

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

# RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

BACHELORARBEIT IM FACH MATHEMATIK

## KREISHOMÖOMORPHISMEN ASPEKTE EINES DYNAMISCHEN SYSTEMS

AUTOR:

Johannes Wenzel

geb. 24.03.1997 in Hamburg

BETREUER:

Juniorprof. Gabriele Benedetti

Sommersemester 2019



## ZUSAMMENFASSUNG

---

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Kreishomöomorphismen. Es wird die zentrale Eigenschaft dieser Abbildungen, die Rotationszahl, eingeführt und anhand dieser die vollständige Klassifizierung der Orbittypen vorgenommen: Es gibt für rationale und irrationale Rotationszahlen je drei Fälle. Außerdem wird mit dem Satz von Denjoy gezeigt, dass Anforderungen an Glattheit die auftretenden Orbittypen beeinflussen können. Im folgenden Abschnitt wird die Menge der Kreishomöomorphismen als topologisches Objekt betrachtet und die Äquivalenzklassen bezüglich der Konjugation und Approximationsmöglichkeiten untersucht. Darüber hinaus werden Kreishomöomorphismen als ergodisches System behandelt, der Satz von Weyl vorgestellt und anhand diesem das Gesetz von Benford für die Folge  $2^n$  nachgewiesen. Außerdem wird die Abhängigkeit der Rotationszahl der Abbildung  $x \mapsto x + a + \frac{\varepsilon}{2\pi} \cos x$  von den Parametern  $a, \varepsilon$  betrachtet und die Arnoldzungen definiert, numerisch berechnet und das Auftreten von Arnoldzungen bei einem Beispiel in der Natur untersucht.

## ABSTRACT

---

In this work we will provide a comprehensive overview of a several aspects of circle maps. Firstly, the rotation number is introduced, a central property of circle maps that will later be used to make a complete classification of orbit types. There are six types of orbit types: Three each for the cases irrational and rational rotation number. Additionally, we will show with Denjoy's theorem that sharper requirements for smoothness reduces the types of orbits in the irrational case. In the subsequent chapter, the space of circle maps will be studied as a topological object. We will have a look at equivalence classes with respect to approximated conjugation. After that, we will look at ergodic theory for circle maps. Weyl's theorem will be shown and used to prove that the sequence  $2^n$  obeys Benford's Law. In the last chapter we will explore the relation of rotation number and the parameters  $a$  and  $\varepsilon$  of the family of maps  $x \mapsto x + a + \frac{\varepsilon}{2\pi} \cos x$ . The phenomenon of mode locking can be observed for certain pairs of  $a$  and  $\varepsilon$  and will be studied.



## DANKSAGUNG

---

An dieser Stelle möchte ich meinem Betreuer Juniorprof. Gabriele Benedetti für seine umfassende Betreuung und Hilfestellung sowie für die zahlreichen E-mails und Treffen zu dieser Arbeit danken.



# INHALTSVERZEICHNIS

---

1	ALLGEMEINE KLASSIFIZIERUNG VON KREISHOMÖOMORPHISMEN	3
1.1	Einführung . . . . .	3
1.1.1	Äquivalente Definitionen des Einheitskreises . . . . .	3
1.2	Begriffsbildung . . . . .	4
1.3	Die Rotationszahl . . . . .	6
2	KLASSIFIZIERUNG DURCH DIE ROTATIONSZAHL	15
2.1	Klassifizierung von Orbittypen . . . . .	15
2.1.1	Rationale Rotationszahl . . . . .	15
2.1.2	Irrationale Rotationszahl . . . . .	18
2.1.3	Orbittypen . . . . .	22
2.2	Satz von Denjoy . . . . .	22
2.2.1	Das Denjoy Gegenbeispiel . . . . .	24
3	FAST KONJUGIERTE HOMÖOMORPHISMEN	27
3.1	Topologische Eigenschaften von $H^+(S^1)$ . . . . .	27
3.2	Approximation von Kreishomöomorphismen . . . . .	28
4	DER SATZ VON WEYL UND BENFORD'S LAW	31
4.1	Begriffsbildung . . . . .	31
4.2	Der Satz von Weyl . . . . .	31
4.3	Ergodizität und Orbittypen . . . . .	34
4.3.1	Eindeutige Ergodizität . . . . .	34
4.3.2	Rationale Rotationszahl . . . . .	35
4.3.3	Irrationale Rotationszahl . . . . .	36
4.4	Benford's Law . . . . .	37
4.4.1	Anwendung des Gesetzes von Benford . . . . .	37
5	DIE ROTATIONSZAHL ALS FUNKTION	41
5.1	Die Rotationszahl als Funktion . . . . .	41
5.2	Arnoldzungen . . . . .	42
5.2.1	Nullmengen für rationales $\mu$ . . . . .	42
5.3	Berechnung der Rotationszahl . . . . .	43
5.3.1	Berechnung mit direkter Approximation . . . . .	44
5.3.2	Eigenschaften der Arnoldzungen . . . . .	45
5.3.3	Auftreten von Arnoldzungen in der Natur . . . . .	46
5.4	Ausblick auf Chaostheorie . . . . .	46
A	ANHANG	49
A.1	Code von Abbildung 2.1 . . . . .	49
A.2	Code von Abbildung 5.1 . . . . .	49
A.3	Code von Abbildung 5.3 . . . . .	51
A.4	Code für die Verteilung der ersten Ziffer . . . . .	51
	LITERATUR	53

## EINLEITUNG

---

Diese Arbeit betrachtet eine bestimmte Klasse von Abbildungen: Kreishomöomorphismen und -diffeomorphismen. Diese Abbildungen werden im Kontext der Theorie der dynamischen Systeme, der Ergodizität, sowie Chaostheorie und Topologie betrachtet. Zu diesem Zweck findet auf den genannten Gebieten eine Begriffsbildung statt. Diese Arbeit bedient sich des Weiteren einer Mehrzahl von mathematischen Teilgebieten. Es werden Methoden der Analysis, der Wahrscheinlichkeitstheorie, der Topologie sowie der Numerik genutzt.

In dem ersten Kapitel werden die Kreishomöomorphismen nach [KH95] eingeführt und die Definition der Rotationszahl festgelegt. Darüber hinaus werden erste Begriffe der Theorie der dynamischen Systeme definiert und erste Eigenschaften betrachtet: Die Rotationszahl ist genau dann rational, wenn es periodische Punkte gibt.

Darauf folgend wird im zweiten Kapitel aufbauend zum ersten Kapitel eine Klassifizierung der Orbits gemacht. Dies geschieht nach [KH95]. Zu diesem Zweck wird der Satz von *Poincaré* eingeführt. Dieser besagt, dass transitive Kreishomöomorphismen mit irrationaler Rotationszahl konjugiert zu einer Rotation sind. Das Ergebnis der Klassifizierung ist so: Es gibt für einen Punkt  $x \in S^1$  sechs mögliche Orbits: Für den rationalen Fall sind dies der periodische Orbit und Orbits, welche asymptotisch zu periodischen Punkten sind, einmal mit gleichem Grenzwert für  $\pm\infty$  und einmal mit ungleichem Grenzwert. Im irrationalen Fall kann ein Orbit dicht in  $S^1$  liegen oder dicht in oder asymptotisch zu einer Cantormenge sein. Darüber hinaus wird betrachtet, wie sich Orbits bei Hinzunahme von Glattheitskriterien verhalten. Es zeigt sich in dem Satz von *Denjoy*, dass durch strengere Glattheit jeder Kreishomöomorphismus mit irrationaler Rotationszahl transitiv und somit konjugiert zu einer Rotation ist. Es werden außerdem die Folgerungen an die Glattheit durch das Denjoy Gegenbeispiel gerechtfertigt.

Im dritten Kapitel wird nach [AHK03] die Menge der Kreishomöomorphismen als topologisches Objekt betrachtet und gezeigt, dass die Diffeomorphismen dicht in der Menge der orientierungstreuen Kreishomöomorphismen liegen. Es stellt sich heraus, dass Möglichkeiten zur Approximation durch Diffeomorphismen selbst mit fester Rotationszahl erhalten bleiben. Diese Eigenschaft wird genutzt, um zu zeigen, dass die Menge der Homöomorphismen mit fester Rotationszahl der Abschluss der Konjugationsklasse eines bestimmten Elements ist.



Im darauf folgenden Kapitel findet ein Szenenwechsel statt: Es wird die Ergodentheorie eingeführt und der Frage nach eindeutig ergodischen Maßen auf Orbits nachgegangen. Ein erstes Resultat ist, dass die irrationale Rotation eindeutig ergodisch ist [Kle13]. Darüber hinaus werden ergodische Maße für Kreishomöomorphismen mit rationaler Rationszahl untersucht und gezeigt, dass im irrationalen Fall alle Kreishomöomorphismen eindeutig ergodisch sind. Des Weiteren wird der Satz von Weyl [BS02] und die Gleichverteilung eingeführt. Anhand dieses Satzes wird außerdem gezeigt, dass die Folge  $2^n$  dem Gesetz von Benford genügt [MM50]. Möglichkeiten, das Gesetz von Benford auf Datensätze anzuwenden, werden zusätzlich besprochen.

Bei dem letzten Kapitel wird eine Unterklasse der Kreisdiffeomorphismen betrachtet: Abbildungen der Form  $x \mapsto x + a + \varepsilon \cdot (2\pi)^{-1} \cos(2\pi x)$  mit  $a, \varepsilon \in [0, 1]$ . Im Zuge dessen werden die Arnoldzungen eingeführt und mögliche Wege für die Berechnung untersucht [Arn09]. Es werden außerdem über zwei numerischen Methoden Arnoldzungen approximiert. Zusätzlich wird der Zusammenhang zwischen der Größe der Arnoldzungen und dem Farey Tree [SJ05] aufgestellt. Abschließend wird beispielhaft das Auftreten von Arnoldzungen bei dem Atem- und Herzschlagrhythmus betrachtet [MHGL04].

## ALLGEMEINE KLASSIFIZIERUNG VON KREISHOMÖOMORPHISMEN

---

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für das Studium der Kreishomöomorphismen gelegt. Dies umfasst eine Begriffsbildung der Theorie der dynamischen Systeme sowie die Definition der Rotationszahl. Darüber hinaus werden noch erste Eigenschaften der Rotationszahl gezeigt, etwa, dass es unter einem orientierungstreuen Kreishomöomorphismus genau dann periodische Punkte gibt, wenn die Rotationszahl rational ist.

### 1.1 EINFÜHRUNG

Im folgenden Text geht es um eine bestimmte Klasse von Abbildungen: Um Bijektionen des Kreises, von welchen gefordert wird, dass sie mindestens homöomorph und außerdem orientierungstreu sind. Im späteren Verlauf wird zudem stetige Differenzierbarkeit der Abbildung und Umkehrabbildung gefordert.

Der folgende Abschnitt orientiert sich an [KH95].

#### 1.1.1 Äquivalente Definitionen des Einheitskreises

Es wird zunächst der Einheitskreis an sich betrachtet. Dieser kann wie folgt konstruiert werden. Es wird zuerst die reelle Zahlengerade  $\mathbb{R}$  betrachtet, bei welcher dann der ganzzahlige additive Teil jeder Zahl identifiziert wird. Man erhält die Menge

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{\pi(x) \mid x \in \mathbb{R}\} =: S^1,$$

mit  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $x \mapsto x \bmod 1$ . Diese Menge  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  ist nun homöomorph zu den äquivalenten Definitionen des Einheitskreises in der reellen Zahlenebene  $\mathbb{R}^2$

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

und den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$

$$S^1 = \{\exp(2\pi ix) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Ein solcher Homöomorphismus kann etwa so definiert werden: Die Abbildung

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}, \quad x \bmod 1 \mapsto \exp(2\pi ix)$$

ist offenbar ein Homöomorphismus. Mit der kanonischen Einbettung der komplexen Zahlen in die reelle Zahlenebene  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x + iy \mapsto (x, y)$  lässt sich dies ferner zu einem Homöomorphismus von  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$  verknüpfen.

Es werden jetzt erste Beispiele von Homöomorphismen auf dem Einheitskreis betrachtet. Ein intuitives Beispiel ist die Rotation.

**Beispiel 1.1** (Rotation). Sei  $c \in \mathbb{R}$  und die Abbildung

$$r_c : S^1 \rightarrow S^1$$

bezeichne die Rotation um  $c$ , so erhält man folgende Abbildungen:

1. Für den komplexen Einheitskreis  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  ist

$$r_c : S^1 \rightarrow S^1, e^{2\pi i x} \mapsto e^{2\pi i(x+c)},$$

2. analog für den Einheitskreis als Teilmenge der reellen Zahlenebene

$$\begin{aligned} r_c : S^1 &\rightarrow S^1, \\ (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) &\mapsto (\cos(2\pi(x+c)), \sin(2\pi(x+c))). \end{aligned}$$

3. Für  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  gilt mit der Identifizierung der ganzzahligen additiven Teile

$$r_c : S^1 \rightarrow S^1, x \mapsto x + c \pmod{1}.$$

Bei dem Beispiel mit der Abbildung  $r_c$  ist es klar, um welchen Wert jeder Punkt des Einheitskreises  $S^1$  rotiert wird, nämlich um  $c$ . Im Folgenden wird nun versucht, eine allgemeine Möglichkeit zu finden, um die „durchschnittliche“ Rotation von jedem Punkt unter einem Kreishomöomorphismus zu charakterisieren. Zuerst werden jedoch noch weitere Definitionen der Theorie der dynamischen Systeme benötigt.

## 1.2 BEGRIFFSBILDUNG

**Definition 1.2** (Dynamisches System). Sei  $X$  eine nichtleere, kompakte und metrisierbare Menge und  $f : X \rightarrow X$  eine homöomorphe Abbildung. Dann bezeichnet das Tupel  $(X, f)$  das dynamische System von  $X$  und  $f$ .

Im Folgenden sei das Tupel  $(X, f)$  ein dynamisches System.

**Definition 1.3** (Invariante Menge). Sei  $A \subseteq X$  eine Teilmenge. Dann heißt  $A$  eine  $f$ -invariante Teilmenge von  $X$ , wenn  $f^{-1}(A) = A$  gilt.

**Bemerkung.** Ist  $f$  eine bijektive Abbildung, dann gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist } f\text{-invariant} &\Leftrightarrow A \text{ ist } f^{-1}\text{-invariant} \\ &\Leftrightarrow f(A) \subseteq A \text{ und } f^{-1}(A) \subseteq A \end{aligned}$$

**Definition 1.4** (Topologische Konjugation). *Zwei stetige Abbildungen  $f : X \rightarrow X$  und  $g : Y \rightarrow Y$  auf zwei topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  heißen topologisch konjugiert, wenn es einen Homöomorphismus  $h : X \rightarrow Y$  gibt, sodass*

$$f = h \circ g \circ h^{-1}$$

*gilt.*

**Definition 1.5** (Semikonjugation). *Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine Abbildung  $g : Y \rightarrow Y$  heißt ein topologischer Faktor einer Abbildung  $f : X \rightarrow X$ , wenn eine surjektive, stetige Abbildung  $h : X \rightarrow Y$  existiert, sodass  $h \circ f = g \circ h$  gilt. Die Abbildung  $h$  heißt dann eine Semikonjugation.*

**Definition 1.6** (Orbit). *Sei  $x \in X$ . Dann heißt*

$$\mathcal{O} := \mathcal{O}_x := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

*der Orbit von  $f$  im Punkt  $x$ . Die Einschränkung  $\{f^{\pm n}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  wird darüber hinaus als positiver bzw. negativer Semiorbit bezeichnet.*

Es gilt offenbar für den Orbit  $\mathcal{O}_x$  von  $x \in X$  und alle  $y \in \mathcal{O}_x$  die Folgerung  $\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_y$ .

**Definition 1.7** (Fixpunkt und periodischer Punkt). *Ein Fixpunkt der homöomorphen Abbildung  $f$  ist ein Punkt  $x \in X$ , sodass  $f(x) = x$  gilt. Ein Punkt  $x \in X$  wird als periodischer Punkt bezeichnet, wenn  $f^q(x) = x$  für ein  $q \in \mathbb{N}$  gilt. Das kleinste  $q$ , sodass  $x$  periodisch ist, wird als die Periode von  $x$  bezüglich  $f$  bezeichnet. Die Menge*

$$\text{Per}(f) = \{x \in S^1 \mid x \text{ ist periodisch}\}$$

*bezeichnet die Menge der periodischen Punkte von  $f$ .*

Im Rahmen der Betrachtung von Grenzwerten von Abbildung ist es sinnvoll, die Definition des Orbits und des  $\omega(x)$ - und  $\alpha(x)$ -Grenzwerts, sowie des homo- und heteroklinischen Orbits einzuführen. Diese Definitionen wurden unter anderem bei [KH95] festgelegt.

**Definition 1.8** ( $\omega(x)$ - und  $\alpha(x)$ -Grenzwert). *Die Menge alle Häufungspunkte der Folge  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$  heißt der  $\omega(x, f) := \omega(x)$ -Grenzwert des Punktes  $x$ . Der  $\alpha(x)$ -Grenzwert ist definiert als  $\alpha(x) := \omega(x, f^{-1})$ , also als die Häufungspunkte von  $(f^{-n}(x))_{n \in \mathbb{N}_0}$ .*

**Bemerkung.** *Die Mengen des  $\omega(x)$ - und  $\alpha(x)$ -Grenzwertes sowie ein Orbit  $\mathcal{O}$  sind  $f$ -invariant.*

**Definition 1.9** (Homo- und heteroklinischer Orbit). *Der Orbit  $\mathcal{O}$  von  $f$  heißt*

1. *homoklinisch zu einer invarianten Menge  $S \subseteq X \setminus \mathcal{O}$ , wenn  $\alpha(x) = \omega(x) = S$  für alle Punkte  $x$  im Orbit  $\mathcal{O}$  gilt.*

2. heteroklinisch zu zwei invarianten Mengen  $S_1$  und  $S_2$ , wenn die Inklusion  $S_1, S_2 \subseteq X \setminus \mathcal{O}$  und zudem  $\alpha(x) = S_1$  sowie  $\omega(x) = S_2$  gilt.

**Definition 1.10** (Topologisch transitiv). Ein dynamisches System  $(X, f)$  heißt (topologisch) transitiv, wenn es einen Punkt  $x \in X$  gibt, sodass der Orbit  $\mathcal{O}_x$  dicht in  $X$  liegt.

