - k) \cdot |e| \text{ wobei } (n - k) \in \mathbb{N}$$

Im Allgemeinen Fall erhalten wir also für a_i folgende Gleichung:

$$a_i = n_i \cdot |e|, \text{ wobei } n_i \in \mathbb{N}$$

aber unsere a_i werden beliebig klein, somit würde gelten $n_i \notin \mathbb{N}$, was ein Widerspruch zur Annahme und der Definition der Kommensurabilität darstellt.

Nun bleibt natürlich noch eine Frage offen: Woher wissen wir, dass unsere a_i immer kleiner und sogar beliebig klein werden?

Aus unserer Skizze ist zunächst bereits ersichtlich (da wir mit a_0 die Diagonale des Pentagramms und mit a_1 die Seite des Pentagramms bezeichnen), dass Folgendes gilt:

$$a_0 : a_1 = \frac{a_0}{a_1} > 1$$

Wir wollen nun vom Einzelfall, also unserem ersten Glied auf unseren allgemeinen Fall schließen und bezeichnen dafür das Verhältnis von a_0 zu a_1 , also $\frac{a_0}{a_1}$, mit α .

Wir erhalten daraus folgende Ungleichung:

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = \alpha > 1$$

Wenn wir diese nun nach a_{i+1} umformen erhalten wir daraus:

$$a_{i+1} < \frac{1}{\alpha} \cdot a_i$$

Somit können wir durch diese Umformung zeigen, dass unsere a_i und somit auch unsere a_{i+1} beliebig klein werden, denn es galt durch die vorangegangenen Skizzen $\alpha = \frac{a_0}{a_1} > 1$, woraus trivialerweise $\frac{1}{\alpha} < 1$ folgt, welches an unser a_i heranmultipliziert wird. Somit wird a_{i+1} beliebig klein, was zu zeigen war. \square

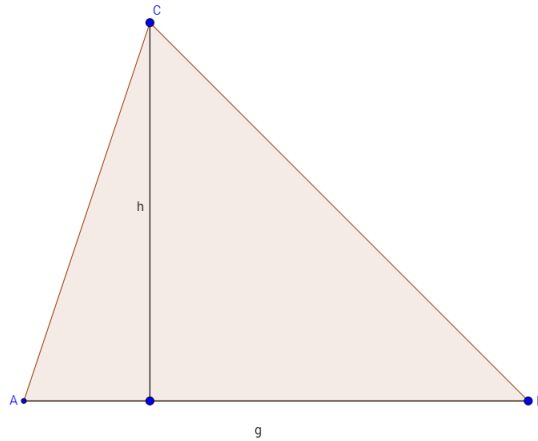
Das Problem der Inkommensurabilität und somit die Existenz von irrationalen Zahlen wird uns auch weiterhin im Laufe der Arbeit beschäftigen. Im folgenden Kapitel werden nun die Strahlensätze als wichtiges Ergebnis der euklidischen Geometrie mit Anwendungen dargestellt und bewiesen werden und deren Gültigkeit im Zusammenhang mit inkommensurablen Strecken untersucht werden.

9 Die Strahlensätze

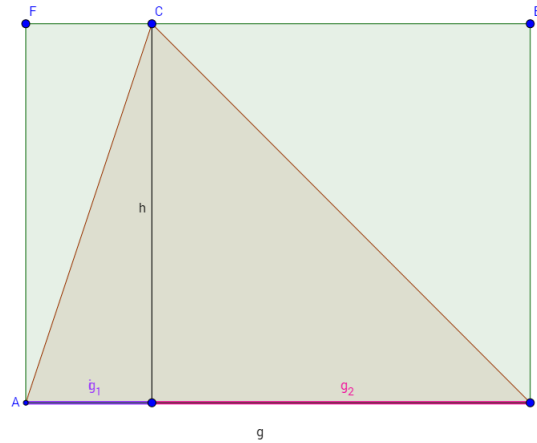
Im Folgenden wollen wir uns als Anwendungsbeispiel der ebenen Geometrie die Strahlensätze anschauen. Dieser findet sowohl in der Schule als auch im Alltag oft eine Anwendung und ist für viele Menschen ein Begriff. Wir wollen uns im Folgenden die Aussagen der Strahlensätze genauer anschauen, diese beweisen und die Frage beantworten, ob diese auch für inkommensurable Strecken gelten. Grundlage dieses Kapitels sind folgende Quellen: [8], [9], [10] und [13].

9.1 Der Flächeninhalt eines Dreiecks

Wir wollen den Flächeninhalt eines Dreiecks herleiten. Da die Formel für Rechtecke Länge mal Breite hier nicht funktioniert, versuchen wir die unbekannte Form in eine bekannte Form umzugestalten. Unser Dreieck hat eine Grundseite, die wir mit g bezeichnen und eine Höhe, die wir mit h bezeichnen.



Die Höhe h unterteilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. Diese zwei rechtwinkligen Dreiecke ergänzen wir mit zwei kongruenten, gedrehten Dreiecken jeweils zu Rechtecken, von denen wir die Flächeninhalte kennen.



Der Flächeninhalt von unseren Rechtecken ist doppelt so groß wie von unserem Dreieck. Diese Feststellung machen wir schon einmal. Wir wollen nun den gesamten Flächeninhalt von den Rechtecken und addieren sie zu diesem Zweck:

$$A_{\text{Dreieck}} = g_1 \cdot h + g_2 \cdot h = (g_1 + g_2)h = g \cdot h$$

Nun müssen wir das Ergebnis nur noch durch zwei teilen und erhalten den gesuchten Flächeninhalt unseres Dreiecks:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{g_1 h + g_2 h}{2} = \frac{(g_1 + g_2)h}{2} = \frac{g \cdot h}{2}$$

9.2 Erster Strahlensatz

Wird ein Strahlenbündel von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Strecken auf einem Strahl wie die entsprechenden Strecken auf irgendeinem Strahl.