**Definition 1.11** (Minimal). Ein dynamisches System  $(X, f)$  heißt minimal, wenn für alle  $x \in X$  der Orbit  $\mathcal{O}_x$  von  $x$  dicht in  $X$  liegt. Äquivalent dazu ist, dass es keine abgeschlossene, echte Teilmengen gibt, die  $f$ -invariant sind.

**Definition 1.12** (Cantormenge). Sei  $X$  eine Menge. Die Menge  $X$  wird als Cantormenge bezeichnet, wenn  $X$  perfekt, also abgeschlossen ist, aber keine isolierten Punkte hat, und  $X$  total unzusammenhängend ist.

Es können nun die eingeführten Definitionen auf ein erstes Beispiel angewendet werden. Es wird die eingeführte Rotation  $r_\alpha$  betrachtet.

**Satz 1.13.** Ist  $r_\alpha$  eine irrationale Rotation mit  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , dann liegt der Orbit von  $r_\alpha$  in jedem Punkt  $x \in S^1$  dicht in  $S^1$ . Die Abbildung  $r_\alpha$  ist somit minimal.

*Beweis.* Sei  $A \subseteq S^1$  der Abschluss eines Orbits. Angenommen, der Orbit ist nicht dicht, dann gibt es in dem Komplement  $S^1 \setminus A$  eine nichtleere, offene Menge, welche aus disjunkten Intervallen besteht. Sei  $I$  eines der längsten Intervalle in  $S^1 \setminus A$ . Da die Rotation die Länge der Intervalle erhält, können die Iterationen  $r_\alpha^n(I)$  nicht überlappen, sonst würde ein neues, längeres Intervall entstehen, was im Widerspruch zu Definition von  $I$  steht. Außerdem kann kein Intervall auf sich selbst abgebildet werden, da sonst die Intervallendpunkte periodische Punkte wären und dies im Widerspruch zu der irrationalen Rotation steht. Folglich müssen alle Intervalle  $(r_\alpha^n(I))_{n \in \mathbb{Z}}$  von gleicher Länge und paarweise disjunkt sein, was aber mit der endlichen Länge des Kreises zu einem Widerspruch führt. Somit ist die Annahme falsch und der Orbit liegt dicht in  $S^1$ .  $\square$

### 1.3 DIE ROTATIONSZAHL

Es soll nun eine Eigenschaft gefunden werden, die ungefähr der „durchschnittlichen“ Rotation eines Kreishomöomorphismus entspricht. Um die durchschnittliche Rotation sinnvoll einführen zu können, muss gewährleistet werden, dass sich die Abbildung stets in die gleich Richtung dreht. Im Folgenden wird aus diesem Grund noch die Definition der Orientierungstreue eingeführt. Zu diesem Zweck und für die Definition der Rotationszahl ist es notwendig, die Hochhebung eines Homöomorphismus einzuführen. Wie in Abschnitt 1.1.1 beschrieben, gibt es eine natürliche Projektion der reellen Zahlen auf den Einheitskreis  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad x \mapsto x \pmod{1}.$$

Dies gibt uns eine Hochhebung eines Homöomorphismus  $f : S^1 \rightarrow S^1$  zu einem Homöomorphismus  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $f \circ \pi = \pi \circ F$  gilt und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & S^1 \\ \downarrow F & & \downarrow f \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & S^1 \end{array}$$

kommutiert. Die Abbildung  $F$  ist dann bis auf eine ganzzahlige Konstante eindeutig bestimmt.

Ist die Hochhebung eines Kreishomöomorphismus monoton steigend, dann wird dieser als orientierungstreu bezeichnet. In dem restlichen Kapitel sei  $f$  stets ein orientierungstreuer Homöomorphismus  $f : S^1 \rightarrow S^1$  und

$$H^+(S^1) := \{f : S^1 \rightarrow S^1 \mid f \text{ homöomorph \& orientierungstreu}\}$$

die Menge aller solcher Homöomorphismen. Diese Menge bildet mit der Verknüpfung  $\circ$  eine Gruppe.

Auf der Menge  $H^+(S^1)$  kann wie folgt eine Metrik  $d$  definiert werden: Sei  $d_{S^1}$  eine beliebige Metrik auf  $S^1$ . Für  $f, g \in H^+(S^1)$  wird

$$d(f, g) := \max_{x \in S^1} d_{S^1}(f(x), g(x))$$

definiert.

Die Hochhebung eines orientierungstreuen Kreishomöomorphismus hat folgende Eigenschaften.

**Satz 1.14.** *Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Hochhebung von  $f$ . Dann gelten folgende Aussagen:*

1. Die Abbildung  $F$  ist monoton wachsend.
2. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $F(x+1) = F(x) + 1$ .
3. Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $|x - y| \leq 1$ . Dann gilt  $|F(x) - F(y)| \leq 1$ .

*Beweis.* 1. Dies folgt aus der Definition eines orientierungstreuen Kreishomöomorphismus.

2. Die Hochhebung  $F$  von  $f$  ist monoton steigend und wegen  $f(x+n) = f(x)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , gibt es ein  $a \in \mathbb{N}$ , sodass  $F(x+1) = F(x) + a$  gilt. Angenommen, es gilt  $a > 1$ , dann existiert ein  $x \in (0, 1)$ , sodass  $F(x) = F(0) + 1$  gelte, was ein Widerspruch ist. Somit gilt  $a = 1$  und  $F(x+1) = F(x) + 1$ .

3. Sei ohne Einschränkung der Allgemeinheit  $x \leq y$ . Gilt die Ungleichung  $|x - y| \leq 1$ , dann gibt es ein  $\alpha \in [0, 1]$ , sodass  $y = x + \alpha \leq x + 1$  gilt. Es ist dann mit der Monotonie

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= |F(x) - F(x + \alpha)| \\ &\leq |F(x) - F(x + 1)| = |F(x) - F(x) - 1| \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Die Einführung der Rotationszahl erfolgt nun nach [BS02] und [KH95]. Mit der eingeführten Hochhebung ist es somit möglich, die Rotationszahl für beliebige orientierungstreue Kreishomöomorphismen zu definieren.

**Definition 1.15** (Rotationszahl). Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Hochhebung von  $f$ . Sei

$$\tau(F) := \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n},$$

dann bezeichnet  $\tau(f) := \pi(\tau(F))$  die Rotationszahl von  $f$ .

Die eingeführten Werte  $\tau(f)$  und  $\tau(F)$  haben folgende Eigenschaften [BS02]:

**Satz 1.16.** Sei  $F$  wie in der Definition der Rotationszahl. Dann gilt:

1.  $\tau(F)$  existiert und ist unabhängig von  $x$ ,
2. und bis auf eine ganzzahlige Konstante wohldefiniert.
3. Die Rotationszahl ist invariant unter topologischer Konjugation und Semikonjugation.
4. Hat  $f$  einen periodischen Punkt, dann ist die Rotationszahl von  $f$  rational.
5. Für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $q \in \mathbb{N}$  gilt die Darstellung

$$\tau(F) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{F^q(F^{kq}(x)) - F^{kq}(x)}{q} \right).$$

6. Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $\tau(f^k) = k \cdot \tau(f)$ .

*Beweis.* 1. Angenommen, es gibt ein  $x \in [0, 1)$  und  $p, q \in \mathbb{N}$ , so dass  $F^q(x) = x + p$  gilt. Diese Annahme ist äquivalent dazu, dass  $\pi(x) \in S^1$  ein periodischer Punkt von  $f$  mit Periode  $q$  ist. Für  $n \in \mathbb{N}$  setze  $n := kq + l$ , sodass  $0 \leq l < q$  gilt. Dann ist  $F^n(x) = F^l(F^{kq}(x)) = F^l(x + kp) = F^l(x) + kp$  und wegen der Beschränktheit von  $|F^l(x) - x|$  für  $l \in \{0, \dots, q-1\}$  gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \frac{p}{q}.$$

Somit existiert die Rotationszahl im Fall einer periodischen Punktes und ist rational, das heißt, Aussage 4 ist bereits gezeigt. Es wird nun angenommen, dass  $f$  keinen periodischen Punkt hat, dass also für alle  $x \in \mathbb{R}$  und alle  $p, q \in \mathbb{N}$  existieren, sodass  $F^q(x) \neq x + q$  gilt. Wegen der Stetigkeit von  $F$  gilt dann für feste  $p, q \in \mathbb{N}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$F^q(x) > x + p \quad \text{oder} \quad F^q(x) < x + p.$$

Dann gibt es für  $n \in \mathbb{N}$  ein  $p_n \in \mathbb{N}$ , sodass  $p_n - 1 < F^n(x) - x < p_n$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Es ist dann für alle  $m \in \mathbb{N}$  mit der Teleskopsumme

$$m(p_n - 1) < F^{mn}(x) - x = \sum_{k=0}^{m-1} F^n(F^{kn}(x)) - F^{kn}(x) < mp_n,$$

woraus dann

$$\frac{p_n}{n} - \frac{1}{n} < \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} < \frac{p_n}{n}$$

folgt. Da  $n$  beliebig gewählt war, kann man für  $n$  also  $m$  einsetzen und erhält somit

$$\frac{p_m}{m} - \frac{1}{m} < \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} < \frac{p_m}{m}.$$

Es gilt also  $|p_m/m - p_n/n| < |1/m + 1/n|$ , das heißt also, dass  $(p_n/n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge ist und somit  $n^{-1}(F^n(x) - x)$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Die Rotationszahl existiert also.

Für die Unabhängigkeit von  $x$  sei  $F$  die Hochhebung von  $f$ . Es ist  $F^n$  die Hochhebung von  $f^n$ , denn:

$$f^n \circ \pi = f^{n-1} \circ f \circ \pi = f^{n-1} \circ \pi \circ F = \dots = \pi \circ F^n$$

Es gilt also nach Satz 1.14 für alle  $y \in [0, 1)$  die Abschätzung  $|F^n(x) - F^n(y)| \leq 1$ . Somit folgt

$$|(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| \leq |F^n(x) - F^n(y)| + |x - y| \leq 2,$$

und daraus dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(y) - y}{n}.$$

Es gilt außerdem offenbar  $F^n(y + k) = F^n(y) + k$ , sodass die Behauptung für beliebiges  $y \in \mathbb{R}$  folgt.

2. Die Hochhebungen von  $f$  unterscheiden sich nur um eine ganze Zahl. Seien also  $F$  und  $G := F + k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , Hochhebungen von  $f$ . Dann ist  $\tau(G) = \tau(F) + k$ , also  $\tau(f) = \pi(\tau(F)) = \pi(\tau(G))$ .



3. Sei für die Semikonjugation  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  Homöomorphismen und  $h : S^1 \rightarrow S^1$  eine stetige Abbildung, sodass  $f \circ h = h \circ g$  gilt. Es können nun Hochhebungen so gewählt werden, dass  $F \circ H = H \circ G$  gilt. Es ist

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^n(H(x)) - H(x)}{n} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{H(G^n(x)) - H(x)}{n} \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{H(G^n(x)) - H(x) + G^n(x) - G^n(x) + x - x}{n} \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{H(G^n(x)) - G^n(x)}{n} + \frac{G^n(x) - x}{n} - \frac{H(x) - x}{n} \\ &= \tau(g),\end{aligned}$$

da der Zähler des ersten und letzten Bruches beschränkt ist. Die Behauptung ist somit für die Semikonjugation gezeigt. Aus dem Wissen, dass die Behauptung im Fall der Semikonjugation erfüllt ist, folgt auch der Fall der Konjugation, denn: Für  $f \circ h = h \circ g$  ist die Behauptung gezeigt. Da  $h$  in diesem Fall homöomorph ist, gilt zudem  $f = h \circ g \circ h^{-1}$ .

5. Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F^q(F^{kq}(x)) - F^{kq}(x)}{q} \right] \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{F^q(x) - x + F^q(F^q(x)) - F^q(x) + \dots}{q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{F^q(F^{(n-1)q}(x)) - F^{(n-1)q}(x)}{q} \right] \\ &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{F^{nq}(x) - x}{q} \right] = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^{nq}(x) - x}{nq} = \tau(f).\end{aligned}$$

6. Es ist

$$\begin{aligned}\tau(f^k) &= \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^{kn}(0)}{n} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^{kn}(0) \cdot k}{n \cdot k} = k \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^{kn}(0)}{nk} \\ &= k \cdot \tau(f).\end{aligned}$$

□

Auf der Menge  $H^+(S^1)$  kann mit der Metrik  $d$  eine Topologie induziert werden. Analog kann so auf der Menge der Hochhebungen mit der Metrik  $D(F, G) := \max_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - G(x)|$  verfahren werden. Die so erzeugte Topologie wird als uniforme Topologie bezeichnet.

Es zeigt sich folgendes Resultat für die Rotationszahl als Funktion auf  $H^+(S^1)$ .

**Satz 1.17.** *Die Rotationszahl als Abbildung*

$$\tau : H^+(S^1) \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad f \mapsto \tau(f)$$

ist stetig.

*Beweis.* Setze  $\tau(f) := \tau$  und seien  $\frac{p'}{q'}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , sodass  $\frac{p'}{q'} < \tau < \frac{p}{q}$  gilt. Sei  $F$  eine Hochhebung von  $f$ , sodass

$$F^q(x) - x - p < 0$$

für bestimmte  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Es gilt dann  $F^q(x) < x + p$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ , da es sonst  $x \in \mathbb{R}$  mit  $F^q(x) = x + p$  gibt. Nach Satz 1.16 Aussage 5 würde dann  $\tau = p/q$  folgen, was ein Widerspruch ist. Da die Funktion  $F^q - Id$  periodisch und stetig ist, nimmt sie ihr Maximum an. Es existiert also ein  $\delta > 0$ , sodass  $F^q(x) < x + p - \delta$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Daraus folgt, dass jede kleine Störung  $\bar{F}$  von  $F$  in der uniformen Topologie der Hochhebungen für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$\bar{F}^q(x) < x + p$$

genügt. Somit folgt für den zugehörigen Kreishomöomorphismus  $\bar{f}$   $\tau(\bar{f}) < \frac{p}{q}$ . Auf analoge Weise folgt  $\frac{p'}{q'} < \tau(\bar{f})$  und somit folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung.** *Man kann zeigen, dass die Abbildung*

$$\tau : (H^+(S^1), \circ) \rightarrow (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$$

kein Gruppenhomomorphismus ist. Es gibt Abbildungen  $f, g \in H^+(S^1)$ , sodass  $\tau(f) = \tau(g) = 0$ , aber nicht  $\tau(g \circ f) = 0$  gilt. Sei 0 der einzige Fixpunkt von  $f$  und  $\frac{1}{2}$  der einzige Fixpunkt von  $g$ . Es können dann Hochhebungen  $F, G$  gewählt werden, sodass  $G(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  und  $F(0) = 0$  gilt. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$x < (G \circ F)(x) - x < x + 1$$

und folglich  $0 < \tau(g \circ f) < 1$ .

**Bemerkung.** *Wird im Folgenden von einer rationalen oder irrationalen Rotationszahl gesprochen, so ist damit gemeint, dass die Rotationszahl der Hochhebung rational oder irrational ist. Es wird dazu die Notation*

1.  $\tau(f) = p/q \Leftrightarrow \tau(F) = p/q$  sowie
2.  $\tau(f) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Leftrightarrow \tau(F) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  und
3.  $\tau(f) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \tau(F) \in \mathbb{Q}$

eingeführt.

Betrachtet man die Rotation  $r_c$  mit  $c \in \mathbb{Q}$ , so hat die Abbildung offenbar eine rationale Rotationszahl und mindestens einen periodischen Punkt. Dies gilt auch für allgemeinere Abbildungen. In Satz 1.16 wurde bereits gezeigt, dass aus der Existenz eines periodischen Orbits eine rationale Rotationszahl folgt. Es wird nun die Rückrichtung bewiesen.

**Satz 1.18.** *Der Kreishomöomorphismus  $f$  hat genau dann einen periodischen Punkt, wenn die Rotationszahl  $\tau(f)$  rational ist.*

*Beweis.* Die Hinrichtung wurde bereits in 1.16 gezeigt. Sei  $\tau(f) = \frac{p}{q}$ . Es gilt nach Satz 1.16 Aussage 6  $\tau(f^k) = k\tau(f)$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Das heißt, es gilt  $\tau(f^q) = q\tau(f) = 0 \pmod{1}$ . Es genügt also zu zeigen, dass  $f$  einen Fixpunkt hat, wenn  $\tau(f) = 0$  gilt.

Es wird nun angenommen, dass  $f$  keinen Fixpunkt hat. Sei  $F$  eine Hochhebung von  $f$ , sodass  $F(0) \in [0, 1)$  gilt. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$   $F(x) - x \notin \mathbb{Z}$ , da andernfalls  $\pi(x)$  ein Fixpunkt sein müsste. Mit dem Zwischenwertsatz folgt nun für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) - x \in (0, 1).$$

Als stetige Abbildung nimmt  $F - Id$  außerdem auf  $[0, 1]$  sein Minimum und Maximum an und somit gibt es ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $x \in [0, 1]$   $F(x) - x \in [1 - \delta, \delta]$  gilt. Wegen der Periodizität von  $F - Id$  gilt dies auf ganz  $\mathbb{R}$ . Es kann nun ein  $x = F^i(0)$  gewählt werden. Dann gilt  $\delta \leq F(F^i(0)) - F^i(0) \leq 1 - \delta$  für  $i = 0, \dots, n-1$ . Dann gilt folglich auch

$$\sum_{i=0}^{n-1} \delta \leq \sum_{i=0}^{n-1} F(F^i(0)) - F^i(0) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \delta) \quad (1.1)$$

$$\Leftrightarrow n\delta \leq F^n(0) \leq n(1 - \delta) \quad (1.2)$$

$$\Leftrightarrow \delta \leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta. \quad (1.3)$$

Für  $n \rightarrow \infty$  erhält man nun  $\tau(f) \neq 0$ , was ein Widerspruch zur Annahme ist. Somit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Es gilt außerdem weiter analog zum Fall der Rotation, dass alle periodischen Punkten die gleiche Periode haben.

**Satz 1.19.** *Sei die Rotationszahl von  $f$  rational. Dann haben alle periodischen Orbits die gleiche Periode.*

*Beweis.* Es sei  $\tau(f) = p/q$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$  und  $q \neq 0$  relativ prim. Es ist nun zu zeigen, dass es für jeden periodischen Punkt  $\pi(x)$  eine Hochhebung  $F$  von  $f$  existiert, sodass  $F^q(x) = x + p$  ist. Falls  $\pi(x)$  periodisch ist und  $F$  eine Hochhebung, dann gilt  $F^r(x) = x + s$  für bestimmte  $r, s \in \mathbb{Z}$  mit  $s \neq 0$  und

$$k + \frac{p}{q} = \tau(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nr}(x) - x}{nr} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns}{nr} = \frac{s}{r}.$$

Eine Hochhebung  $F$  kann derart gewählt werden, sodass  $k = 0$  gilt und mit einem  $m \in \mathbb{N}$   $s = mp$  und  $r = mq$ . Falls  $F^q(x) - p > x$  gilt, dann folgt der Monotonie von  $F$

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x) - p) - p \geq F^q(x) - p > x$$

und so induktiv  $F^r(x) - s = F^{mq}(x) - mp > x$  im Widerspruch zur Annahme. Es folgt somit  $F^{mq}(x) - mp \leq x$  und analog wie behauptet  $F^{mq}(x) - mp \geq x$ .  $\square$



## KLASSIFIZIERUNG DURCH DIE ROTATIONSZAHL

---

Es wird in diesem Kapitel eine Klassifizierung der Orbits von orientierungstreuen Kreishomöomorphismen vorgenommen. Es stellt sich heraus, dass ein Punkt  $x \in S^1$  sechs verschiedene Typen von Orbits haben kann. Für dieses Ergebnis wird der Satz von *Poincaré* eingeführt, welcher besagt, dass ein orientierungstreuer Kreishomöomorphismus mit irrationaler Rotationszahl zu einer Rotation konjugiert ist, wenn er transitiv ist. Darüber hinaus wird diese Bedingung noch im Satz von *Denjoy* in Zusammenhang zu Glattheit betrachtet. Es zeigt sich, dass durch zusätzliche Glattheit der Fall einer nicht-transitiven Abbildung wegfällt.

In dem folgenden Kapitel sei  $f$  stets eine homöomorphe und orientierungstreue Selbstabbildung auf dem Einheitskreis  $S^1$ .

### 2.1 KLASSIFIZIERUNG VON ORBITTYPEN

Es wird mit der Klassifizierung der Orbittypen begonnen. Zu diesem Zweck bietet es sich an, zuerst eine Unterscheidung für die Fälle der rationalen und irrationalen Rotationszahl zu treffen. Dies passiert nach [KH95]. Es wird zuerst der rationale Fall betrachtet.

#### 2.1.1 Rationale Rotationszahl

**Satz 2.1.** Sei  $\tau(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$ , wobei  $p$  und  $q$  relativ prim seien. Weiter sei  $\bar{x} \in S^1$ , sodass der Orbit von  $\bar{x}$  periodisch ist, also  $f^q(\bar{x}) = \bar{x}$  gilt. Dann gilt, dass die Anordnung der Punkte

$$\left(\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x}), \dots, f^{q-1}(\bar{x})\right) \quad \text{und} \quad \left(0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \dots, \frac{(q-1)p}{q}\right)$$

gleich ist.

*Beweis.* Sei  $F$  eine Hochhebung von  $f$ , sodass für  $x \in \pi^{-1}(\{\bar{x}\})$   $F^q(x) = x + p$  gilt, vgl. Satz 1.19. Anhand der Menge

$$A := \pi^{-1}\{\bar{x}, f(\bar{x}), \dots, f^{q-1}(\bar{x})\}$$

lässt sich das Intervall  $[x, x + p]$  in  $p \cdot q$  Intervalle partitionieren. Andererseits lässt sich das Intervall  $[x, x + p]$  in die Intervalle  $[x, F(x)]$ , ...,  $[F^{q-1}(x), F^q(x)]$  unterteilen. Diese haben ein paarweise disjunktes Inneres. Die Hochhebung  $F$  schränkt sich auf eine Bijektion zwischen anliegenden Intervallen ein und es gilt für  $n \in \{1, \dots, q-1\}$

$$F([F^{n-1}(x), F^n(x)]) = [F^n(x), F^{n+1}(x)].$$

Dann enthält jedes Intervall  $p + 1$  Punkte aus  $A$ . Seien nun  $k, r \in \mathbb{Z}$ , sodass der rechte Nachbar von  $x$  in  $A$  gerade  $x_1 = F^k(x) - r$  ist. Sei  $\bar{F} := F^k - r$ , dann ist  $\bar{F}$  steigend auf  $\mathbb{R}$  und erhält wieder die Anordnung von  $A$ . Außerdem ist, da  $x_1 = \bar{F}(x)$  der nächste rechte Nachbar von  $x$  in  $A$  ist und da  $[x, F(x)]$  in  $p$  Unterintervalle geteilt wird,  $\bar{F}^p(x) = F(x)$ . Es folgt also  $f^{kp}(\bar{x}) = f(\bar{x})$ . Daher ist  $k$  die eindeutige Zahl zwischen 0 und  $q - 1$ , sodass  $kp \equiv 1 \pmod{q}$  gilt. Der periodische Orbit ist somit gleich angeordnet wie

$$\left(\bar{x}, f^k(\bar{x}), f^{2k}(\bar{x}), \dots, f^{(q-1)k}(\bar{x})\right).$$

Sei  $f = r_{p/q}$  die Rotation um  $p/q$ . Somit ist dann  $\pi(\{0, \frac{p}{q}, \dots, \frac{p(q-1)}{q}\})$  ein periodischer Orbit und gleich geordnet wie  $(0, \frac{kp}{q}, \dots, \frac{(q-1)kp}{q})$  mit  $kp \equiv 1 \pmod{q}$  wie oben.  $\square$

Es zeigt sich also, dass sich die periodischen Orbits im Fall einer rationalen Rotationszahl wie eine Rotation mit gleicher Rotationszahl verhalten. Der folgende Satz ist zentral für die spätere Klassifizierung der rationalen Orbittypen.

**Satz 2.2.** *Sei  $\tau(f) = p/q \in \mathbb{Q}$ . Es gibt dann zwei Fälle von nicht-periodischen Orbits von  $f$ :*

1. *Hat  $f$  genau einen periodischen Orbit, dann ist jeder nicht-periodische Punkt heteroklinisch unter  $f^q$  zu zwei Punkten aus dem periodischen Orbit. Diese Punkte sind verschieden, wenn die Periode größer 1 ist.*
2. *Hat  $f$  mehr als einen periodischen Orbit, dann ist jeder nicht-periodische Punkt heteroklinisch unter  $f^q$  zu zwei Punkten auf verschiedenen periodischen Orbits.*

**Lemma 2.3.** *Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall und  $f : I \rightarrow I$  eine nicht-fallende, stetige Abbildung. Dann sind alle  $x \in I$  asymptotisch zu einem Fixpunkt von  $f$ . Ist  $f$  streng monoton steigend und somit invertierbar, dann sind alle  $x \in I$  entweder Fixpunkte oder positiv und negativ asymptotisch zu benachbarten Fixpunkten.*

*Beweis.* Nach dem Zwischenwertsatz ist die Menge der Fixpunkte von  $f$  nichtleer und wegen der Stetigkeit von  $f$  abgeschlossen. Die Menge der Fixpunkte von  $f$  sei mit  $\text{Fix}(f)$  bezeichnet. Im Fall von  $\text{Fix}(f) = I$  ist die Aussage klar. Es gelte nun  $\text{Fix}(I) \neq I$ , das heißt  $I \setminus \text{Fix}(I) \neq \emptyset$ . Sei  $x \in I \setminus \text{Fix}(f)$  und sei  $(a, b)$  das maximale Intervall in  $I \setminus \text{Fix}(I)$ , welches  $x$  enthält. Da  $f$  nicht-fallend ist, gilt  $f((a, b)) \subseteq [a, b]$  und nach dem Zwischenwertsatz wechselt  $f - \text{Id}$  auf  $(a, b)$  nicht sein Vorzeichen. Sei nun  $f(y) > y$  für ein  $y \in (a, b)$ . Dann definiert  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n := f^n(x)$  eine nicht-fallende und durch  $b$  beschränkte Folge, welche gegen ein  $x_0 \in (a, b]$  konvergiert. Es ist aber

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_0,$$

das heißt also  $x_0 \in \text{Fix}(f)$  und somit  $b = x_0$ . Für  $f(y) < y$  analog, jedoch in dem Fall mit Grenzwert  $a$ .

Falls  $f$  streng monoton steigend ist, ist das Vorzeichen der Abbildung  $f^{-1} - Id$  auf dem Intervall  $(a, b)$  das eben anderen von  $f - Id$ . Das heißt also, dass jedes  $x \in (a, b)$  positiv und negativ asymptotisch zu dem gegenüberliegenden Ende von  $[a, b]$  ist.  $\square$

Es folgt nun der Beweis der eigentlichen Aussage von 2.2.

*Beweis von 2.2.* Der Homöomorphismus  $f^q$  kann offenbar mit einem Homöomorphismus eines Intervalls identifiziert werden, indem man den Einheitskreis an einem fixierten Punkt öffnet oder die Hochhebung  $F^q - p$  auf ein Intervall  $[z, z + 1]$  einschränkt. Dann folgt der Satz bis auf einen Teil der zweiten Aussage aus 2.3. Sei für diesen Teil der Aussage  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Gibt es ein  $I$ , sodass  $a$  und  $b$  anliegende Nullstellen von  $F^q - Id - p$  sind und  $a, b$  auf den gleichen Orbit abgebildet werden, dann hat  $f$  nur einen periodischen Orbit, denn: Sollte  $\pi(a) = x \in S^1$  und  $\pi(b) = f^k(x) \in S^1$  gelten, dann überdeckt  $\bigcup_{n=0}^{q-1} f^{nk} \pi(a, b)$  das Komplement von  $\{f^n(x)\}_{n=0}^{q-1}$  in  $S^1$  und enthält keinen periodischen Punkt. Wegen der Invarianz von  $f^k$  gilt dies ebenfalls für  $f^{nk}(\pi(a, b))$ .  $\square$

Es wird ein Beispiel betrachtet, bei dem mehr als ein periodischer Orbit existiert:

**Beispiel 2.4.** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1, f(x) := x + 1/2 + \frac{\sin(2\pi x)}{10\pi} \pmod 1$ . Es gilt  $f^2(0) = 0$  und somit für eine geeignete Hochhebung  $F$  die Gleichung  $F^2(0) = 2$ . Es folgt

$$\tau(f) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^n(0) - 0}{n} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^{2n}(0)}{2n} = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{2n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Durch  $\mathcal{O}_0 = \{\overline{0, 1/2}\}$  ist ein periodischer Orbit gegeben, denn:

$$f^2(0) = f(1/2) = 0$$

Es gibt außerdem einen weiteren periodischen Orbit. Da jeder andere periodische Orbit von gleicher Periode sein muss, kann dieser durch Lösen von  $f^2(x) = x$  gefunden werden. Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi x)}{10\pi} + \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi(x + \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi x)}{10\pi}))}{10\pi} &= x \pmod 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin(2\pi x)}{10\pi} + \frac{\sin(2\pi(x + \frac{1}{2} + \frac{\sin(2\pi x)}{10\pi}))}{10\pi} &= 0 \pmod 1 \end{aligned}$$

und kann numerisch mit  $x \approx 0.7658$  oder  $x \approx 0.2341$  gelöst werden. Es gibt also mehr als einen periodischen Orbit. In Anwendung von Satz 2.2 ist jeder nicht-periodische Punkt heteroklinisch zu zwei Punkten auf verschiedenen Orbits. Der Punkt  $\overline{3/10} \in S^1$  ist kein periodischer Punkt. Wie in Abbildung 2.1 für die ersten 800 Elemente zu sehen ist, verhält sich der Orbit  $\mathcal{O}_{3/10}$  heteroklinisch zu den beiden periodischen Orbits.



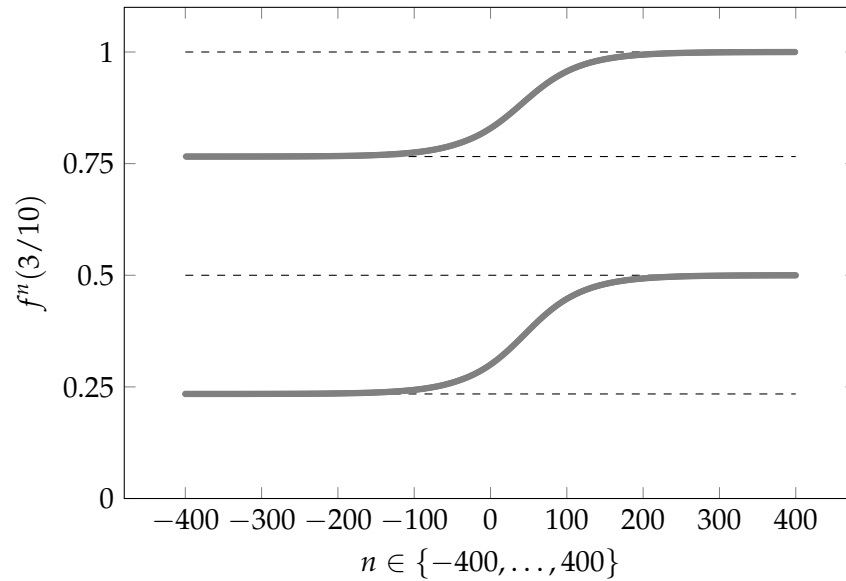


Abbildung 2.1: Die ersten 800 Elemente des Orbits von  $3/10$ , berechnet mit Anhang A.1

### 2.1.2 Irrationale Rotationszahl

Im Fall der rationalen Rotationszahl hat sich in Satz 2.1 gezeigt, dass die Anordnung der Punkte erhalten bleibt. Dies verhält sich im irrationalen Fall ähnlich.

**Satz 2.5.** Sei  $\tau(f) =: \tau$  irrational und  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Hochhebung von  $f$ . Dann gilt für  $x \in \mathbb{R}$  und  $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$

$$n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2 \Leftrightarrow F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2.$$

*Beweis.* Für  $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$  wechselt die Abbildung

$$p(x) := F^{n_1}(x) + m_1 - F^{n_2}(x) - m_2$$

nicht ihr Vorzeichen. Die Ungleichung der rechten Seite ist unabhängig von  $x$ , denn: Wegen der Stetigkeit von  $p$  würde ein Vorzeichenwechsel zufolge haben, dass ein  $z \in \mathbb{R}$  mit  $F^{n_1}(z) - F^{n_2}(z) + m_1 - m_2 = 0$  existiert, was aber hieße, dass  $z$  wegen  $F^{n_1}(z) - F^{n_2}(z) \in \mathbb{Z}$  ein periodischer Punkt wäre, was nicht möglich ist. Mit diesem Wissen lässt sich die eigentliche Aussage zeigen:

Es gelte also  $F^{n_1}(0) + m_1 < F^{n_2}(z) + m_2$ . Mit  $y := F^{n_2}(0)$  ist dies äquivalent zu  $F^{n_1-n_2}(y) - y < m_2 - m_1$ . Wie zuvor gilt diese Ungleichung für alle  $y \in \mathbb{R}$ , somit auch für  $y = 0$  und  $y = F^{n_1-n_2}(0)$ , sodass

$$F^{n_1-n_2}(0) < m_2 - m_1$$

und

$$F^{2(n_1-n_2)}(0) < (m_2 - m_1) + F^{n_1-n_2}(0) < 2(m_2 - m_1)$$

gilt. Induktiv folgt also  $F^{n(n_1-n_2)}(0) < n(m_2 - m_1)$  und somit

$$\tau(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{n(n_1-n_2)}(0)}{n(n_1 - n_2)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(m_2 - m_1)}{n(n_1 - n_2)} = \frac{m_2 - m_1}{n_1 - n_1}.$$

Da die Rotationszahl irrational ist, gilt die Ungleichheit strikt. Es folgt somit also  $n_1\tau + m_1 < n_2\tau + m_2$ . Die Hinrichtung folgt daraus, dass aus  $F^{n_1}(0) + m_1 > F^{n_2}(0) + m_2$

$$n_1\tau + m_1 > n_2\tau + m_2$$

folgt und wegen  $\tau$  irrational keine Gleichheit gelten kann und  $f$  keine periodischen Orbits hat.  $\square$

**Satz 2.6.** *Es sei  $\tau(f)$  irrational und  $x \in S^1$ . Dann ist  $\omega(x)$  unabhängig von  $x$  und  $\omega(x)$  ist entweder an keinem Punkt dicht und perfekt, also abgeschlossen und ohne isolierte Punkte, das heißt  $\omega(x)^\circ = \emptyset$ , oder es gilt  $\omega(x) = S^1$ .*

Für den Beweis wird noch ein Lemma benötigt.

**Lemma 2.7.** *Sei  $f$  wie oben und zudem  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $m \neq n$ , sowie  $x \in S^1$  und  $I \subseteq S^1$  ein abgeschlossenes Intervall, sodass die Endpunkte von  $I$  gerade  $f^m(x)$  und  $f^n(x)$  sind. Dann gilt, dass jeder Semiorbit das Intervall  $I$  trifft.*

**Bemerkung.** *Es gibt zwei Intervalle in  $S^1$  mit den Endpunkten  $f^m(x)$  und  $f^n(x)$ . Das Lemma gilt für beide Intervalle.*

*Beweis.* Man betrachtet den positiven Semiorbit  $\{f^n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$  für ein  $y \in S^1$ . Für den negativen Orbit kann man analog vorgehen. Für die Behauptung genügt es zu zeigen, dass die  $f^{-1}$  Iterationen von  $I$  den Einheitskreis  $S^1$  überdecken, also  $S^1 \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-k}(I)$  gilt. Sei dazu  $I_k := f^{-k(n-m)}(I)$  mit  $n > m$ , dann sind alle  $I_k$  aneinander anliegend: Für  $k \in \mathbb{N}$  haben  $I_k$  und  $I_{k-1}$  einen gemeinsamen Endpunkt. Gilt nun  $S^1 \neq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ , dann muss die Folge der Endpunkte gegen ein  $z \in S^1$  konvergieren. Ist dies der Fall, dann folgt

$$\begin{aligned} z &= \lim_{k \rightarrow \infty} f^{-k(n-m)} f^m(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(-k+1)(n-m)} f^m(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n-m)} f^{-k(n-m)} f^m(x) \\ &= f^{(n-m)} \lim_{k \rightarrow \infty} f^{-k(n-m)} f^m(x) = f^{(n-m)}(z). \end{aligned}$$

Das heißt,  $z$  wäre periodisch. Dies ist mit Satz 1.18 ein Widerspruch zu  $\tau$  irrational.  $\square$

*Beweis von Satz 2.6.* Der Beweis teilt sich in drei Abschnitte auf. Es wird zuerst die Unabhängigkeit von  $x$  gezeigt.