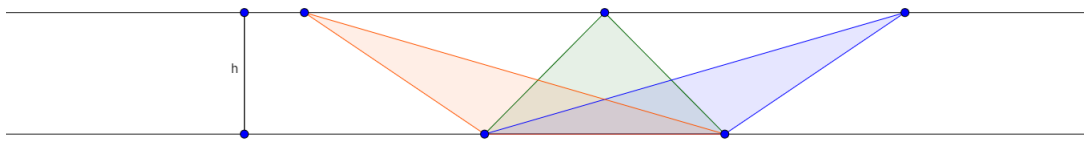


Abbildung 10: Darstellung dreier verschiedener Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt

Das orangene, das grüne und das blaue Dreieck haben den gleichen Flächeninhalt, denn der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich aus:

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{g \cdot h}{2}$$

In diesem Falle hier haben die Dreiecke dieselbe Grundseite und wegen der Parallellität der waagerechten Geraden sind auch ihre Höhen gleich lang.

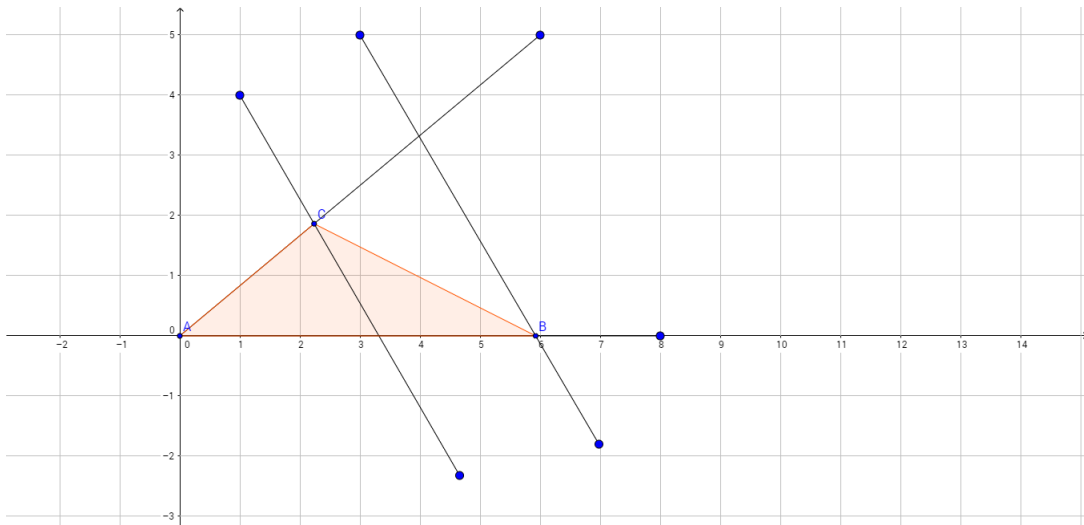


Abbildung 11: Darstellung oranges Dreieck

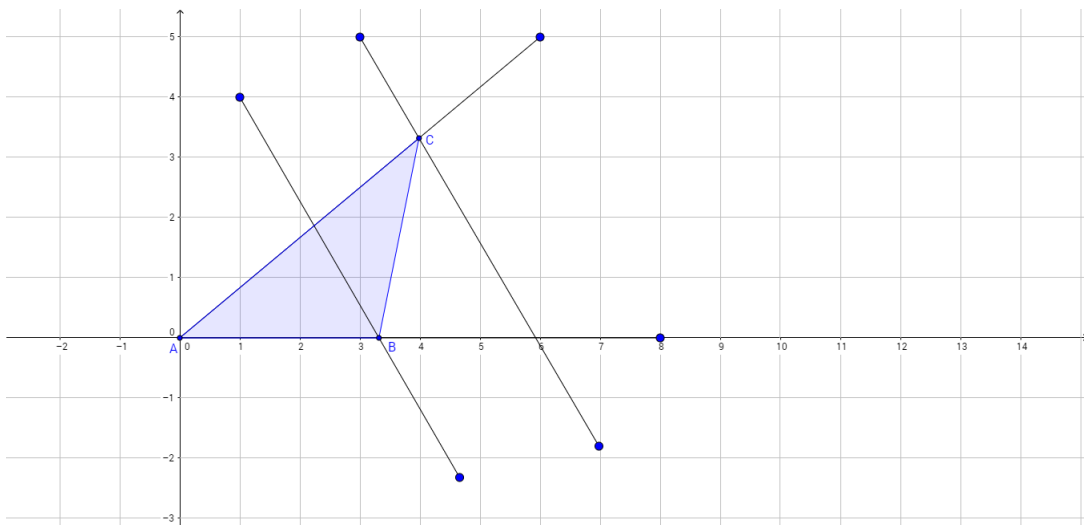


Abbildung 12: Darstellung blaues Dreieck

Daher sind auch diese in Abbildung 11 und 12 dargestellten Dreiecke, wiederum Parallelität vorausgesetzt, gleich groß.

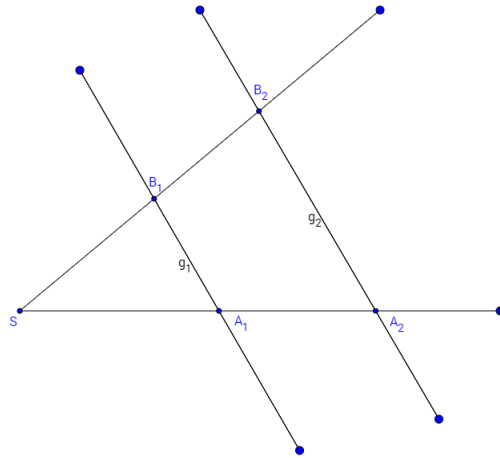


Abbildung 13: Darstellung der Aussage des ersten Strahlensatzes

Die Behauptungen des ersten Strahlensatzes sind, bezogen auf diese Zeichnung folgende:

$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$$

und

$$\overline{SA_1} : \overline{A_1A_2} = \overline{SB_1} : \overline{B_1B_2}$$

In der ersten Gleichung werden zwei Anfangsstücke ins Verhältnis zueinander gesetzt, in der zweiten Gleichung ein Anfangsstück und das angrenzende Nichtanfangsstück.

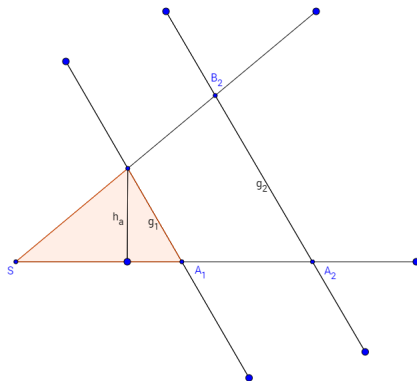


Abbildung 14: Darstellung des Flächeninhaltes des kleinen Dreiecks mit Grundseite $\overline{SA_1}$ und Höhe h_a

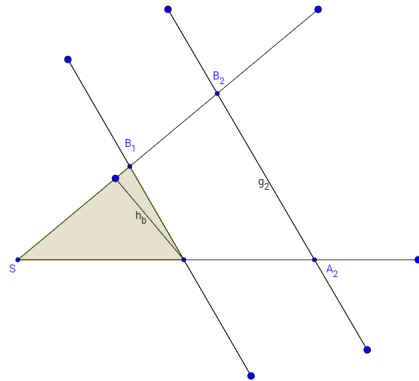


Abbildung 15: Darstellung des Flächeninhaltes des kleinen Dreiecks mit Grundseite $\overline{SA_1}$ und Höhe h_b

Die beiden Flächen sind mit dem Argument aus Abbildung 10 gleich groß, es gilt also Folgendes:

$$\frac{1}{2}\overline{SA_1}h_a = \frac{1}{2}\overline{SB_1}h_b \quad (6)$$

Die gleiche Argumentation wenden wir nun für die beiden großen Dreiecke an, einmal mit Basis $\overline{SA_2}$ und gleichbleibender Höhe h_a und im zweiten Falle mit Basis $\overline{SB_2}$ und gleichbleibender Höhe h_b .

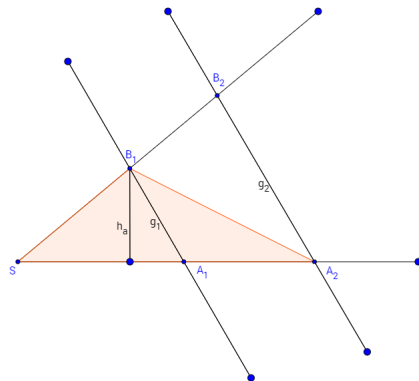


Abbildung 16: Darstellung des Flächeninhaltes des großen Dreiecks mit Basis $\overline{SA_2}$ und Höhe h_a

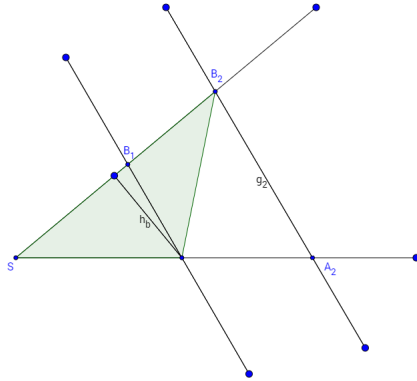


Abbildung 17: Darstellung des Flächeninhaltes des großen Dreiecks mit Basis $\overline{SA_2}$ und Höhe h_b

Diese Flächen sind gleich groß, also gilt

$$\frac{1}{2}\overline{SA_2}h_a = \frac{1}{2}\overline{SB_2}h_b \quad (7)$$

Beide Gleichungen werden nun dividiert

$$\frac{\frac{1}{2}\overline{SA_1}h_a}{\frac{1}{2}\overline{SA_2}h_a} = \frac{\frac{1}{2}\overline{SB_1}h_b}{\frac{1}{2}\overline{SB_2}h_b}$$

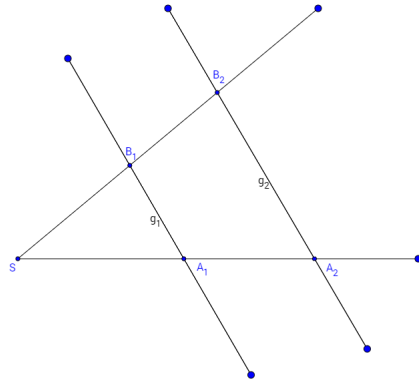
Und damit ergibt sich direkt unsere erste Behauptung:

$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{SB_1} : \overline{SB_2}$$

Nun gilt es noch den zweiten Teil der Aussage des ersten Strahlensatzes nachzuweisen. Um dies zu verifizieren betrachten wir zunächst die Kehrwerte der Behauptung:

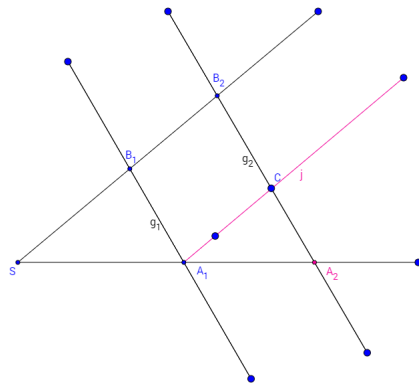
$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{SA_2} - \overline{SA_1}}{\overline{SA_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}} - 1 = \frac{\overline{SB_2}}{\overline{SB_1}} - 1 = \frac{\overline{SB_2} - \overline{SB_1}}{\overline{SB_1}} = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{SB_1}}$$

9.3 Zweiter Strahlensatz



Die Geraden g_1 und g_2 seien parallel. Es gilt Folgendes:

$$\overline{SA_1} : \overline{SA_2} = \overline{A_1A_2} : \overline{A_2B_2}$$

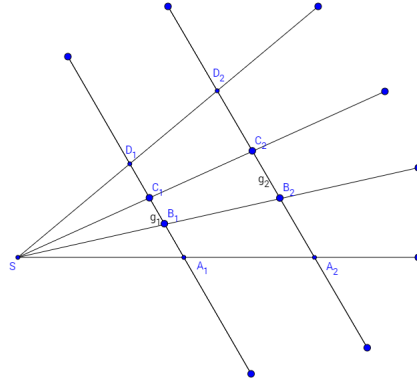


Man zeichnet eine Parallele zur Gerade SB_2 durch A_1 und betrachte die neue Figur vom neuen Strahlungszentrum A_2 aus. Da hier $\overline{CB_2}$ und $\overline{A_1B_1}$ als Gegenseiten eines Parallelogramms gleich lang sind gilt nach dem ersten Strahlensatz:

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_2S}} = \frac{\overline{CB_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}}$$

Der dritte Strahlensatz lässt sich nun aus dem ersten und zweiten Strahlensatz folgern und daher soll nun nur dessen Aussage kurz dargestellt werden:

9.4 Dritter Strahlensatz



Dabei sind g_1 und g_2 wieder zwei parallele Geraden. Es gilt nach dem zweiten Strahlensatz folgendes:

$$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = \overline{C_1D_1} : \overline{C_2D_2}$$

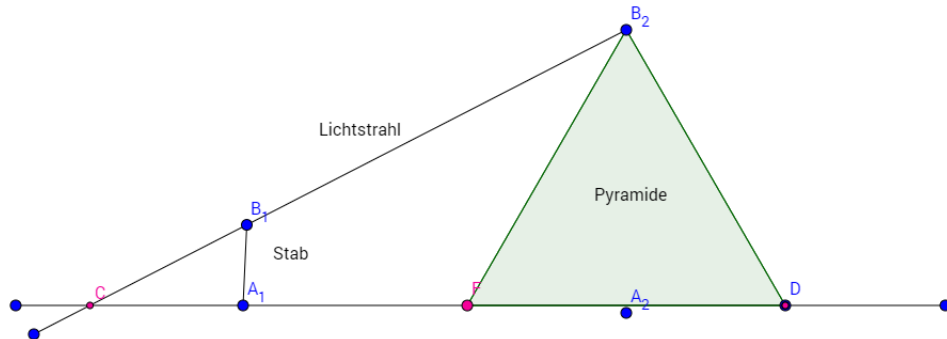
Beweis. Neben dem ersten und dem zweiten Strahlensatz gilt hier:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC_2}} = \frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{C_2D_2}}$$

□

9.5 Anwendungsbeispiel

Im Folgenden wollen wir uns noch ein einfaches Anwendungsbeispiel der Strahlensätze anschauen. Dieses soll auf den antiken griechischen Philosophen und Mathematiker Thales von Milet zurückgehen. Dieser soll mit Hilfe eines Stabes durch Messung der Schattenlänge die Höhe der ägyptischen Cheopspyramide ermittelt haben. [17]



Diese Berechnung könnte, abgesehen von der Längeneinheit und Schreibweise, etwa folgendermaßen aussehen:

Höhe des Stabes: $\overline{AB} = 1,63m$; Schattenlänge des Stabes $\overline{CA} = 2,00m$; Abstand des Stabes von der Pyramide : $\overline{AC} = 63m$; Seitenlänge der Pyramide : $\overline{CD} = 230m$

Es gilt Folgendes:

$$\overline{A_2B_2} : \overline{AB} = \overline{CA_2} : \overline{CA}$$

$$\overline{A_2B_2} = \frac{1,63m * (2,00m + 63m + 230m : 2)}{2,00m} = 146,7m$$

9.6 Strahlensätze für inkommensurable Strecken

Nachdem wir nun des Phänomen der Inkommensurabilität betrachtet haben und uns die Strahlensätze genauer angeschaut haben, stellt sich nun die Frage: Gelten die Aussagen der Strahlensätze auch für inkommensurable Strecken? Die Antwort lautet: Ja! Doch worin liegt dies begründet? [13]. Dafür wollen wir uns zunächst noch einmal ins Gedächtnis rufen, was es im kommensurablen Fall bedeutet, dass Streckenverhältnisse gleich sind.