Es gilt  $\omega(x) = \omega(y)$  für alle  $x, y \in S^1$ , denn: Sei  $z \in \omega(x)$ , dann existiert eine Folge  $l_n$  in  $\mathbb{N}$ , sodass  $f^{l_n}(x) \rightarrow z$  für  $n \rightarrow \infty$ . Ist nun  $y \in S^1$ , dann folgt mit Lemma 2.7, dass eine Folge  $k_m$  in  $\mathbb{N}$  existiert, sodass

$$f^{k_m}(y) \in I_m := [f^{l_m}(x), f^{l_m+1}(x)]$$

gilt. Dann gilt aber auch  $\lim_{m \rightarrow \infty} f^{k_m}(y) = z$  und somit  $z \in \omega(y)$ . Es gilt also  $\omega(x) \subseteq \omega(y)$  für alle  $x, y \in S^1$  und folglich  $\omega(x) = \omega(y)$  für alle  $x, y \in S^1$ . #

Es gilt, dass  $\omega(x) = S^1$  oder an keinem Punkt dicht ist, denn: Es lässt sich zuerst bemerken, dass  $\omega(x)$  die einzige minimale, abgeschlossene, nichtleere und  $f$ -invariante Menge in  $S^1$  ist, denn: Sei  $A \subseteq S^1$  nichtleer, abgeschlossen und  $f$ -invariant und  $x \in A$ , dann gilt  $\{f^k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq A$ , da  $A$  invariant ist und  $\omega(x) \subseteq A$  gilt, da  $A$  abgeschlossen ist. Es sind also die leere Menge und der  $\omega(x)$ -Grenzwert die einzigen abgeschlossenen und invarianten Teilmengen von  $\omega(x)$  und da der Rand  $\partial\omega(x)$  eine abgeschlossene und invariante Teilmenge von  $\omega(x)$  ist, muss also  $\emptyset = \partial\omega(x)$  oder  $\omega(x) = \partial\omega(x)$  gelten. Für  $\partial\omega(x) = \emptyset$  muss  $\omega(x) = S^1$  gelten. Ist andererseits  $\partial\omega(x) = \omega(x)$ , dann ist  $\omega(x)$  an keinem Punkt dicht. #

Es ist noch zu zeigen, dass  $\omega(x)$  perfekt ist.  $\omega(x)$  ist abgeschlossen, und es ist noch zu zeigen, dass  $\omega(x)$  keine isolierten Punkte hat. Sei  $x \in \omega(x)$ , dann gibt es eine Folge  $k_n$  in  $\mathbb{N}$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{k_n}(x) = x$  gilt. Wegen der irrationalen Rotationszahl gibt es keine periodischen Orbits und somit gilt  $f^{k_n}(x) \neq x$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Folglich ist  $x$  ein Häufungspunkt von  $\omega(x)$ , da  $f^{k_n}(x) \in \omega(x)$  wegen der Invarianz gilt. □

**Bemerkung.** Die Aussage, dass mit  $A \subseteq S^1$   $f$ -invariant auch  $\partial A$   $f$ -invariant ist, folgt so: Wenn  $A$  invariant ist, ist auch  $A^c$  invariant, da  $f$  bijektiv ist. Daraus folgt aber auch, dass  $\overline{A^c}$  invariant ist und somit die Invarianz von  $\partial A = \overline{A} \cap A^c$ .

Es wird das Ergebnis von Satz 2.2 wiederholt. In diesem Satz hat sich gezeigt, dass im Fall der rationalen Rotationszahl der Orbit eines Punktes entweder periodisch oder asymptotisch zu einem periodischen Punkt ist. Im Fall der irrationalen Rotationszahl gibt es keine periodischen Punkte und der Orbit ist entweder dicht oder asymptotisch zu oder in einer Cantormenge. Dies ist der Fall, wenn  $\omega(x)^\circ = \emptyset$  gilt, also  $\omega(x)$  total unzusammenhängend ist. Es wird nun der Fall der irrationalen Rotationszahl weiter untersucht, insbesondere unter welchen Voraussetzungen ein Kreishomöomorphismus äquivalent zu einer Rotation ist.

Der folgende Satz betrachtet den Fall der irrationalen Rotationszahl im Bezug auf die Konjugation zu einer Rotation. Dieses Ergebnis wird in späteren Kapitel dieser Arbeit von Relevanz sein, da sich so einfachere, konjugationsinvariante Resultate für Rotationen auf die konjugierten Kreishomöomorphismen übertragen lassen.

**Satz 2.8** (Poincaré-Klassifizierung). Sei  $\tau(f)$  irrational. Dann gilt:

1. Wenn  $f$  transitiv ist, dann ist  $f$  konjugiert zu der Rotation  $r_{\tau(f)}$ .

2. Wenn  $f$  nicht transitiv ist, dann hat  $f$  die Rotation  $r_{\tau(f)}$  als topologischen Faktor über eine nicht invertierbare Abbildung  $h : S^1 \rightarrow S^1$ , sodass die Hochhebung  $H$  von  $h$  monoton ist und  $H(x+1) = H(x) + 1$  erfüllt. Es gilt dann in der Hochhebung  $H \circ F = R_{\tau(f)} \circ H$ .

**Bemerkung.** Wenn es unter  $f$  ein wanderndes Intervall gibt, also ein  $I \subseteq S^1$ , sodass  $(f^n(I))_{n \in \mathbb{Z}}$  eine Familie paarweise disjunkter Intervalle bildet, dann ist  $f$  offenbar nicht transitiv.

*Beweis.* Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Hochhebung von  $f$  und für  $x \in \mathbb{R}$   $B := \{F^n(x) + m\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  die vollständige Hochhebung des Orbits im Punkt  $\pi(x)$ . Definiere nun eine neue Abbildung

$$H : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad F^n(x) + m \mapsto n\tau(F) + m.$$

Nach Satz 2.5 ist  $H$  monoton. Die Menge  $H(B)$  liegt außerdem wegen Satz 1.13 dicht in  $\mathbb{R}$ . Sei  $R_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \tau(F)$ , dann gilt auf  $B$  die Gleichung  $H \circ F = R_\tau \circ H$ , da offenbar

$$H \circ F(F^n(x) + m) = H(F^{n+1}(x) + m) = (n+1)\tau(F) + m$$

und

$$R_\tau \circ H(F^n(x) + m) = R_\tau(n\tau + m) = (n+1)\tau + m$$

gilt.

Die Abbildung  $H$  hat darüber hinaus eine stetige Fortsetzung auf dem Abschluss  $\bar{B}$  von  $B$ , denn: Für ein  $y \in \bar{B}$  gibt es eine Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$  gilt. Es soll nun  $H$  so definiert werden, dass

$$H(y) := \lim_{n \rightarrow \infty} H(x_n)$$

gilt. Die Folge  $H(x_n)$  konvergiert nun und ist unabhängig von der gewählten Folge mit Grenzwert  $y$ , da jeweils der Links- und Rechtslimes existieren muss und unabhängig von der Folge ist, da  $H$  monoton ist. Andernfalls wäre in  $\mathbb{R} \setminus H(B)$  ein Intervall enthalten, was im Widerspruch zu der Dichtheit von  $H(B)$  steht. #

Die Abbildung  $H$  kann nun auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt werden. Es ist  $H : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton und surjektiv, da  $H|_B$  monoton und stetig ist,  $\bar{B}$  abgeschlossen ist und  $H(B)$  dicht in  $\mathbb{R}$  liegt. Somit ist  $H$  auf den Intervallen in  $\mathbb{R} \setminus \bar{B}$  eindeutig definiert: Es wird dort  $H$  als konstante Abbildung zwischen den beiden gleichwertigen Werten des Intervallendpunktes definiert. Man erhält so die Abbildung  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $H \circ F = R_\tau \circ H$  gilt und somit eine Semikonjugation mit  $h : S^1 \rightarrow S^1$ , da für ein  $z \in B$

$$H(z+1) = H(F^n(x) + m + 1) = n\tau + m + 1 = H(z) + 1$$

gilt und diese Eigenschaft unter stetiger Fortsetzung erhalten bleibt.

Im transitiven Fall gilt bereits  $\bar{B} = \mathbb{R}$ , sodass die Abbildung  $H$  eine Bijektion ist. Die Behauptung ist somit gezeigt.  $\square$

2.1.3 *Orbittypen*

Mit den Ergebnissen von Satz 2.2 und 2.8 zeigt sich, dass ein Punkt  $x \in S^1$  sechs verschiedene Typen von Orbits haben kann. Diese Typen werden in Tabelle 2.1 beschrieben. Der erste rationale Fall  $I_{\frac{p}{q}}$  ist klar und die beiden anderen Fälle ergeben sich aus Satz 2.2. Ein homoklinischer Orbit  $II_{\frac{p}{q}}$  tritt für eine Periode von 1 auf, ein heteroklinischer Orbit  $III_{\frac{p}{q}}$  für eine Periode von größer 1. Somit ist die Klassifizierung des rationalen Falls abgeschlossen. Für die irrationale Rotationszahl gibt es ebenfalls drei Fälle. Diese ergeben sich aus 2.8. Ist  $f$  ein transitiver Kreishomöomorphismus, dann gibt es per Definition einen Punkt  $x \in S^1$ , sodass der Orbit  $\mathcal{O}_x$  dicht in  $S^1$  liegt. Dies ist der Fall  $I_\alpha$ . Für die nicht-transitiven Fälle  $II_\alpha$  und  $III_\alpha$  gibt es eine Cantormenge, welche entweder den Orbit enthält oder zu der der Orbit asymptotisch ist.

Rotationszahl $p/q \in \mathbb{Q}$	Rotationszahl $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$I_{\frac{p}{q}}$ : Periodischer Orbit mit gleicher Periode wie $r_{\frac{p}{q}}$ und gleich angeordnet wie ein Orbit von $r_{\frac{p}{q}}$	$I_\alpha$ : Ein Orbit dicht in $S^1$ , welcher auf gleiche Weise angeordnet ist wie ein Orbit von $r_\alpha$
$II_{\frac{p}{q}}$ : Ein homoklinischer Orbit, d.h. ein bestimmter periodischer Orbit wird für $n \rightarrow \pm\infty$ erreicht	$II_\alpha$ : Ein Orbit, welcher dicht in einer Cantormenge liegt
$III_{\frac{p}{q}}$ : Ein heteroklinischer Orbit, d.h. es werden zwei verschiedene periodische Orbits für $n \rightarrow \infty$ und $n \rightarrow -\infty$ erreicht	$III_\alpha$ : Ein Orbit homoklinisch zu einer Cantormenge

Tabelle 2.1: Sechs verschiedene Orbits für einen Punkt  $x \in S^1$ , vgl. [KH95, S. 399]

2.2 SATZ VON DENJOY

Es zeigt sich, dass stärkere Anforderungen an  $f$  dazu führen, dass es im Fall der irrationalen Rotationszahl weniger Typen von Orbits geben kann. Dies steht im Zusammenhang zu Anforderungen an die Differenzierbarkeit der Abbildung  $f$ . Die zentrale Aussage dieses Abschnitts ist der Satz von Denjoy [KH95], ebenfalls [Milo01].

**Definition 2.9** (Beschränkte Variation). *Eine Abbildung  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  hat beschränkte Variation, wenn mit*

$$M = \{ \{x_k, x'_k\}_{k=1}^n \mid \{x_k, x'_k\}_{k=0}^n \text{ paarweise disjunkt, } n \in \mathbb{N} \}$$

für  $g$

$$\text{Var}(g) = \sup_M \sum_{k=1}^n |g(x_k) - g(x'_k)| < \infty$$

gilt.

Offenbar sind stetig differenzierbare Funktionen von beschränkter Variation. Es werden nun Lemmata eingeführt, welche in dem Beweis des Satzes von Denjoy eine Rolle spielen werden.

**Lemma 2.10.** *Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein Homöomorphismus mit irrationaler Rotationszahl und  $x_0 \in S^1$ . Dann gibt es unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ , sodass die Intervalle*

$$f^k((x_0, f^{-n}(x_0)))$$

für  $0 \leq k < n$  disjunkt sind.

*Beweis.* Setze  $x_k := f^k(x_0)$  und  $I := (x_0, x_{-n})$ . Offenbar ist  $f$  nun entweder konjugiert oder semikonjugiert zu einer irrationalen Rotation, es kann also angenommen werden, dass es sich bei  $f$  selbst um eine irrationale Rotation handelt. In diesem Fall ist es klar, dass die Aussage für alle  $n \in \mathbb{N}$ , sodass für  $0 < |k| < n$  kein  $x_k$  in  $I$  liegt, gilt. Da der Orbit von  $x_0$  dicht ist, gibt eine Teilfolge, welche gegen  $x_0$  konvergiert und somit unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ , sodass die Aussage gilt.  $\square$

**Lemma 2.11.** *Es sei  $X = S^1$  oder  $X = [0, 1]$  und  $Y \subseteq X$  eine Teilmenge. Es sei nun  $f : X \rightarrow X$  derart, dass  $f|_Y \in C^1$  gilt und auf  $Y$   $f'$  von beschränkter Variation ist und dort  $|f'| > 0$  gilt. Sei  $V < \infty$  die Variation von  $\varphi : x \mapsto \log |f'(x)|$ . Ist  $I \subseteq Y$  ein Intervall, sodass  $f(I), \dots, f^n(I)$  paarweise disjunkte Intervalle sind, dann gilt*

$$\exp(-V) \leq \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \leq \exp(V).$$

*Beweis.* Es wird folgende Abschätzung gemacht:

$$\begin{aligned} V &\geq \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(f^k(x)) - \varphi(f^k(y))| \geq \left| \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) - \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(y)) \right| \\ &= \left| \log \left( \prod_{k=0}^{n-1} |f'(f^k(x))| \cdot \prod_{k=0}^{n-1} |f'^{-1}(f^k(y))| \right) \right| = \left| \log \frac{|(f^n)'(x)|}{|(f^n)'(y)|} \right| \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mit Verknüpfung der Exponentialfunktion.  $\square$

**Lemma 2.12.** *Sei  $f$  nicht konjugiert zu einer Rotation und  $I$  ein Intervall im Komplement des  $\omega(x)$ -Grenzwerts mit  $x_0 \in I$  und  $n$  wie in Lemma 2.10, dann gilt*

$$\exp(-V) \leq (f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x) \leq \exp(V)$$

für alle  $x \in I$ .

*Beweis.* Da  $I \subseteq S^1 \setminus \omega(x)$  gilt, haben alle  $x \in I$  unter der Semikonjugation das gleiche Bild. Somit hängen die  $n \in \mathbb{N}$  von Lemma 2.10 nicht von  $x \in I$  ab und man kann Lemma 2.11 mit  $y = f^{-n}(x)$  anwenden. Die Behauptung folgt somit.  $\square$

Es kann nun der zentrale Satz dieses Abschnitts eingeführt werden. Es zeigt sich, dass für Kreishomöomorphismen, welche bestimmte Glattheitskriterien erfüllen, der nicht-transitive Fall aus Satz 2.8 wegfällt.

**Satz 2.13** (von Denjoy). *Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer  $C^1$ -Diffeomorphismus mit irrationaler Rotationszahl und  $f'$  habe beschränkte Variation. Dann ist  $f$  transitiv und konjugiert zu einer Rotation  $R_{\tau(f)}$ .*

*Beweis.* Angenommen,  $f$  sei nicht konjugiert zu einer Rotation. Es sei  $I \subseteq S^1 \setminus \omega(x)$ , dann sind nach Satz 2.6 alle Bilder und Urbild von  $I$  unter  $f$  paarweise disjunkt. Andererseits folgt zusammen mit der Abschätzung  $a + b \geq \sqrt{a \cdot b}$  für  $a, b \geq 0$  und Lemma 2.12 für die Länge der Intervalle  $l$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} l(f^n(I)) + l(f^{-n}(I)) &= \int_I (f^n)'(x) \, dx + \int_I (f^{-n})'(x) \, dx \\ &= \int_I (f^n)'(x) + (f^{-n})'(x) \, dx \\ &\geq \int_I \sqrt{(f^n)'(x) \cdot (f^{-n})'(x)} \, dx \\ &\geq \int_I \sqrt{\exp(-V)} \, dx = l(I) \cdot \exp\left(-\frac{V}{2}\right) \end{aligned}$$

für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt mit  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} l(f^i(I)) = \infty$  ein Widerspruch zur Annahme, da die Intervalle  $\{f^i(I)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  folglich nicht disjunkt sein können. Die Behauptung ist somit gezeigt.  $\square$

### 2.2.1 Das Denjoy Gegenbeispiel

Im folgenden Satz werden die Anforderungen aus dem Satz von Denjoy 2.13 gerechtfertigt, indem ein entsprechendes Gegenbeispiel konstruiert wird. In dem Beweis des Satzes von Poincaré 2.8 wurde gezeigt, dass die Länge der Intervalle, auf denen der topologische Faktor  $h$  konstant ist, bestimmt, ob ein Kreishomöomorphismus mit irrationaler Rotationszahl zu der Rotation konjugiert sein kann. Dieser Ansatz wurde für das Denjoy Gegenbeispiel wieder aufgegriffen.