Definition 9.1. Es haben die Strecken A und a ein gemeinsames Maß e und die Strecken B und b ein gemeinsames Maß e' , genau dann wenn es

natürliche Zahlen n, m, n', m' gibt, sodass Folgendes gilt:

$$A = n \cdot e, a = m \cdot e, B = n'e, b = m'e'$$

Dann ist das Streckenverhältnis $\frac{A}{a}$ gleich dem Verhältnis $\frac{B}{b}$ wenn gilt:

$$\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'} \text{ also } \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{n}{m} \text{ oder } m = n \cdot a \text{ und } m \cdot B = n \cdot b$$

Verallgemeinerung: Das Verhältnis der Strecken A und a ist gleich dem Verhältnis der Strecken B und b , wenn für alle natürlichen Zahlen n und m einer der folgenden Fälle gilt:

1. $mA < na$ und $mB < nb$
2. $mA = na$ und $mB = nb$
3. $mA > na$ und $mB < nb$

Hierbei kann der zweite Fall nur dann eintreten, wenn die Strecken kommensurabel sind.

Nun gibt es noch eine andere Möglichkeit: Das Verhältnis der Strecke a und A ist gleich dem Verhältnis der Strecken b und B , wenn sie die gleiche Wechselwegnahme haben. Für die Geradenabschnitte in den Strahlensätzen ist dies offenbar wahr, denn wir können die Wechselwegnahme entlang der Parallelen von einem Strahl auf einen anderen übertragen. Für inkommensurable Strecken bricht dieser Algorithmus, auch bekannt als euklidischer Algorithmus, nie ab, aber in jedem Schritt erhält man auf beiden Strahlen das gleiche Teilverhältnis (plus Rest).

Somit gelten die Strahlensätze auch für inkommensurable Strecken.

10 Schulbezogener Teil

Die euklidische Geometrie spielt schon in der Schule eine nicht wegzudenkende Rolle. Bereits in der Grundschule werden zunächst verschiedene Figuren, beispielsweise Dreiecke, Vierecke und Kreise, gezeichnet. In der Unterstufe dann werden diese Figuren benannt und erste Berechnungen gemacht. Strecken und Winkel spielen eine wichtige Rolle und man beginnt Flächeninhalte zu berechnen. In der Mittelstufe, vor allem in Klasse 9, stehen dann Volumenberechnungen von Körpern hinsichtlich der Geometrie im Vordergrund und dadurch bedingt spielt hier auch der Abstandsbegriff eine sehr wichtige Rolle. Abstände werden vor allem in rechtwinkligen Dreiecken mit Hilfe des Pythagoras berechnet, um schließlich mit der errechneten Länge

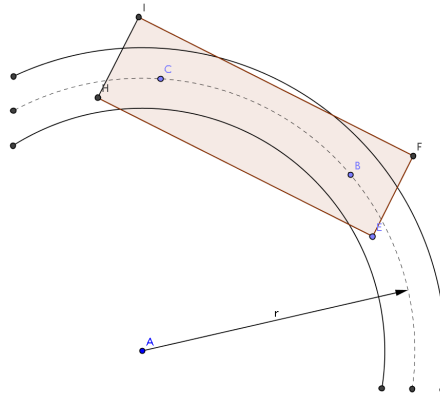
dann beliebige Volumina ausrechnen zu können. Da die angefertigte Arbeit ihren Schwerpunkt auf der Abstandsbegriff bzw. der Abstandsfunktion hat, begrenzt auf die Ebene Geometrie, sollen im nun Folgenden Anwendungsbeispiele des Satzes des Pythagoras und somit der Berechnung unterschiedlicher Abstände in alltäglichen Situationen anhand verschiedener Aufgaben, wie sie auch in der Schule anwendbar wären, dargestellt werden.

10.1 Aufgaben mit Anwendungsbezug - rein rechnerisch

Aufgabe 10.1. Einige Fahrzeuge des RNV verkehren sowohl auf den innerstädtischen Gleisen als auch auf denen der Deutschen Bahn AG. Der abgebildete Zug hat eine Breite von $2,65m$ und einen Drehgestellabstand von $10m$ und fährt auf Gleisen mit einer Spurweite von $1435mm$. In einer Kurve wird insbesondere auf der Kurveninnenseite jedoch wegen des Überhangs mehr Platz benötigt. Berechne für den kleinsten Kurvenradius von $30m$ den Mindestabstand eines festen Gegenstandes von der Gleismitte. Untenstehende Skizze zeigt den rechteckigen Wagenkasten sowie die Drehgestellmitten, das Bahngleis, sowie die Mittellinie des Bahngleises.

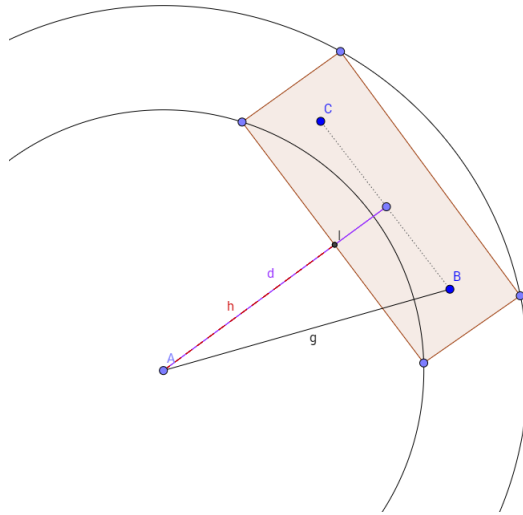


Abbildung 18: Quelle: 15.07.2006 aufgenommen von Herrn Christian Ditterich und unter www.bahnarchiv.net veröffentlicht, letztes Abrufdatum 15.09.2006



Eine mögliche Darstellung einer Lösung der Aufgabe könnte folgendermaßen aussehen:

Skizze Zunächst sollte immer eine Skizze angefertigt werden, welche sinnvoll beschriftet sein soll, um kenntlich zu machen, welche Größen zu berechnen sind und in welche Lage sie sich zueinander befinden.



Rechnung In der Aufgabenstellung gegeben ist der Radius von $30m$. Somit hat die Strecke \overline{AB} die Länge $30m$ und die Strecke \overline{CB} nach Aufgabenstellung die Länge $10m$. Im folgenden benötigen wir nur die Hälfte der Strecke \overline{CB} . Somit können wir nun Folgendes berechnen:

$$d = \sqrt{30^2 - 5^2} = \sqrt{875}$$

Für die Höhe h muss man nun von d die Hälfte der Breite des Zuges abziehen, es gilt also folgendes:

$$h = d - \frac{2,65}{2} = \sqrt{875} - \frac{2,65}{2}$$

somit gilt insgesamt für die gesuchte Entfernung:

$$x = r - h = 30 - \left(\sqrt{875} - \frac{2,65}{2}\right)$$

Aufgabe 10.2. Das Industriedenkmal in Bottrop ist ein Tetraeder mit $60m$ Kantenlänge und $12m$ hohen Stützen.

- a) Berechne wie hoch die Spitze über dem Boden liegt.
- b) Berechne wie groß die durch das Denkmal überbaute Fläche ist.



Abbildung 19: Quelle: Privat aufgenommen auf einer Exkursion von Herr Helmut Stadtmüller

Diese Aufgabe könnte folgendermaßen sehr einfach gelöst werden:

- a) Ein Tetraeder besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken. Um die Höhe der gesamten Konstruktion zu bekommen berechnen wir einfach die Höhe im Tetraeder und addieren die $12m$ Höhe der Stützen auf. Wir erhalten folgende Rechnung:

$$h_1 = \sqrt{60^2 - 30^2} = \frac{60}{2}\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$$

insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{60^2 - \left(\frac{2}{3}h_1\right)^2} = \sqrt{60^2 - \frac{4}{9} \cdot 30^2 \cdot 3} \\ &= \sqrt{60^2 - \frac{4}{3} \cdot 30^2} \\ &= \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot 30 \\ &= 60 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Um die Gesamthöhe zu erhalten müssen wir nun noch die $12m$ der Stützen addieren.

- b) Gesucht ist die Größe der umbauten Fläche, in diesem Fall also der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks. Wir erhalten:

$$A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{60^2}{4}\sqrt{3} = 900\sqrt{3}$$

Somit beträgt die Größe der umbauten Fläche $900m^2$.

10.2 Praktische Aufgaben mit Anwendungsbezug

Aufgabe 10.3 (Die Eisenbahnstrecke). In der Kurve einer Eisenbahnstrecke muss das Lichtraumprofil innen und außen erweitert werden, da der Wagen innen und außen gegenüber dem Lauf in einer Geraden einen Überhang hat. Wie groß ist dieser in Abhängigkeit von der Wagenlänge, dem Drehzapfenabstand, der Wagenbreite und dem Kurvenradius? Erstelle einen ausführlichen Lösungsweg mit Anfertigung einer Skizze, Lösungsidee, Rechnerischem Lösungsweg und Interpretation des errechneten Ergebnisses.