**Satz 2.14** (Denjoy Gegenbeispiel). *Für jede irrationale Zahl  $\alpha \in (0, 1)$  gibt es einen nicht-transitiven, orientierungstreuen  $C^1$ -Diffeomorphismus  $f : S^1 \rightarrow S^1$  mit Rotationszahl  $\alpha$ .*

*Beweis.* Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Es wird nun im Punkt  $x_0 \in S^1$  der Orbit der Abbildung  $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$  betrachtet. Es bezeichnet außerdem  $x_k := f^k(x_0)$ . Es wird nun an jedem Punkt  $x_n$  des Orbits  $\mathcal{O}_{x_0}$  ein Intervall  $I_n = [a_n, b_n]$  eingefügt. Die Länge des Intervalls  $I_n$  ist durch

$l_n := b_n - a_n$  gegeben. Die Intervalle sollen derart eingefügt werden, dass sie disjunkt sind, also dass  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i \leq 1$  gilt. In diesem Fall wird  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i = 1$  gefordert. Sei nun durch  $\kappa_n$  die Zahl in  $[0, 1)$  gegeben, für die  $n\alpha = n\kappa \bmod 1$  gilt. Es werden jetzt die Endpunkte der Intervalle konstruiert: Seien  $a, b : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$  mit

$$a(x) := \sum \{l_k \mid \kappa_k < x\} \quad \text{und} \quad b(x) := \sum \{l_k \mid \kappa_k \leq x\}$$

für alle  $x \in [0, 1)$ . Es gilt dann  $a(x) \leq b(x)$  für alle  $x \in [0, 1)$  und  $a(x) < b(x)$  genau dann, wenn  $x = \kappa_n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$  gilt. Die Länge eines Intervalls  $[a(x), b(x)]$  ist also genau dann größer 0, wenn  $x = \kappa_n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$  gilt. Sei nun das Intervall  $I_n$  für  $n \in \mathbb{Z}$  durch  $I_n := [a_n, b_n] := [a(\kappa_n), b(\kappa_n)]$  gegeben. Die Intervalle  $(I_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  sind disjunkt. Es gibt nun eine stetige Abbildung  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $G([a(x), b(x)]) = x$  für alle  $x \in [0, 1)$  gilt, sowie  $G(x+1) = G(x) + 1$ . Die Intervalle  $[a_n, b_n] \subseteq [0, 1)$  sind angeordnet wie die Punkte  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Sei nun  $\xi$  das Bild von einem  $x \in [0, 1)$  in  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  und  $I(\xi)$  das Bild von  $[a(x), b(x)]$  in  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Die Bilder dieser Intervalle sind wieder disjunkt mit Vereinigung  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  und wie die Punkte  $\xi$  angeordnet. Die Abbildung  $G$  stellt nun die Hochhebung einer Abbildung  $g : S^1 \rightarrow S^1$  mit  $g(I(\xi)) = \xi$  dar. Es kann ein Kreishomöomorphismus  $f$  definiert werden, sodass jedes Intervall  $I(\xi) = g^{-1}(\xi)$  auf  $I(\xi + \alpha)$  abgebildet wird. Ist  $I(\xi)$  ein Punkt, dann ist  $f(I(\xi))$  eindeutig definiert. Ist  $I(\xi)$  ein Intervall, dann kann ein beliebiger orientierungstreuer Homöomorphismus benutzt werden, um  $I(\xi)$  auf  $I(\xi + \alpha)$  abzubilden. Das so konstruierte  $f$  ist die gesuchte Abbildung und monoton semikonjugiert zu der Rotation um  $\alpha$ , jedoch nicht notwendiger Weise differenzierbar. Nach Satz 1.16 Aussage 3 gilt außerdem  $\tau(f) = \alpha$ .

Für die  $C^1$ -Differenzierbarkeit dürfen die Längen  $l_n$  nicht beliebig gewählt sein. Es wird gefordert, dass

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{l_{n+1}}{l_n} = 1$$

gilt. Dies kann durch die Setzung  $l_n := \frac{c}{n^2+1}$  bewirkt werden, wobei  $c \in \mathbb{R}$  ein Faktor ist, sodass  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i = 1$  gilt. Außerdem wird für die Abbildung von  $I_n$  auf  $I_{n+1}$  ein Diffeomorphismus gewählt, sodass die Ableitungen an den Intervallendpunkten 1 entsprechen und für  $|n| \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen 1 konvergieren.  $\square$

Es kann also für einen  $C^1$ -Kreisdiffeomorphismus wandernde Intervalle geben, was ein Widerspruch zur Transitivität der Abbildung ist. Im folgenden Beispiel von [Miloi] wird noch eine Abbildung angegeben, welche der des Beweises entspricht.

**Beispiel 2.15.** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  derart, dass

$$f(a_n + x) = a_{n+1} + \int_0^x \exp(c_n t(l_n - t)) dt$$



*gilt. Dann gibt es  $c_n \in \mathbb{R}$ , sodass*

$$\int_0^{l_n} \exp(c_n t(l_n - t)) dt = l_{n+1}$$

*gilt. Diese  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren dann für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 und die Ableitungen gleichmäßig gegen 1 für  $l_{n+1}/l_n \rightarrow 1$ . Die so definierte Abbildung  $f$  ist jetzt  $C^1$  mit  $f' = 1$  auf  $S^1 \setminus \bigcup_{\xi} I(\xi)$ , denn: Es ist*

$$f'(a_n + x) = \exp(c_n x(l_n - x)) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

*Somit ist  $f$   $C^1$ -glatt, hat aber dennoch wandernde Intervalle und ist somit nicht transitiv.*

In diesem Kapitel werden Approximationsmöglichkeiten für Kreishomöomorphismen untersucht. Zu diesem Zweck wird die Menge der orientierungstreuen Kreishomöomorphismen  $H^+(S^1)$  als topologisches Objekt betrachtet. Eine zentrale Aussage dieses Kapitels ist, dass Kreishomöomorphismen mit beliebiger Rotationszahl durch Diffeomorphismen approximiert werden können.

Der folgende Abschnitt orientiert sich an [AHK03]. Aus Gründen der Überschaubarkeit und um dem eigentlichen Thema nahe zu bleiben, wurde an manchen Stellen für den Beweis die Quelle [AHK03] referenziert oder anstatt eines Beweises das Beweisverfahren ausgeführt.

### 3.1 TOPOLOGISCHE EIGENSCHAFTEN VON $H^+(S^1)$

Für die zentralen Ergebnisse dieses Abschnitts werden zwei topologische Eigenschaften von  $H^+(S^1)$  benötigt. Diese werden später im Beweis des Approximationsergebnisses verwendet.

**Definition 3.1** ( $(\varepsilon, k)$ -periodisch nach-innen). *Eine Familie  $\{A_0, \dots, A_{k-1}\}$  von paarweise disjunkten, abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  mit  $A := \bigcup_{i=0}^{k-1} A_i$  und  $\varepsilon > 0$  heißt eine  $(\varepsilon, k)$ -periodische nach-innen Dekomposition, wenn für alle  $i = 1, 2, \dots, k$  mit  $A_k := A_0$*

$$f(A_{i-1}) \subseteq A_i^\circ$$

*gilt und der Durchmesser der  $A_i$  kleiner  $\varepsilon$  ist. Eine Menge wird als  $(\varepsilon, k)$ -periodisch nach-innen bezeichnet, wenn sie eine  $(\varepsilon, k)$ -periodische nach-innen Dekomposition zulässt.*

**Lemma 3.2.** *Jedes Element von  $g \in \tau^{-1}(r)$  kann durch ein Element von  $(\tau^{-1}(r))^\circ$  approximiert werden.*

*Beweis.* Sei  $g \in H^+(S^1)$  mit  $\tau(g) = p/k$  für  $p, k$  mit  $0 < p \leq k$ . Sei  $x \in \text{Per}(g)$ . Die Zahl  $p$  ist durch die Anordnung der Punkte

$$\{x, g(x), \dots, g^{q-1}(x)\}$$

auf  $S^1$  bestimmt. Angenommen,  $\varepsilon$  genügt

$$\varepsilon < d(g^i(x), g^j(x))$$

für  $0 \leq i < j < k$ . Mit Anwendung von [AHK03, Proposition 4.3] auf  $g$  und  $x$  erhält man einen Homöomorphismus  $g_1$  und eine  $(\varepsilon/2, k)$ -Dekomposition  $\{U_0, \dots, U_{q-1}\}$  von einer  $g_1$ -nach-innen Menge  $U$ ,

sodass  $g^i(x) \in U_i$  gilt und  $U_i$  ein abgeschlossenes Intervall ist für alle  $i = 0, \dots, k-1$ . Für alle  $g_2$ , welche hinreichend nah zu  $g_1$  sind, ist  $U$  ebenfalls nach-innen für  $g_2$  mit der periodischen Dekomposition  $\{U_0, \dots, U_{q-1}\}$ . Auf dem abgeschlossenen Intervall  $U_0$  hat  $g_2^k$  einen Fixpunkt  $y$  und die Anordnung der Punkte

$$\{y, g_2(y), \dots, g_2^{q-1}(y)\}$$

stimmt mit der Anordnung von  $\{U_0, \dots, U_{q-1}\}$  überein und folglich auch mit der von  $\{x, g(x), \dots, g^{q-1}(x)\}$ . Somit gilt  $\tau(g) = \tau(g_2)$  für alle  $g_2$  hinreichend nah an  $g_1$ .  $\square$

**Lemma 3.3.** *Die Menge  $H^+(S^1)$  ist separabel.*

*Beweis.* Die stückweise linearen Homöomorphismen mit rationalen Knoten bilden eine dichte und abzählbare Teilmenge von  $H^+(S^1)$ . Eine solche Abbildung kann etwa durch  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F(x+1) = F(x) + 1$  angegeben werden, wenn  $F(\frac{i}{n}) := \frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$  und

$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_1}{q_1} < \dots < \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_0}{q_0} + 1$$

für  $i \in \{0, \dots, n\}$  gilt.  $\square$

**Lemma 3.4.** *Die Menge  $\{f \in H^+(S^1) \mid f, f^{-1} \in C^\infty(S^1)\}$  liegt dicht in  $H^+(S^1)$ .*

*Beweis.* Für einen beliebigen Homöomorphismus  $f \in H^+(S^1)$  kann ein Diffeomorphismus  $\tilde{f}$  gewählt werden, sodass dieser beliebig nah an  $f$  liegt, denn: Der Homöomorphismus  $f$  kann mit einem Glättungskern geglättet werden, sodass die so erhaltene Abbildung  $\tilde{f}$  diffeomorph ist und beliebig nah an  $f$  liegt.  $\square$

### 3.2 APPROXIMATION VON KREISHOMÖOMORPHISMEN

Im folgenden Satz wird untersucht, wie sich Homöomorphismen  $f \in H^+(S^1)$  durch andere Abbildungen in  $H^+(S^1)$  approximieren lassen.

**Satz 3.5.** *Sei  $f \in H^+(S^1)$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus  $g \in H^+(S^1)$ , sodass*

$$\tau(f) = \tau(g) \quad \text{und} \quad d(f, g) < \varepsilon$$

*gilt. Das heißt also, dass für eine beliebige Rotationszahl  $\tau$  die Menge*

$$\{f \in H^+(S^1) \mid f, f^{-1} \in C^\infty(S^1) \text{ und } \tau(f) = \tau\}$$

*dicht in  $H^+(S^1) \cap \tau^{-1}(\tau)$  liegt.*

*Beweis.* Es wird eine Unterscheidung getroffen für den Fall einer rationalen und den Fall einer irrationalen Rotationszahl.

1. Die Behauptung für den rationalen Fall folgt daraus, dass die Diffeomorphismen nach Lemma 3.4 dicht in  $H^+(S^1)$  liegen und daraus, dass nach Lemma 3.2 jede Abbildung  $g \in \tau^{-1}(r)$  für  $r \in \mathbb{Q}$  durch ein Element aus  $(\tau^{-1}(r))^\circ$  approximiert werden kann.
2. Im irrationalen Fall gibt es keine periodischen Orbits und jedes minimale Element  $M$  in der Familie der nichtleeren, abgeschlossenen und  $f$ -invarianten Mengen ist perfekt. Im Komplement dieser minimalen Mengen liegt höchstens eine abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen. Es ist somit möglich, ein  $p \in M$  zu finden, sodass  $p$  kein Intervallendpunkt ist. Für  $\varepsilon > 0$  gibt es  $i, j \in \mathbb{N}$ , sodass das Intervall

$$(f^i(p), f^j(p))$$

höchstens von Länge  $\varepsilon$  und außerdem  $p \in (f^i(p), f^j(p))$  gilt. Sei  $F$  eine Hochhebung derart, dass  $F(p) = 0$  gilt. Es gibt nun  $k_i, k_j \in \mathbb{N}$ , sodass die Ungleichungen

$$k_i - \varepsilon < F^i(0) < k_i \quad \text{und} \quad k_j < F^j(0) < k_j + \varepsilon$$

gelten. Folglich gibt es zwei Konstanten  $a < 0 < b$  mit  $|a - b| < \varepsilon$  und  $G_\alpha(x) := F(x) + \alpha$ ,  $\alpha \in \{a, b\}$ , sodass  $G_b^i(0) = k_i$  und  $G_a^j = k_j$  gilt. Die Abbildung  $G_\alpha$  sind offenbar Hochhebungen von Kreishomöomorphismen  $g_\alpha$ , für die

$$\tau(G_a) < \tau(F) < \tau(G_b)$$

gilt. Für  $\alpha \in \{a, b\}$  sei  $f_\alpha$  ein Diffeomorphismus, der  $g_\alpha$  approximiert und die gleiche rationale Rotationszahl hat. Die Abbildung  $f_\alpha$  kann hinreichend nah an  $g_\alpha$  gewählt werden, sodass es eine Hochhebung  $F_\alpha$  von  $f_\alpha$  gibt, sodass  $d(F, F_\alpha) < \varepsilon$  gilt. Die Abbildung

$$F_t(x) \equiv tF_a(x) + (1-t)F_b(x)$$

ist für  $0 \leq t \leq 1$  glatt, streng monoton steigend und genügt der Gleichung  $F_t(x+1) = F_t(x) + 1$ . Somit ist  $F_t$  die Hochhebung eines Diffeomorphismus  $f_t$ . Da die Rotationszahl stetig ist, gibt es ein  $t \in (0, 1)$ , sodass  $\tau(f_t) = \tau(f)$  gilt. Mit der Ungleichung

$$F(x) - 2\varepsilon < F_a(x) \leq F(x) \leq F_b(x) < F(x) + 2\varepsilon$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  folgt somit auch  $d(f, f_t) < 2\varepsilon$ .

□

Dieses Resultat ist zentral in diesem Kapitel und kann für weitere Ergebnisse genutzt werden.

**Satz 3.6.** Für alle rationalen Rotationszahlen  $\tau \in \mathbb{Q}$  existiert ein Homöomorphismus  $g_\tau \in H^+(S^1)$ , sodass für alle  $f \in H^+(S^1)$  mit  $\tau(f) = \tau$  eine Folge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^+(S^1)$  existiert, sodass

$$h_n g_\tau h_n^{-1} \rightarrow f$$

gilt.

*Beweis.* Es wird nur der Fall von einem Fixpunkt, also  $\tau = 0$ , betrachtet, da der Beweis für  $\tau \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  ähnlich funktioniert. Sei  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  dicht in der Menge  $H^+(S^1) \cap \tau^{-1}(0)$ . Es wird zuerst  $g_0$  durch Verkettung der  $f_n$  konstruiert, dies existiert, da  $H^+(S^1)$  separabel ist. Siehe Abbildung 3.1 links. Sei  $f$  mit  $\tau(f) = 0$ . Für alle  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $f_n$ , sodass

$$|f - f_n| < \varepsilon$$

gilt und ein  $h_n \in H^+(S^1)$ , sodass  $|h_n^{-1} \circ f_n \circ h_n - g_0| < \varepsilon$  gilt. Die Konjugation mit  $h_n$  vergrößert für ein  $k \in \mathbb{N}$  den Definitionsbereich von  $f_k$  auf das Intervall  $[0 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ , siehe Abbildung 3.1 rechts.  $\square$

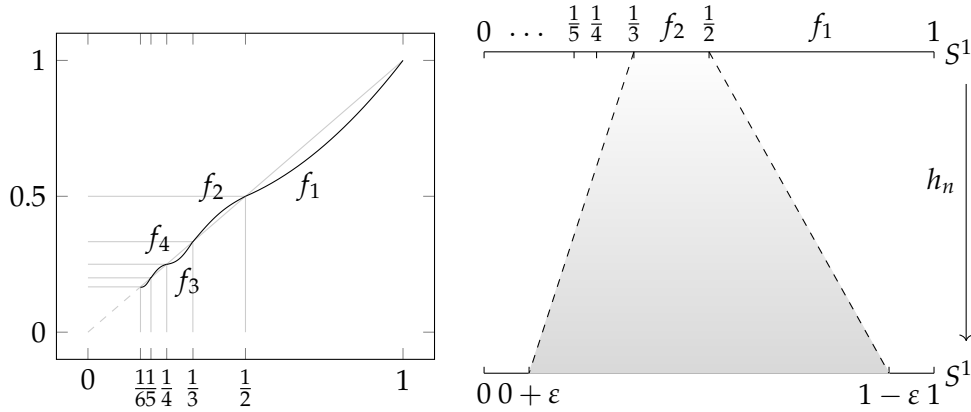


Abbildung 3.1: Konstruktion der Abbildung  $g_0$  (li.), die Homöomorphismen  $h_n$  (re.)

**Satz 3.7.** Für alle irrationalen Rotationszahlen  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  existiert eine Folge  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^+(S^1)$ , sodass für alle  $f \in H^+(S^1) \cap \tau^{-1}(\tau)$

$$h_n r_\tau h_n^{-1} \rightarrow f$$

gilt.

*Beweis.* Nach Satz 3.5 existiert eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H^+(S^1)$  mit  $\tau(f_n) = \tau(f)$ ,  $f, f^{-1} \in C^\infty(S^1)$  und  $d(f_n, f) < \frac{1}{n}$ . Aus dem Satz von Poincaré 2.8 folgt, dass es  $h_n \in H^+(S^1)$  gibt, sodass

$$f_n = h_n r_{\tau(f)} h_n^{-1}$$

gilt.  $\square$

## DER SATZ VON WEYL UND BENFORD'S LAW

---

In diesem Kapitel wird eine Einführung der Ergodentheorie vorgenommen. Es wird gezeigt, wie ergodische Maße auf periodischen Orbits aussehen und dass die irrationale Rotation eindeutig ergodisch ist. Ein zentrales Ergebnis außerdem ist der Satz von Weyl, welcher genutzt wird, um zu zeigen, dass die Folge  $2^n$  dem Gesetz von Benford genügt. Es wird außerdem noch die Anwendung des Gesetzes von Benford betrachtet.

### 4.1 BEGRIFFSBILDUNG

Es wird zuerst die Definition von Ergodizität eingeführt. Diese erfolgt nach [Kle13, Kapitel 20].

**Definition 4.1** (Invariante Ereignisse). *Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  eine messbare Abbildung. Ein Ereignis  $A \in \mathcal{A}$  heißt invariant, wenn*

$$T^{-1}(A) = A$$

*gilt. Es wird nun die  $\sigma$ -Algebra aller invarianten Ereignisse mit*

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{A} \mid T^{-1}(A) = A\}$$

*bezeichnet.  $\mathcal{I}$  heißt  $\mathbb{P}$ -trivial, wenn  $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$  für alle  $A \in \mathcal{I}$  gilt.*

Es kann nun die Definition der ergodischen Systems festgelegt werden.

**Definition 4.2** (Ergodisch). *Sei  $T$  wie oben.*

1. *Die Abbildung  $T$  heißt maßtreu, falls  $\mathbb{P}(T^{-1}(A)) = \mathbb{P}(A)$  für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{A}$  gilt. Es wird dann  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$  als maßerhaltendes dynamisches System bezeichnet. Das Maß  $\mathbb{P}$  wird dann als  $T$ -invariant bezeichnet.*
2. *Wenn  $T$  maßtreu und  $\mathcal{I}$   $\mathbb{P}$ -trivial ist, dann heißt  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, T)$  ein ergodisches dynamisches System.*
3. *Die Abbildung  $T$  heißt eindeutig ergodisch, wenn es nur ein  $T$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß gibt.*

### 4.2 DER SATZ VON WEYL

Es wird nun in Anlehnung zu [Wey16] der Satz von Weyl eingeführt. Dazu wird außerdem die Definition der Gleichverteilung für eine reelle Folge modulo 1 von [Wey16] benötigt.

**Definition 4.3** (Gleichverteilung). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$  eine Folge. Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird als gleichverteilt modulo 1 bezeichnet, wenn für jedes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{a_n \mid a_n \bmod 1 \in I\}}{n} = |I|$$

erfüllt ist.

Es gilt darüber hinaus das Gleichverteilungskriterium.

**Satz 4.4** (Gleichverteilungskriterium). Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann gleichverteilt modulo 1, wenn für alle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $f$  eine 1-periodische, beschränkte und Riemann-integrierbare Funktion ist, gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f(a_k)}{n} = \int_0^1 f(x) \, dx. \quad (4.1)$$

*Beweis.* Für beliebiges  $\varepsilon > 0$  gibt es auf dem Intervall  $[0, 1]$  stückweise konstante Funktionen  $f_1, f_2$ , sodass auf  $[0, 1]$   $f_1 \leq f \leq f_2$  gilt sowie

$$\left| \int_0^1 f_1(x) \, dx - \int_0^1 f_2(x) \, dx \right| \leq \varepsilon.$$

Es gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f_1(a_k)}{n} = \int_0^1 f_1(x) \, dx \geq \int_0^1 f(x) \, dx - \varepsilon.$$

Es gilt somit für ein hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_1(a_k) > \int_0^1 f(x) \, dx - 2\varepsilon,$$

also insbesondere

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) > \int_0^1 f(x) \, dx - 2\varepsilon.$$

Analog kann die linke Seite für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$  durch

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k) > \int_0^1 f(x) \, dx - 2\varepsilon$$

abgeschätzt werden. Die Behauptung ist somit gezeigt.  $\square$

Im Folgenden sei  $f \in H^+(S^1)$ .

**Definition 4.5** ( $\Delta$ -Bedingung). Der Kreishomöomorphismus  $f$  genügt der  $\Delta$ -Bedingung, wenn es eine dichte Teilmenge  $\Phi \subseteq C^0(S^1)$  gibt, sodass für alle  $\varphi \in \Phi$  die Summe

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))}{n}$$

für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig gegen eine Konstante konvergiert.

**Lemma 4.6.** Für jede stetige Funktion  $g \in C(S^1)$  konvergiert die Folge des Zeitmittelwerts

$$\left( \frac{\sum_{k=0}^{n-1} g(f^k(x))}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad (4.2)$$

gleichmäßig gegen eine Konstante  $g_0$ .

*Beweis.* Sei  $\varepsilon > 0$  und  $\Phi$  eine dichte Teilmenge in  $C(S^1)$ . Dann gibt es ein  $\varphi \in \Phi$ , sodass

$$\max_{x \in \Omega} |\varphi(x) - g(x)| < \varepsilon$$

gilt. Sei  $\varphi_0$  der Grenzwert der Mittelwerte von  $\varphi$ . Es gilt somit

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))}{n} - \frac{\sum_{k=0}^{n-1} g(f^k(x))}{n} \right| < \varepsilon$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt

$$\left| \sup_{x \in \Omega} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} g(f^k(x))}{n} - \varphi_0 \right| < \varepsilon$$

sowie

$$\left| \varphi_0 - \inf_{x \in \Omega} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} g(f^k(x))}{n} \right| < \varepsilon.$$

Die gleichmäßige Konvergenz des Zeitmittelwerts gegen eine Konstante  $g_0$  folgt nun daraus, dass  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war.  $\square$

**Lemma 4.7.** Für  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  genügt das dynamische System  $(S^1, \mathcal{B}(S^1), \lambda, r_\alpha)$  der  $\Delta$ -Bedingung.

*Beweis.* Es muss also eine dichte Teilmenge in  $C(S^1)$  gefunden werden, sodass der Zeitmittelwert (4.2) für alle Funktionen der Teilmenge gleichmäßig gegen eine Konstante konvergiert. Nach dem Satz von Weierstrass bilden trigonometrische Polynome eine dichte Teilmenge in den stetigen Funktionen bezüglich der uniformen Topologie. Die gleichmäßige Konvergenz bleibt darüber hinaus auch bei Linearkombinationen erhalten, sodass es genügt, die gleichmäßige Konvergenz für Funktionen  $e_m(x) = e^{2\pi i m x}$  zu prüfen. Für  $m \neq 0$  ist  $e_m \circ r_\alpha(x) = e^{2\pi i m(x+\alpha)} = e^{2\pi i m \alpha} e^{2\pi i m x} = e^{2\pi i m \alpha} e_m(x)$  und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e_m \circ r_\alpha^k(x)}{n} \right| &= \left| \frac{\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i m k \alpha}}{n} \right| = \frac{|1 - e^{2\pi i m n \alpha}|}{n |1 - e^{2\pi i m \alpha}|} \\ &\leq \frac{2}{n |1 - e^{2\pi i m \alpha}|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Satz 4.8** (von Weyl). Sei  $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , dann ist die Folge  $(n\xi)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichverteilt modulo 1.



*Beweis.* Es wird das Kriterium von Satz 4.4 benutzt. Die  $\Delta$ -Bedingung wird nach Lemma 4.7 von  $r_\xi$  erfüllt. Sei  $f$  eine Riemann-integrierbare Abbildung und seien  $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon$  zwei stückweise konstante Abbildungen mit  $|\int f_1^\varepsilon(x) dx - \int f_2^\varepsilon(x) dx| < \varepsilon$ , sodass

$$f_1^\varepsilon \leq f \leq f_2^\varepsilon$$

gilt. Es gibt nun  $g_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon$  stetig, sodass

$$g_1^\varepsilon \leq f_1^\varepsilon \leq f \leq f_2^\varepsilon \leq g_2^\varepsilon$$

und  $|\int g_1^\varepsilon(x) dx - \int g_2^\varepsilon(x) dx| < \varepsilon$  gilt. Es gilt jetzt für alle  $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sum_{k=0}^n g_1^\varepsilon \circ r_\xi^k(x)}{n} \leq \frac{\sum_{k=0}^n f \circ r_\xi^k(x)}{n} \leq \frac{\sum_{k=0}^n g_2^\varepsilon \circ r_\xi^k(x)}{n}$$

und somit zusammen mit der  $\Delta$ -Bedingung für  $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \int g_1^\varepsilon(x) dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n f \circ r_\xi^k(x)}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n f \circ r_\xi^k(x)}{n} \\ &\leq \int g_2^\varepsilon(x) dx. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

### 4.3 ERGODIZITÄT UND ORBITTYPEN

Nach der vollständigen Klassifizierung in Kapitel 2 und der Einführung in die Ergodentheorie kann nun betrachtet werden, in welchen Fällen ergodische Maße auf Orbits existieren. Dies wurde unter anderem in [KH95] betrachtet. Es wird außerdem gezeigt, dass die irrationale Rotation eindeutig ergodisch ist, was ebenfalls nach [KH95] geschieht.

#### 4.3.1 Eindeutige Ergodizität

**Satz 4.9.** Sei  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, T)$  ein dynamisches System, welches der  $\Delta$ -Bedingung genügt. Dann ist  $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P}, T)$  eindeutig ergodisch.

*Beweis.* Nach Lemma 4.6 konvergiert der Zeitmittelwert (4.2) für jede stetige Funktion  $g \in C(S^1)$  gleichmäßig gegen eine Konstante  $g_0$ . Ist nun  $\mathbb{P}$  ein  $T$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß, dann folgt  $\int g_0 d\mathbb{P} = \int g d\mathbb{P}$  und somit ist  $\mathbb{P}$  eindeutig.  $\square$

**Korollar 4.10.** Für  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ist das dynamische System  $(S^1, \mathcal{B}(S^1), \lambda, r_\alpha)$  eindeutig ergodisch.

*Beweis.* Nach Lemma 4.7 genügt die irrationale Rotation der  $\Delta$ -Bedingung und ist somit nach Satz 4.9 eindeutig ergodisch.  $\square$

4.3.2 Rationale Rotationszahl

Es wird zu Beginn dieses Abschnitts gezeigt, dass die rationale Rotation nicht ergodisch ist.

**Satz 4.11.** Für  $\alpha \in \mathbb{Q}$  ist das dynamische System  $(S^1, \mathcal{B}(S^1), \mathbb{P}, r_\alpha)$  nicht ergodisch.

*Beweis.* Sei  $\alpha = p/q$  mit  $p, q$  teilerfremd. Dann ist die Menge

$$\bigcup_{j=0}^{q-1} \left[ \frac{j}{q}, \frac{j}{q} + \varepsilon \right]$$

$r_\alpha$ -invariant mit Maß  $\varepsilon q$ . □

**Satz 4.12.** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus mit rationaler Rotationszahl. Dann ist jedes ergodische und invariante Maß ein gleichmäßiges Dirac-Maß auf einem periodischen Orbit.

*Beweis.* Wir zeigen den Fall  $\tau(f) = 0$ . Es sei  $\mu$   $f$ -invariant und  $\text{Fix}(f)$  die Menge der Fixpunkte von  $f$ . Dann gilt  $\mu(S^1 \setminus \text{Fix}(f)) = 0$  oder für  $a, b \in \text{Fix}(f)$  mit  $(a, b) \in S^1 \setminus \text{Fix}(f)$

$$\mu \left( a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right) = 0$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , denn: Angenommen, es gelte  $\mu(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}) > 0$ . Nach der Klassifizierung der Orbittypen im rationalen Fall 2.2 existiert ein  $m_n^{(1)}$ , sodass

$$f(a + \frac{1}{n}) > b - \frac{1}{n}$$

gilt. Es gibt ebenso ein  $m_n^{(2)}$ , sodass

$$f^{m_n^{(2)}}(f^{m_n^{(1)}}(a + \frac{1}{n})) > f^{m_n^{(1)}}(b - \frac{1}{n})$$

gilt. Es folgt mit der  $f$ -Invarianz von  $\mu$

$$\sum_{k=0}^m \mu(f^{m_n^{(k)}}(a + \frac{1}{n}), f^{m_n^{(k)}}(b - \frac{1}{n})) \rightarrow +\infty$$

für  $m \rightarrow \infty$ , was ein Widerspruch ist. Es gilt somit  $\mu(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}) = 0$  und die Aussage ist gezeigt.

Es sei nun  $\mu$  ergodisch. Sei ohne Einschränkung  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$ . Für alle  $x \in \text{Fix}(f)$  ist das Intervall  $[0, x]$   $f$ -invariant. Sei  $a : \text{Fix}(f) \rightarrow \{0, 1\}$  mit  $a(x) = \mu([0, x])$ , dann ist  $a$  monoton. Sei  $x_0 := \inf\{x \in \text{Fix}(f) \mid a(x) = 1\}$ . Es wird behauptet, dass  $\mu$   $\sigma$ -additiv ist. Dann folgt  $\mu([0, x_0]) = 1$ . Für  $x_0 = 0$  ist die Behauptung gezeigt. Für  $x_0 > 0$  folgt  $\mu([0, x_0]) = 0$ . Es wird dafür eine Fallunterscheidung getroffen:

1. Es gibt ein  $x_1 \in \text{Fix}(f)$  mit  $(x_1, x_0) \cap \text{Fix}(f) = \emptyset$  und somit

$$\mu((x_0, x_1)) + \mu([0, x_0]) = \mu([0, x_1]),$$

also  $\mu((x_1, x_0)) \subseteq \mu([0, x_0])$ .

2. Sei  $x_n \in \text{Fix}(f)$  mit  $x_n \nearrow x_0$ . Dann gilt

$$\mu([0, x_0]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu([0, x_n]) = 0.$$

□

**Bemerkung.** Das Maß  $\mu$  kann auf  $(S^1, \mathcal{B}(S^1))$  auf dem periodischen Orbit  $\Omega$  durch

$$\mu(A) := \frac{\sum_{\omega \in \Omega} \delta_\omega(A)}{|\Omega|}$$

angegeben werden.

#### 4.3.3 Irrationale Rotationszahl

**Satz 4.13.** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  ein orientierungstreuer Homöomorphismus mit irrationaler Rotationszahl. Dann ist das zugehörige dynamische System eindeutig ergodisch.

*Beweis.* Wie in dem Satz von Poincaré 2.8 wird eine Unterscheidung für den Fall transitiv und nicht-transitiv getroffen.

1. Sei  $f$  transitiv. Nach Satz 4.10 ist die irrationale Rotation eindeutig ergodisch. Außerdem ist die eindeutige Ergodizität invariant unter topologischer Konjugation und mit der Poincaré-Klassifizierung 2.8 folgt somit, dass ein transitiver Homöomorphismus  $f : S^1 \rightarrow S^1$  eindeutig ergodisch ist.
2. Sei  $f$  nicht-transitiv mit irrationaler Rotationszahl  $\tau(f)$ . Im nicht-transitiven Fall sind die Bilder der Intervalle in  $S^1 \setminus \omega(x)$  unter  $f$  disjunkt. Somit müssen diese Intervalle bei jedem  $f$ -invarianten Maß  $\mu$  von Maß 0 sein, also  $\mu(S^1 \setminus \omega(x)) = 0$ . Nach dem Beweis von Satz 2.8 ist die Semikonjugation von  $f$  und  $r_{\tau(f)}$  bijektiv auf  $\omega(x) \setminus D$ , wobei  $D$  eine abzählbare Menge ist. Die Orbits von  $f$  haben außerdem keine periodischen Punkte und somit ist jedes  $f$ -invariante Maß nicht-atomisch, das heißt also  $\mu(D) = 0$ . Angenommen, es gäbe nun zwei  $f$ -invariante Maße. Dann gäbe es eine Menge  $A \subseteq \omega(x)$ , auf der sich die Maße unterscheiden würden. Dies ist aber nicht möglich, da die Maße unter der Semikonjugation zu zwei unterschiedlichen invarianten Maßen von  $r_{\tau(f)}$  fortgesetzt werden würden, was ein Widerspruch ist. Somit ist die Ergodizität des Maßes eindeutig.

□

## 4.4 BENFORD'S LAW

Es kann der Satz von Weyl 4.8 für den Beweis, dass die ersten Ziffern der Folgenglieder von  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  dem Gesetz von Benford genügen, genutzt werden. Dies wurde 1938 von Benford [Ben38] wie folgt beschrieben. Es wird zuerst das Gesetz von Benford eingeführt.

**Definition 4.14** (Benford's Law). Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $z_n \in \{1, \dots, 9\}$  die erste Ziffer des  $n$ -ten Folgenglieds. Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  genügt dem Gesetz von Benford, wenn für die Verteilung der Ziffern  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\frac{\#\{z_n \mid z_n = d\}}{n} = \log_{10} \left( \frac{d+1}{d} \right)$$

gilt.

Es wird nun nach [MM50] ein Resultat bewiesen, welches dann genutzt werden kann, um die gewünschte Eigenschaft der Folge  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  nachzuweisen. Dazu wird folgender Satz bewiesen, aus welchem dann als Lemma die Behauptung für  $2^n$  folgt.

**Satz 4.15.** Sei  $a \in \mathbb{N}$ , sodass für kein  $q \in \mathbb{N}$   $10^q = a$  gilt. Dann genügt die Folge  $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  dem Gesetz von Benford.

**Bemerkung.** Es gilt dann  $10^q \neq a$  für alle  $q \in \mathbb{N}$ , wenn  $\log_{10} a \notin \mathbb{Q}$  gilt.

*Beweis.* Offenbar muss die Mantisse von  $\log_{10} a^n$  zwischen den Mantissen von  $k$  und  $k+1$  liegen, damit die ersten Ziffern von  $a^n$  der Ziffer  $k$  entsprechen können. Es muss also

$$\log_{10} k \leq (n \log_{10} a) < (\log_{10}(k+1)) \quad (4.3)$$

gelten. Es folgt aus dem Satz von Weyl 4.8, dass  $n \log_{10} a$  gleichmäßig in  $(0, 1)$  verteilt ist. Wegen der Ungleichung 4.3 muss  $n \log_{10} a$  in einem Unterintervall der Länge

$$\log_{10}(k+1) - \log_{10} k = \log_{10} \left( \frac{k+1}{k} \right)$$

liegen und die Behauptung ist gezeigt.  $\square$

**Korollar 4.16.** Die Folge  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  genügt dem Gesetz von Benford.

*Beweis.* Dies ist offensichtlich ein Spezialfall von Satz 4.15.  $\square$

## 4.4.1 Anwendung des Gesetzes von Benford

Wie in [Ben38] beschrieben, gibt es eine große Anzahl an Datensätzen, welche dem Gesetz von Benford genügen. Benford nennt in seinem Paper von 1938 als Beispiele den Grad der Abnutzung von Seiten in Tabellenbüchern, die Oberfläche von Flüssen, Bevölkerungsdichte, physikalische Konstanten und weitere Datensätze. Insgesamt wurden

von Benford etwa 20.000 Daten auf das Gesetz untersucht.