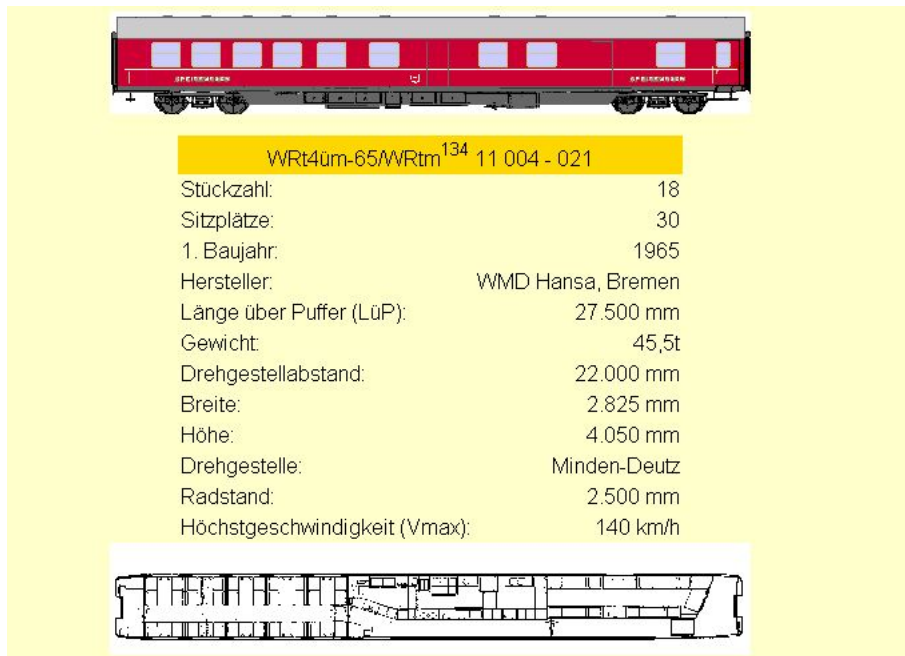
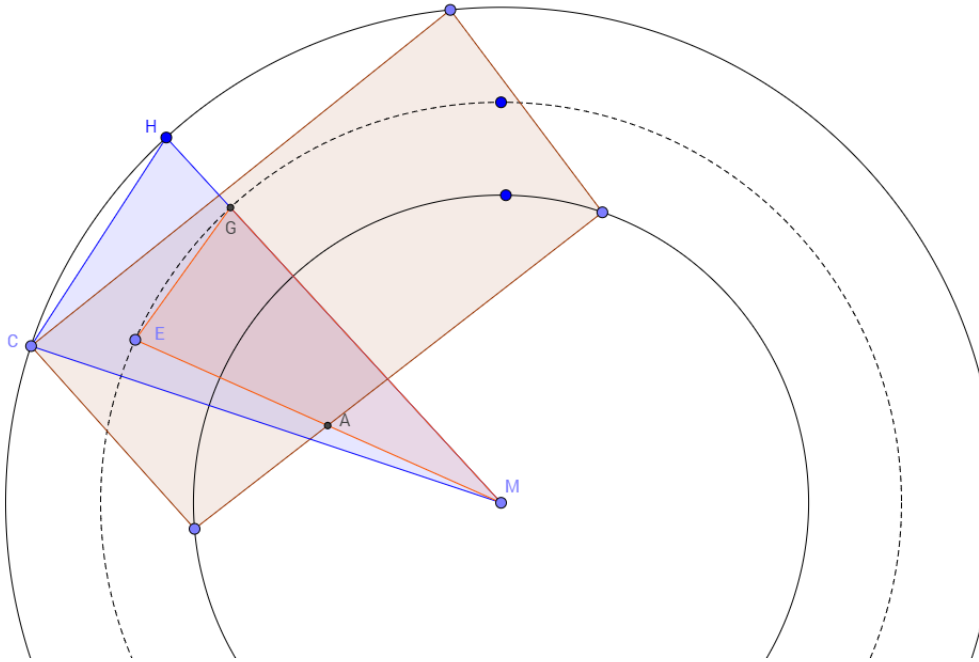


Abbildung 20: Quelle: <http://modellbahn.berghoffs.de/index.php/dsg-deutsche-schlafwagen-und-speisewagen-gesellschaft/die-speisewagen-der-dsg/vorratswagen-bauart-1964>, letztes Abrufdatum. 17.11.17

Eine Lösung der Aufgabe könnte folgendermaßen aussehen:

Skizze Zunächst ist es sinnvoll eine Skizze des Problems anzufertigen. Diese könnte beispielsweise folgendermaßen aussehen:



Zuordnung der Strecken zu den Daten \overline{EG} : Kathete 1; halber Drahtgestellabstand F, E : Drehgestellpunkte \overline{ME} : Hypotenuse kleines Dreieck \overline{MC} : Hypotenuse großes Dreieck \overline{GM} : Kathete 2

Berechnung des inneren Überstandes Pythagoras im ΔGME

$$\begin{aligned}
 k_1^2 + k_2^2 &= hy^2 \\
 11^2 + k_2^2 &= 800^2 \\
 121 + k_2^2 &= 640000 \\
 k_2^2 &= 639879 \\
 k_{21,2} &= \pm\sqrt{639879} \\
 k_2 &= 799,92
 \end{aligned}$$

Um den inneren Überstand zu errechnen, muss man nun die Hälfte der Zugbreite von den 799,92m subtrahieren. Man erhält 789,51m.

Berechnung des äußeren Überstandes Pythagoras im $\triangle CMH$

$$\begin{aligned}k_1^2 + k_2^2 &= hy^2 \\801,33^2 + 13,75^2 &= hy^2 \\642129,77 + 189,16 &= hy^2 \\hy^2 &= 642318,93 \\hy_{1,2} &= \pm\sqrt{642318,93} \\hy &= 801,45\end{aligned}$$

Man darf also Häuser, Masten und andere Bauten nicht näher als $801,45m$ an den Mittelpunkt des Kurvenradius heranbauen.

Aufgabe 10.4 (Das LKW-Problem). Was passiert, wenn ein LKW in die Kurve fährt? Beim Einfahren in die Kurve schwenkte die vordere Ecke auf der Außenseite des Anhängers des Lastwagens nach außen aus. Gleichzeitig schneidet der Anhänger auf der Innenseite die Kurve. Der Fahrer muss nun beachten, ob die Breite der Kurve ausreicht. Wie breit muss die Kurve für einen LKW mit Normlänge sein? Arbeitsaufträge: Fertige zunächst eine Skizze an, ermittle sinnvolle Daten für den LKW, finde einen rechnerischen Lösungsweg. Was passiert für verschiedene Werte von r ? Interpretiere schließlich dein Ergebnis!