Es stellt sich heraus, dass die Eigenschaft, dem Gesetz von Benford zu genügen, oft von Datensätzen erfüllt wird. So oft tatsächlich, dass diese Eigenschaft für Prüfungen der Echtheit von Datensätzen genutzt werden kann. Genügt ein Datensatz nicht dem Gesetz von Benford, so kann dies ein Hinweis dafür sein, dass der Datensatz manipuliert oder künstlich erzeugt wurde. Dieser Ansatz wurde von Nigrin 1996 untersucht.

In [Nig96] wird beschrieben, wie Datensätze von Steuererklärungen auf Echtheit untersucht werden können. Da das Gesetz von Benford nicht unbedingt der menschlichen Intuition über die Verteilung der ersten Ziffer in einem Datensatz entspricht, wird diese Eigenschaft oft bei Manipulations- oder Fabrikationsprozessen bei einem Datensatz übersehen. Wird also etwa bei solch einem Prozess angenommen, dass die Verteilung gleichverteilt sei, so genügt der Datensatz nicht mehr dem Gesetz von Benford, was ein Warnsignal für den Steuerprüfer sein kann. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass eine Prüfung nach Benford deutlich weniger aufwändig ist, als einzelne Daten des Datensatzes direkt auf Echtheit zu überprüfen. Im folgenden Abschnitt wird dies anhand eines eigenen Datensatzes durchgeführt. Außerdem wird gezeigt, dass ein beliebiger, mit einem Computer zufällig generierter Datensatz nicht dem Gesetz von Benford genügt.

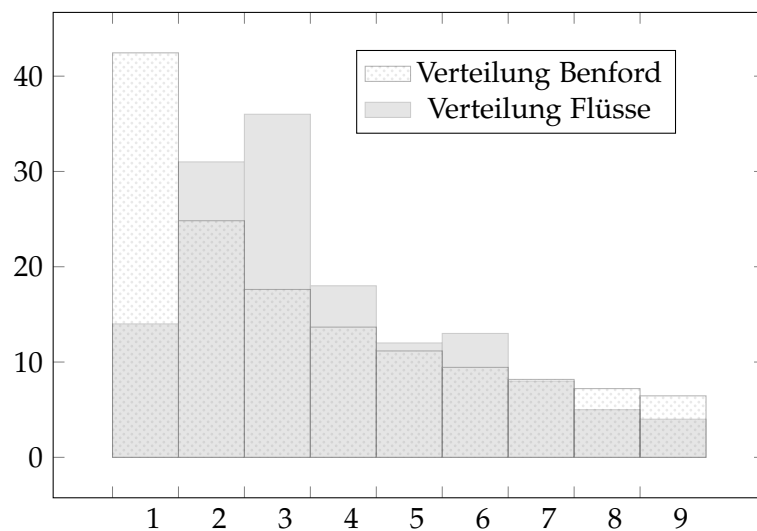


Abbildung 4.1: Verteilung der ersten Ziffer bei der Länge Flüssen in Nordamerika, aus Datensatz *rivers* von R

Ein ursprüngliches Beispiel Benfords war die Verteilung der ersten Ziffer in einem Datensatz über die Länge von Flüssen. Diese Behauptung wurde an dieser Stelle überprüft mit dem Datensatz *rivers* von R, in welchem die Länge von 141 Flüssen aufgeführt wird. Die zugehörige Verteilung der ersten Ziffer ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Ebenfalls

abgebildet ist die logarithmische Verteilung des Gesetz von Benford.

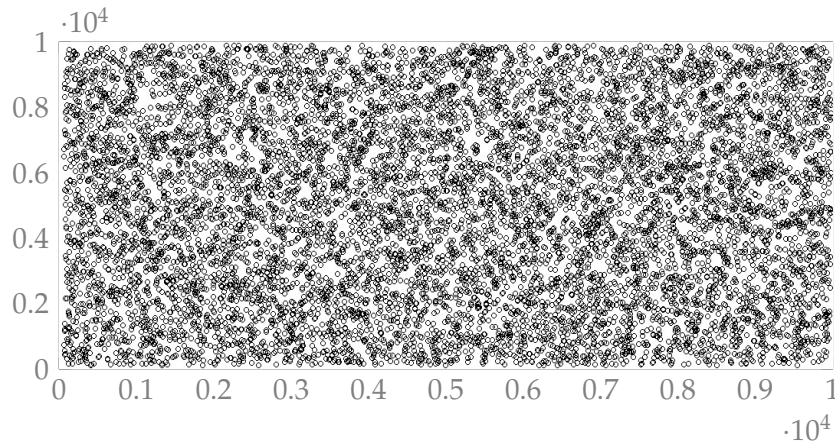


Abbildung 4.2: 10.000 gleichverteilte Zahlen aus  $\{0, \dots, 10000\}$

Andererseits kann ein künstlich erzeugter Datensatz betrachtet werden. Dazu wurde der Zufallsgenerator der Programmiersprache R genutzt, um 10.000 Zahlen zwischen 0 und 10.000 zu erzeugen. Der Code zu den Berechnung befindet sich in Anhang A.4.

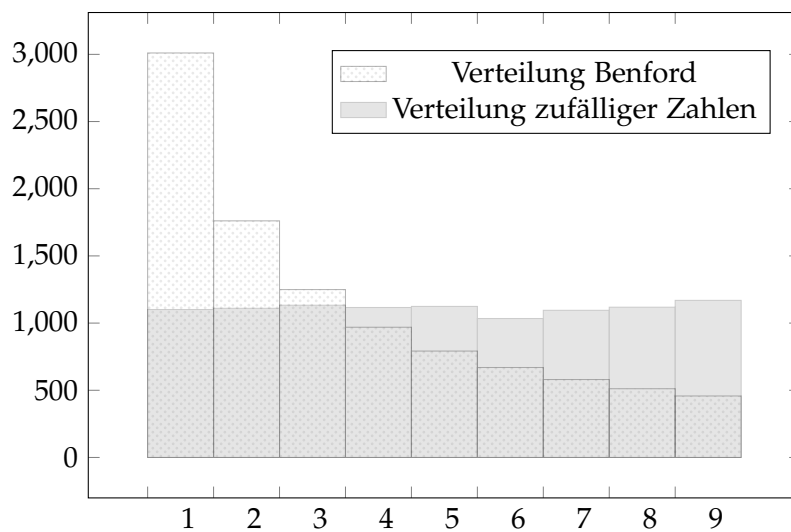


Abbildung 4.3: Verteilung der ersten Ziffer der Zahlen aus Abbildung 4.2

Offenbar genügen diese Zahlen also nicht dem Gesetz von Benford. Es ist somit anzunehmen, dass ein Datensatz, bei dem künstlich gleichverteilt erzeugte Zahlen hinzugefügt wurden, ebenfalls nicht einem Test auf das Gesetz von Benford standhält.



## ARNOLDZUNGEN - DIE ROTATIONSZAHL ALS FUNKTION

---

Dieses Kapitel behandelt eine bestimmte Klasse von Kreishomöomorphismen, welche von zwei Parametern abhängen. Diese Abhängigkeit wird im Zusammenhang mit der Rotationszahl untersucht. Es werden Abbildungen der Form

$$x \mapsto x + a + \frac{\varepsilon}{2\pi} \cos(2\pi x)$$

mit  $a, \varepsilon \in [0, 1]$  betrachtet. Es stellt sich unter anderem heraus, dass auch für irrationale Werte von  $a$  eine rationale Rotationszahl angenommen werden kann. Tupel  $(a, \varepsilon)$  mit dieser Eigenschaft sind von besonderem Interesse und werden als *Arnoldzungen* bezeichnet. Im folgenden wird untersucht, wie Arnoldzungen berechnet werden und der Zusammenhang der Größe der Zunge und des *Farey Trees* betrachtet. Des Weiteren eignet sich diese Klasse von Funktionen zur Modellierung von Vorgängen in der Natur, etwa dem Zusammenhang von Atem- und Herzschlagfrequenz.

### 5.1 DIE ROTATIONSZAHL ALS FUNKTION

Ein einfaches Beispiel für einen Kreishomöomorphismus ist die in 1.1 eingeführte Rotation  $x \mapsto x + a \pmod{1}$  mit  $a \in [0, 1]$ . Das zugehörige dynamische System kann nun etwa zur Modellierung einer drehenden Kreisscheibe genutzt werden. Dies kann noch etwas komplexer gemacht werden: Befestigt man zwischen dem Antrieb und der Scheibe eine Feder, so erhält man eine Drehung, welche positionsabhängig beschleunigt und abbremst. Dies kann durch

$$\rho_{a,\varepsilon} : S^1 \rightarrow S^1, \quad x \mapsto x + a + \frac{\varepsilon}{2\pi} \cos(2\pi x)$$

modelliert werden mit einem weiteren Parameter  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Es wird nun die Abbildung  $\rho_{a,\varepsilon}$  in Abhängigkeit von  $(a, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, 1]$  betrachtet. Die Rotationszahl wird dann als Funktion abhängig von  $a$  und  $\varepsilon$  definiert:

$$\tau : \{\rho_{a,\varepsilon} \mid a, \varepsilon \in [0, 1] \times [0, 1]\} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad \rho_{a,\varepsilon} \mapsto \tau(\rho_{a,\varepsilon})$$

Es wird abgekürzt  $\tau(a, \varepsilon) := \tau(\rho_{a,\varepsilon})$  geschrieben. Die Abbildung  $\tau$  ist nach Satz 1.17 auf der  $C^0$  Topologie stetig, falls  $\rho_{a,\varepsilon}$  homöomorph ist. Es wird somit nur  $|\varepsilon| \leq 1$  betrachtet, da die Abbildung  $\rho_{a,\varepsilon}$  für  $|\varepsilon| > 1$  nicht mehr injektiv ist und somit  $\rho_{a,\varepsilon}$  kein Homöomorphismus.



Es stellt sich die Frage, wie sich Änderungen von  $\varepsilon$  auf  $\tau(a, \varepsilon)$  auswirken, insbesondere, ob irrationale Werte für  $a$  trotzdem zu einer rationalen Rotationszahl führen können. Dies wird auch als *Mode-Locking* bezeichnet.

## 5.2 ARNOLDZUNGEN

Um besser über Regionen in  $[0, 1] \times [0, 1]$  sprechen zu können, für die  $\tau(a, \varepsilon)$  rational und konstant ist, wird folgende Definition eingeführt. Diese wird in [Arnog] beschrieben. In Abbildung 5.2 sind diese außerdem von Arnold für bestimmte rationalen Zahlen berechnet worden.

**Definition 5.1** (Arnoldzunge). Sei  $\tau(a, \varepsilon)$  wie oben und  $\mu \in \mathbb{Q}$ . Dann bezeichnet die Menge

$$\mathcal{A}_\mu := \{(a, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \tau(a, \varepsilon) = \mu\}$$

die Arnoldzunge von  $\mu$ .

Es wird nun betrachtet, wie die Mengen  $\mathcal{A}_\mu$  berechnet werden können.

### 5.2.1 Nullmengen für rationales $\mu$

Für Punkte der Menge  $\mathcal{A}_0$  gibt es offenbar  $x \in S^1$  und  $(a, \varepsilon)$ , sodass  $x$  ein Fixpunkt von  $\rho_{a, \varepsilon}$  ist. Für ein solches  $x$  gilt demnach für bestimmte  $a, \varepsilon \in [0, 1] \times [0, 1]$  die Gleichung

$$x = x + a + \frac{\varepsilon}{2\pi} \cos(2\pi x) \Leftrightarrow 0 = a + \frac{\varepsilon}{2\pi} \underbrace{\cos(2\pi x)}_{\in [-1, 1]}, \quad (5.1)$$

das heißt, wenn  $|a| \leq |(2\pi)^{-1}\varepsilon|$  gilt [Her77].

Analog können Wertepaare für beliebige rationale Rotationszahl gefunden werden. Es wird hierfür die Aussage von Satz 1.19 benutzt, dass  $\tau(f) = p/q$  dazu äquivalent ist, dass es periodische Punkte mit Periode  $q$  gibt. Es gibt somit ein  $x \in S^1$ , sodass  $f^q(x) = x$  gilt. Die Bedingungen für  $(a, \varepsilon)$  können also durch Umformen der Gleichung

$$x = \rho_{a, \varepsilon}^q(x)$$

für ein  $x$  in dem periodischen Orbit gefunden werden.

Aufgrund der Stetigkeit von  $\tau$  nach Satz 1.17 konvergiert  $\tau(a, \varepsilon)$  außerdem gegen  $a$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Insbesondere ist  $\rho_{a, 0} = r_a$  und somit scheidet die Arnoldzunge von  $\mathcal{A}_\mu$  die  $a$ -Achse bei  $\mu$ .

5.3 BERECHNUNG DER ROTATIONSZAHL

In [Arn09] wird außerdem das Newton-Verfahren benutzt, um Lösungen der Gleichungen der Form  $x = \rho_{a,\varepsilon}^q(x)$  besser approximieren zu können. Da man durch diese Approximation unweigerlich Genauigkeit verliert, stellt sich die Frage, ob man die  $\tau(a, \varepsilon)$ -Werte nicht direkt approximieren kann. Dies bietet sich an, da die Rotationszahl ohnehin über einen Grenzwert definiert ist. Im folgenden Abschnitt werden zu diesem Zweck zwei verschiedene Herangehensweisen verglichen.

Für beliebiges  $\mu \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  kann die Menge  $\mathcal{A}_\mu$  über die Nullstellen der Funktion  $\tau(a, \varepsilon) - \mu$  mit dem Newton-Verfahren berechnet werden. Dies wird zuerst untersucht.

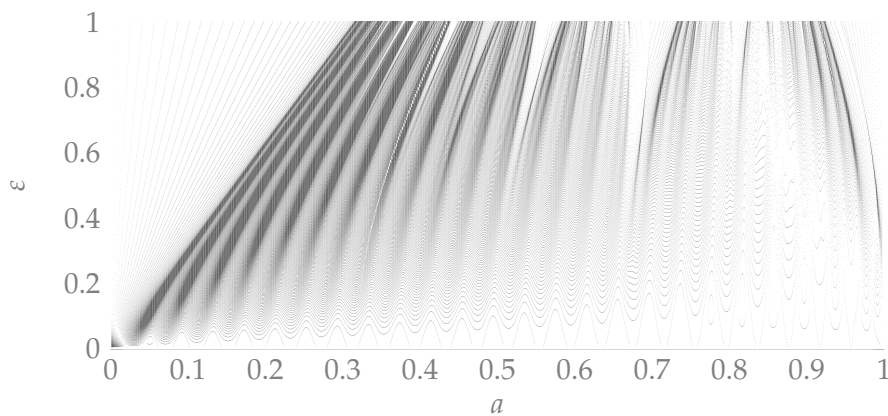


Abbildung 5.1: Arnoldzunge von Code A.2, berechnet durch Anwendung des Newton-Verfahrens auf  $\tau(a, \varepsilon) - \mu$

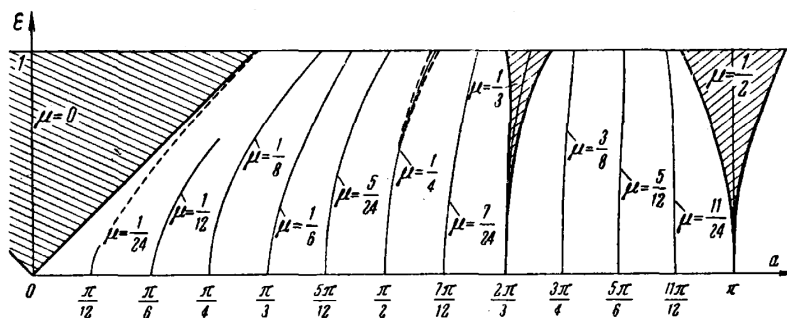


Abbildung 5.2: Arnoldzunge von [Arn09, S. 212], Arnold berechnet  $\mu$  mit einem Faktor von  $\pi$

Die Abbildung 5.1 wurde in R mit folgender Methode berechnet. Die Achse der  $a$ -Werte wird durch die Menge

$$A := [0, \pi] \cap (\mathbb{N} \cdot 0.001)$$

diskretisiert und dann werden für ein festes  $a \in A$  für  $\rho \in [0, 1] \cap (\mathbb{N} \cdot 0.001)$  die Nullstellen der Abbildung  $\tau(a, \cdot) - \rho$  gesucht. Zur Realisierung der Abbildung  $\tau(a, \varepsilon)$  wird

$$\tau(a, \varepsilon) := \tau(\rho_{a, \varepsilon}) \approx \frac{\rho_{a, \varepsilon}^{50}(0)}{50}$$

approximiert. Da die meisten numerischen Verfahren für Nullstellen nur eine Nullstelle finden können, wurde die Menge der  $\varepsilon$ -Werte auf zehn Intervalle aufgeteilt. Auf diese Intervalle wurde dann die R-Base Funktion `uniroot` angewendet.

Es wird also für 1001  $\mu$ -Werte in 3142 Schritten von  $a$ -Werten auf jeweils zehn Intervallen nach einer Nullstelle gesucht. Somit ergeben sich 31.451.420 Fälle, in denen nach einer Nullstelle einer 50-fach iterierten Funktion gesucht wird. Mit einem Computer mit 4-Kern CPU zu je 1.90GHz hat dies zu einer Rechnendauer von etwa 10h geführt. Der R-Code für die Abbildung 5.1 ist im Anhang A.

### 5.3.1 Berechnung der Arnoldzungen über direkte Approximation

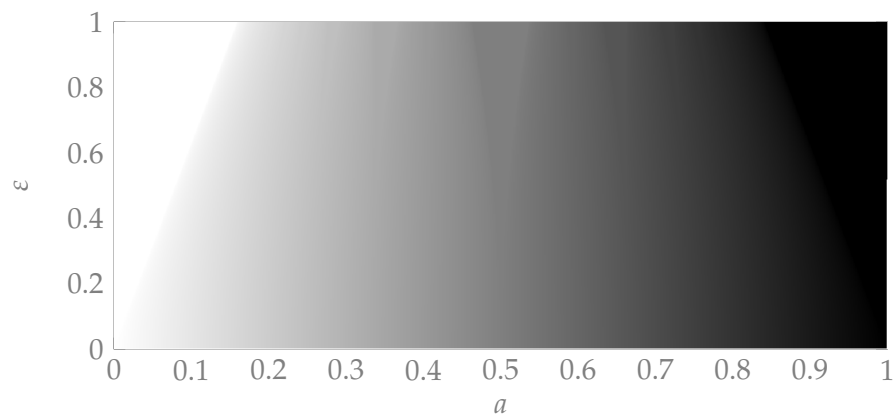


Abbildung 5.3: Approximation der Rotationszahl mit Code A.3, weiße Flächen entsprechen  $\tau(a, \varepsilon) = 0$  und schwarze  $\tau(a, \varepsilon) = 1$

Die Menge  $[0, 1] \times [0, 1]$  kann mit einer Schrittweite  $h$  diskretisiert werden. Für  $h = 0.001$  ergibt sich eine  $1001 \times 1001$ -Matrix, welche die  $(a, \varepsilon)$ -Wertepaare in dem diskretisierten  $[0, 1] \times [0, 1]$ -Gitter enthält. Es wird dann für alle Tupel  $(a, \varepsilon)$  der Wert von

$$\tau(a, \varepsilon) \approx \frac{\rho_{a, \varepsilon}^{1000}(0)}{1000}$$

approximiert und an dem korrespondierendem Platz der  $1001 \times 1001$ -Matrix gespeichert. Die so berechnete Matrix kann nun als Pixel-Karte interpretiert werden, sodass die Höhe eines Wertes durch eine Farbton repräsentiert wird. Dies wird in Abbildung 5.3 gezeigt.

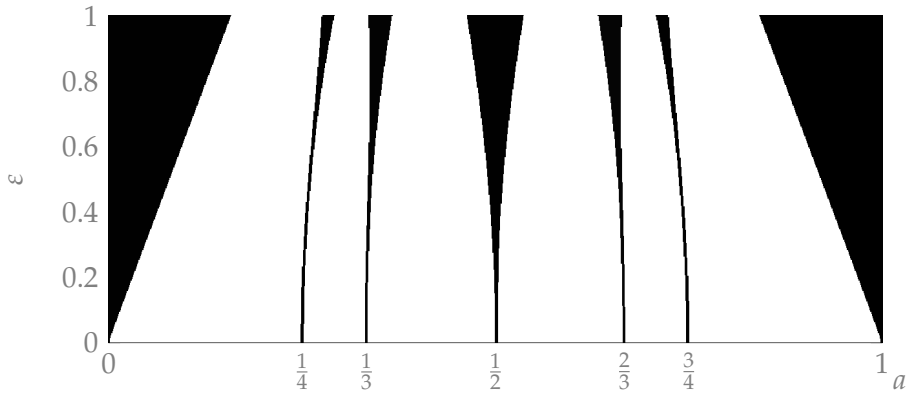


Abbildung 5.4: Arnoldzungen für  $\mu \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1\}$

Des Weiteren wurden in Abbildung 5.4 die Arnoldzungen für  $\mu \in \{0, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1\}$  extrahiert. Diese Methode hat offenbar den Vorteil, dass die Rotationszahl deutlich genauer und schneller berechnet werden kann. Die Rechenzeit beträgt bei diesem Verfahren etwa zehn Minuten.

### 5.3.2 Eigenschaften der Arnoldzungen

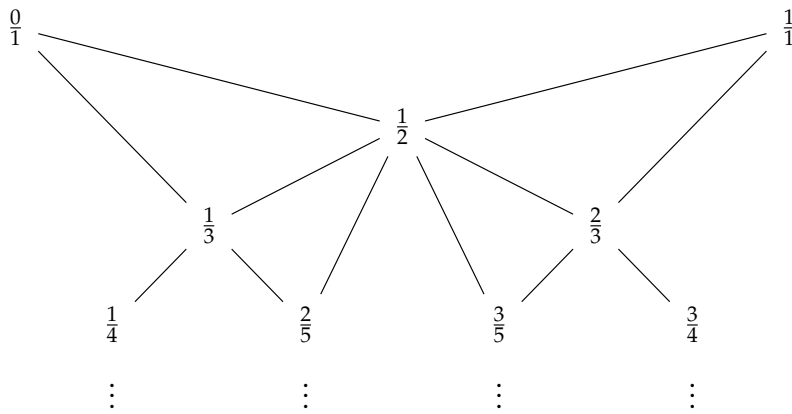


Abbildung 5.5: Farey Tree der größten neun Arnoldzungen

Man erkennt in den numerischen Berechnungen der Abbildungen 5.1, 5.2 und 5.4, dass die Arnoldzungen für die Werte  $0, \frac{1}{2}, 1$  besonders groß sind. Es gibt einen starken Zusammenhang zwischen der Größe des Nenners und der Größe der zugehörigen Arnoldzunge. Dieses Phänomen wird in [Ras90] und [SJo5] beschrieben. Die Größe der Arnoldzungen hängt mit der Hierarchie der Brüche im Farey Tree zusammen, welcher in Abbildung 5.5 zu sehen ist. In dem Farey Tree werden alle rationalen Zahlen aus dem Intervall  $[0, 1]$  in einem

Graphen so angeordnet, dass für zwei Knoten  $p/q, p'/q' \in \mathbb{Q}$  der Knoten von

$$p/q \oplus p'/q' = (p + p')/(q + q')$$

immer dazwischen liegt. Diese stellt die rationale Zahl mit dem größten Nenner im Intervall  $[p/q, p'/q']$  dar.

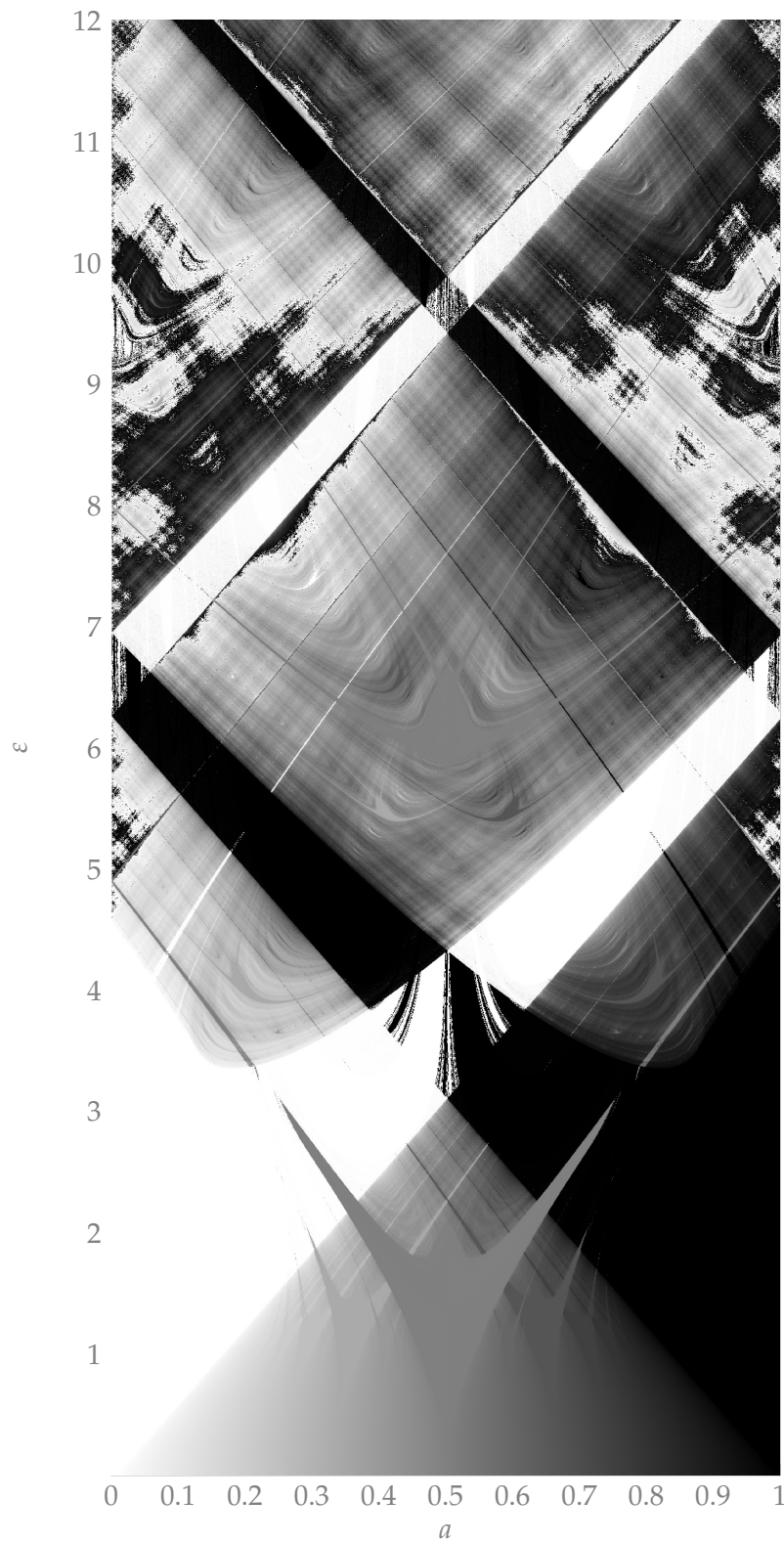
### 5.3.3 Auftreten von Arnoldzungen in der Natur

Im Allgemeinen können Kreishomöomorphismen eine Vielzahl an Ereignissen in der Natur modellieren. Einleitend wurde der schwach gekoppelte Oszillator beschrieben. Was alle Modelle eint, ist ein wieder auftretendes, gedämpftes Verhalten. So kann ein solches Modell etwa periodische Vorgänge wie Atmen oder den Herzschlag beschreiben.

In [MHGL04] wird dies untersucht: Dort wird der Zusammenhang zwischen Herzschlag und Atemrhythmus betrachtet, bei dem für bestimmte Frequenzen eine Kopplung stattfindet, also Mode Locking. Dieses Mode Locking findet für Wertepaare aus den Arnoldzungen statt. Bei Patienten in Vollnarkose ist etwa Mode Locking mit einer Koppelung von drei Herzschlägen für einen Atemzug aufgetreten. Es werden darüber hinaus zwei verschiedene Modelle betrachtet: Zum einen das RSA (respiratory sinus arrhythmia) Modell, bei dem davon ausgegangen wird, dass die Atemfrequenz die Herzfrequenz bedingt, und zum anderen das CVC (cardioventilatory coupling) Modell, bei dem die Abhängigkeit umgedreht ist. Das Paper kommt zu dem Schluss, dass CVC der dominanter Mechanismus ist [MHGL04, S. 1].

## 5.4 AUSBLICK AUF CHAOSTHEORIE

Löst man sich von der Injektivität der Abbildung  $\rho_{a,\varepsilon}$  und lässt  $\varepsilon$ -Werte größer als 1 zu, so ergibt sich etwa mit  $\varepsilon \in [0, 12]$  folgendes Bild in Abbildung 5.6. Die Berechnung ist analog zu der von Abbildung 5.3 erfolgt, allerdings wurde der Definitionsbereich von  $e\_val$  auf 12 erhöht.

Abbildung 5.6: Arnoldzungen für  $\varepsilon \in [0, 12]$





## ANHANG

---

### A.1 CODE VON ABBILDUNG 2.1

```
f <- function(x) x + 1/2 + 1/(10*pi)*sin(2*pi*x)

inv <- function (f, lower = -1, upper = 1) {
  function (y) uniroot((function (x) f(x) - y),
    lower = lower, upper = upper)[1]
}

orbit <- function(x, n) {
  y <- x
  out <- c()
  for(i in 1:n) {
    y <- f(y) %% 1
    out <- c(out, y)
  }
  out
}

orbit_inv <- function(x, n) {
  y <- x
  out <- c()
  for(i in 1:n) {
    y <- inv(f)(y)$root %% 1
    out <- c(out, y)
  }
  out
}

nonper2 <- orbit_inv(0.3,400)
nonper <- orbit(0.3, 400)
out <- c(nonper2[length(nonper2):1], 0.3, nonper)
out <- round(out, digits = 6)

write.csv(data.frame(y = out, x = -length(nonper):length(nonper)),
  file = "data.csv", quote = FALSE, row.names = FALSE)
```

### A.2 CODE VON ABBILDUNG 5.1

```
# Definiere die Hochhebung von T_a,e
f_lift <- function(x,a,e) x + a + e*cos(x)
```



```

# Approximation an die Rotationszahl von  $T_{a,e}$  mit  $n$  Schritten
tau <- function(a, e, n) {
  x <- 0
  for(i in 1:n) {x <- f_lift(x, a, e)}
  x <- x/n
  x %% 1
}

# Finde die Nullstelle von der Abbildung  $\tau(T_{a,e}) - \mu$ 
tau_zero <- function(a, n, mu) {
  out <- c(NA, NA)
  alt_tau <- function(x) {tau(a, x, n) - mu}
  for(i in 0:99){
    if(alt_tau(i/100)*alt_tau((i+1)/100) < 0) {
      zeros <- c(a,
        uniroot(alt_tau,interval = 0.01*c(i,i+1))$root)
      out <- rbind(out, zeros)
    }
  }
  return(out)
}

# Finde alle Nullstelle von  $\tau_{zero}$  fuer diskrete Werte von  $a$ 
zero_points <- function(mu, n) {
  out <- matrix(NA, ncol = 2)
  for(a in seq_along(a_axis)) {
    out <- rbind(out, tau_zero(a_axis[a], n, mu))
  }
  out[out[,2] == 0,] <- NA
  rbind(out,matrix(NA, ncol = 2))
}

mu_list = seq(0, 1, by = 0.001)
a_axis <- seq(0, pi, by = 0.001)

# Berechne Matrix der Nullstellen
plotter <- function(n, h = 0.001) {
  out <- matrix(NA, ncol = 2)
  a_axis <- seq(0, pi, by = h)
  for(i in mu_list) {
    out <- rbind(out, zero_points(i, n))
    print(i) # Rechenfortschritt in Prozent
  }
  return(out)
}

out100 <- plotter(50)

op <- par(mar = rep(0, 4))

plot(out100, type="p", xlim = c(0,pi), ylim = c(0,1),
cex=0.2)

```

```
dev.off()
```

### A.3 CODE VON ABBILDUNG 5.3

```
# Definiere die Hochhebung von  $T_{a,e}$ 
f_lift <- function(x,a,e) (x + a + e*sin(2*pi*x)/(2*pi))

# Definiere eine Approximation an die Rotationszahl von  $T_{a,e}$ 
tau <- function(a, e, n = 50) {
  x <- 0
  for(i in 1:n) {x <- f_lift(x, a , e)}
  x <- x/n
  x %% 1
}

h <- 0.001
a_val <- seq(0,1,by = h)
e_val <- seq(0,1,by = h)

out_cropped <- outer(a_val, e_val, function(a,e) {tau(a,e, n=1000)})

png("arnold2.png", width = 1200, height = 600, units = "px")
op <- par(mar = rep(0, 4))
image(out_cropped, col = grey(seq(1, 0.0, length = 5000)),
      axes = F, xaxs = "i", yaxs = "i")

dev.off()
```

### A.4 CODE FÜR DIE VERTEILUNG DER ERSTEN ZIFFER

```
library(stringr)
set.seed(0) #  $\tilde{A}_{\frac{1}{4}}^1$  Wiederholbarkeit

# Funktion gibt Vektor mit den ersten Ziffern zur  $\tilde{A}_{\frac{1}{4}}^1$ ck
getFirstDigit <- function(data) {
  data <- as.character(data)
  data <- str_sub(data, 1, 1)
  data <- as.integer(data)
}

fake_data <- floor(runif(10000,0,10000))
plot(fake_data, type="p")

data <- getFirstDigit(fake_data)

countDigits <- function(data) {
  out <- c()
  for(i in 1:9) {
    freq <- sum(data == i)
  }
}
```

```
        out <- c(out,freq)
      }
      c(out, 0)
    }

countDigits(data)

write.csv(data.frame(x = 1:10, y = countDigits(data)),
          file = "unidigits.csv", quote=F)
write.csv(data.frame(x = 1:10, y = c(log10(1+1/1:9),0)*10000),
          file = "benforddist.csv", quote=F)
write.csv(data.frame(x = 1:10,
                    y = c(countDigits(getFirstDigit(rivers))),
                    file = "river.csv", quote=F)
write.csv(data.frame(x = 1:10, y = c(log10(1+1/1:9),0)*141),
          file = "benforddistriver.csv", quote=F)

plot(runif(10000,0,10000))
```

## LITERATURVERZEICHNIS

---

- [AHK03] Ethan Akin, Mike Hurley, and Judy A. Kennedy. *Dynamics of topologically generic homeomorphisms*. Number AR-RAY(ox559fdafe37ao) in *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Soc., Providence, RI, 2003.
- [Arn09] Vladimir I Arnold. Small denominators. i. mapping of the circumference onto itself. *Collected Works: Representations of Functions, Celestial Mechanics and KAM Theory, 1957–1965*, pages 152–223, 2009.
- [Ben38] Frank Benford. The law of anomalous numbers. *Proc. Amer. Philosophical Soc.*, 78:551–572, 1938.
- [BS02] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [Her77] Michael Robert Herman. Mesure de lebesgue et nombre de rotation. In *Geometry and topology*, pages 271–293. Springer, 1977.
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1995.
- [Kle13] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*, volume 3. Springer, 2013.
- [MHGL04] Mark McGuinness, Young Hong, Duncan Galletly, and Peter Larsen. Arnold tongues in human cardiorespiratory systems. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 14(1):1–6, 2004.
- [Mil01] Milnor. Introductory dynamics lectures, Oktober 2001.
- [MM50] Nathaniel Macon and Leo Moser. On the distribution of first digits of powers. *Scripta Math*, 16:290–292, 1950.
- [Nig96] Mark J. Nigrini. A taxpayer compliance application of benford’s law. *The Journal of the American Taxation Association*, 18(1):72–91, 1996.
- [Ras90] S. N. Rasband. *Chaotic dynamics of nonlinear systems*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, New York [u.a.], 1990.

- [SJ05] Heinz Georg Schuster and Wolfram Just. *Deterministic chaos*. Wiley-VCH, Weinheim, 4., rev. and enl. ed. edition, 2005.
- [Wey16] Hermann Weyl. Über die gleichverteilung von zahlen mod. eins. *Mathematische Annalen*, 77(3):313–352, Sep 1916.

## ERKLÄRUNG ZUR AUTORSCHAFT

---

Hiermit bestätige ich, Johannes Wenzel, geb. 24.03.1997 in Hamburg, dass ich die vorliegende Arbeit selbst verfasst habe und nur die Literatur der Literaturangabe verwendet habe.

*Heidelberg, 22. August 2019,*

Johannes Wenzel \_\_\_\_\_