Diese Aufgabe könnte beispielsweise, ähnliche wie die vorangegangene Aufgabe, als Gruppenarbeit ausgeführt werden und die Ergebnisse dann vor der Klasse präsentiert werden. Ein Lösungsweg könnte beispielsweise folgendermaßen aussehen:

Skizze

Daten LKW Länge des Anhängers: $16,5m$; Länge vom vorderen Anhänger bis zur mittleren Hinterachse: $14,5m$; Breite des LKW : $2,5m$

Rechnerischer Lösungsweg Um eine rechnerische Lösung des Problems zu finden ist das $\triangle ABC$ von Bedeutung: Der Winkel am Punkt B beträgt 90° , da er ein Stufenwinkel zur Tangente t bildet, welche wiederum orthogonal zu r liegt. Somit ergeben sich für die folgenden Strecken die entsprechenden Längen: $\overline{BC} = 14,5m$; $\overline{BA} = r + 2,5m$; $\overline{AC} = R$ Wähle nun für $r = 8$ und wende den Satz des Pythagoras an:

$$\overline{(CB)}^2 + \overline{(AB)}^2 = R^2$$

Einsetzen liefert nun:

$$(14,5)^2 + (8 + 2,5)^2 = R^2 \Leftrightarrow R = 17,90$$

Wenn also der innere Kurvenradius $8m$ beträgt, so muss der äußere Kurvenradius mindestens $17,90m$ betragen, damit ein entsprechender LKW durch die Kurve passt.

Außenradius - Innenradius = Breite der Straße

$$17,9m - 8m = 9,9m$$

Die Breite der Straße beträgt in diesem Falle also $9,9m$.

Verschiedene Werte für r Für $r = 10m$ erhält man $R = 19,14m$ und somit eine Straßenbreite von $9,14m$. Für $r = 20m$ erhält man $R = 26,77m$ und somit eine Straßenbreite von $6,77m$.

Fazit und Interpretation Wir haben somit nun herausgefunden, dass eine Abhängigkeit zwischen dem Wert, der für den Innenkurvenradius (r) gewählt wird und dem daraus berechneten Außenkurvenradius (R). Je enger der Innenkurvenradius, desto breiter muss die Straße sein. Das bedeutet also, dass man beim Straßenbau solche Berechnungen vorher durchführen muss, damit der LKW später problemlos die Kurve passieren kann. Die von uns berechneten Werte sind allerdings nur Minimalwerte, bei denen der LKW gerade noch durch die Kurve passt, d.h. eine funktionsfähige Straße muss noch um $1 - 2m$ breiter sein. Außerdem muss noch die Breite der Gegenfahrbahn berücksichtigt werden, denn es können einem LKW in der Kurve auch andere Fahrzeuge entgegen kommen.

Literatur

- [1] S. MacLane, *Metric postulates for plane geometry*, American Math. Monthly 66, 543-555, 1959.
- [2] A. A. Ivanov, *Metric axiomatics of euclidean space*, J.Math. Sciences 119, 45-54, 2004.
- [3] F. Bechthold, *Geometrie- Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete*, Springer, 2006.
- [4] S. Krauter, C. Bescherer, *Erlebnis Elementargeometrie, Ein Arbeitsbuch zum Selbständigen und aktiven Entdecken*, Springer, 2005.
- [5] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2.) Analysis*, Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.
- [6] Dr. H. Kasten, Dr. D. Vogel, *Einführung in die Geometrie, Vorlesungsskript*, Sommersemester, 2015.
- [7] J. Krug, *Inkommensurabilität,- der goldene Schnitt* http://www.mathematik.uni-marburg.de/~bschwarz/Sem_09W_files/11, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [8] Y. Günaydin, *Formulierung der Strahlensätze, Tutorium für die elementare Geometrie*, <https://www.math.uni-bielefeld.de/fast/geo2/studar/strahl.pdf>, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [9] R. Albers, *Elemente der Geometrie, Uni Bremen* http://www.math.uni-bremen.de/didaktik/ma/ralbers/Veranstaltungen/MaDenken1313/Material/Arbelos_Skript_Anh.pdf, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [10] C. Franski, *Flächeninhalt eines Dreiecks* http://www.mathematik-wissen.de/flaecheninhalte_dreieck.htm, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [11] D. Dürr, *Der Satz des Pythagoras-Kein Darwinscher Zufall* http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/Math_Grundlagen/Pytha.pdf, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [12] Prof. Dr. D. Grieser, *Skript zur Analysis 2, Sommersemester 2010* <http://users.minet.uni-jena.de/~novak/analysis2.pdf>, letztes Abrufdatum: 17.11.17.

- [13] A. Filler, *Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung Didaktik der Algebra und Zahlentheorie, Sommersemester 2012* http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/did_alg_zt_skript.pdf, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [14] M. Brokate, *Funktionalanalysis, Wintersemester 2001* http://www-m6.ma.tum.de/~brokate/fun_ws01.pdf, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [15] *Skript zur Analysis 2* Prof. Dr. A. Mielke, https://www.wias-berlin.de/people/john/LEHRE/ANALYSIS_2_LEHR/ana2_lehr_8_9.pdf, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [16] I. Izmetiev, *Geometrie, FU Berlin Sommersemester 2014* <http://homeweb.unifr.ch/Izmetiev/pub/Teaching/Geometrie14.pdf>, letztes Abrufdatum: 17.11.17.
- [17] W. Degen, *Strahlensatz*, <https://de.wikipedia.org/wiki/Strahlensatz>, letztes Abrufdatum: 17.11.17

11 Eigenständigkeitserklärung

„Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt und nur die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinne nach anderen Werken, gegebenenfalls auch elektronischen Medien, entnommen sind, sind von mir durch Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Entlehnungen aus dem Internet sind durch Angabe der Quelle und des Zugriffsdatums sowie dem Ausdruck der ersten Seite belegt; sie liegen zudem für den Zeitraum von 2 Jahren entweder auf einem elektronischen Speichermedium im PDF-Format oder in gedruckter Form vor.“

23.11.17, Heidelberg

Kira-Maria Rolli