



MATHEMATISCHES INSTITUT

BACHELORARBEIT

im Studiengang 1-Fach-Bachelor Mathematik

zum Thema

Das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem

und Anwendungen auf Billards

Verfasst von:
Anna-Maria VOCKE

Betreuung durch:
Prof. Dr. Peter ALBERS

MÜNSTER, den 7. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Einleitung | 1 |
| 1 Das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem | 2 |
| 1.1 Überblick über das Theorem | 2 |
| 1.2 Hinführung zum Theorem | 3 |
| 1.3 Aussage des Theorems | 5 |
| 1.4 Beweis des Theorems | 7 |
| 1.5 Existenz des zweiten Fixpunktes | 17 |
| 1.5.1 Modifikation der Abbildung ϕ | 17 |
| 1.5.2 Theorem über die Existenz des zweiten Fixpunktes | 17 |
| 1.6 Unendlich viele periodische Orbits | 23 |
| 2 Das Billardkugelproblem | 26 |
| 2.1 Billardabbildung | 26 |
| 2.2 Anwendung des ersten Kapitels | 28 |
| 2.2.1 Geometrische Darstellung | 32 |
| Literaturverzeichnis | 33 |
| Plagiatserklärung der Studierenden | 34 |

Einleitung

Kurz vor seinem Tod im Jahre 1912, formulierte ein bedeutender französischer Mathematiker, Henri Poincaré, das sogenannte *Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem* oder auch *Poincarés letztes geometrisches Theorem*. Aus Zeitgründen gelang es Poincaré jedoch nicht, das Theorem im Allgemeinen, sondern lediglich in Spezialfällen, zu beweisen. Überraschenderweise wurde wenige Monate nach der Herausgabe des Theorems ein Beweis von George D. Birkhoff vorgestellt. In der vorliegenden Bachelorarbeit werden ebendieses Theorem und einige Anwendungen desselben auf die Theorie der Billards untersucht. Das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem befasst sich mit der Existenz von mindestens zwei Fixpunkten für einen sogenannten flächenerhaltenden Homöomorphismus auf einem Kreisring. Angewandt auf ein geometrisches Problem, genauer gesagt das Billardkugelproblem, liefert dieses Theorem die Existenz unendlich vieler unterschiedlicher periodischer Orbits auf einem strikt konvexen Billardtisch.

Um eine eingehende Auseinandersetzung mit dem Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem zu ermöglichen, soll dieses Theorem zu Beginn motiviert und die für dessen Statuierung nötigen Notationen eingeführt werden. Nachdem die genaue Aussage des Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorems dargelegt wurde, wird dessen Beweis, der den Großteil dieser Arbeit darstellt, präsentiert. Den Abschluss des ersten Kapitels bildet eine Aussage zur Existenz unendlich vieler periodischer Orbits im Inneren eines Kreisrings, auf welche im folgenden Abschnitt Bezug genommen wird.

Mit Hilfe der Erkenntnisse aus dem Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem wird im zweiten Kapitel dieser Arbeit das sogenannte Billardkugelproblem untersucht. Zu diesem Zweck wird zuerst eine Abbildung, die das Billardkugelproblem modelliert, parametrisiert, um damit unter Anwendung des Theorems über unendlich viele periodische Orbits die Existenz derer auf einem strikt konvexen Billardtisch zu zeigen. Bei dem Billardkugelproblem entsprechen Fixpunkte somit geschlossenen Billardbahnen, welche wir abschließend anschaulich interpretieren können.

Schlussendlich liefert diese Arbeit einen Beweis des Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorems und eine Einführung in die Theorie der Billards.

Kapitel 1

Das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem

In diesem Kapitel wollen wir das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem erklären und beweisen. Zunächst wird ein Überblick über dieses Fixpunkttheorem gegeben und im Anschluss daran eine Verfeinerung der Voraussetzungen dargelegt, um auf den darin eingeführten Notationen aufbauend, den Beweis des Theorems ausarbeiten zu können. Dazu werden wir den Beweis von Birkhoff ausführen.

Dabei bildet die Grundlage dieser Ausarbeitung [MZ05]. Des Weiteren wurden [Bir13] sowie [Poi12] und in einigen Bemerkungen zu diesem Theorem [MS98] verwendet.

1.1 Überblick über das Theorem

Im Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem werden ein Kreisring A mit innerem Rand a und äußerem Rand b

$$A := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq u^2 + v^2 \leq b\}$$

in der u, v -Ebene sowie ein Homöomorphismus ψ

$$\psi: A \rightarrow A$$

betrachtet. Dabei soll die Abbildung ψ die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

- (a) Die beiden Randkomponenten a und b bleiben erhalten, d.h. der innere Rand a sowie der äußere Rand b werden unter ψ jeweils auf sich selbst abgebildet.
- (b) Weiterhin gilt die „Twist-Bedingung“, welche besagt, dass die beiden Randkreise des Kreisrings A entgegengesetzt orientiert sein sollen.

(c) Zudem gilt für jede offene Menge $E \subset A$ im Kreisring A die Identität

$$\iint_E du \wedge dv = \iint_{\psi(E)} du \wedge dv.$$

Dann besagt das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem, dass ein solcher Homöomorphismus ψ mindestens zwei Fixpunkte im Inneren des Kreisrings A besitzt.

1.2 Hinführung zum Theorem

In diesem Abschnitt präzisieren wir die zu betrachtenden Voraussetzungen des Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorems. Dazu werden Polarkoordinaten $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ via $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow A$ vermöge

$$(x, y) \mapsto (u, v) = (\sqrt{y} \cos(x), \sqrt{y} \sin(x))$$

eingeführt. Dabei gilt $a \leq y = u^2 + v^2 \leq b$.

Behauptung. *Mit diesen Bezeichnungen folgt:*

$$du \wedge dv = \frac{1}{2}(dy \wedge dx).$$

Beweis. Dies ergibt sich direkt durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= d(\sqrt{y} \cos(x)) \wedge d(\sqrt{y} \sin(x)) \\ &= (-\sqrt{y} \cdot \sin(x) dx + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cos(x) dy) \\ &\quad \wedge (\sqrt{y} \cdot \cos(x) dx + \frac{1}{2\sqrt{y}} \sin(x) dy) \\ &= -\sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \sin^2(x)(dx \wedge dy) \\ &\quad + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \cos^2(x)(dy \wedge dx) \\ &= \frac{1}{2}(\sin^2(x) + \cos^2(x))(dy \wedge dx) \\ &= \frac{1}{2}(dy \wedge dx). \end{aligned} \quad \square$$

Infolgedessen bleibt also auch beim Übergang auf die Polarkoordinaten x, y das Lebesgue-Maß erhalten, d.h. es gilt die Gleichung

$$\iint_E du \wedge dv = \frac{1}{2} \iint_E dy \wedge dx.$$

Aus diesem Grund werden wir im Folgenden auf die x, y -Koordinatenbeschreibung übergehen. Dann entspricht der Kreisring A dem Streifen S

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b\},$$

wobei die Koordinaten u, v die x -Koordinate bis auf ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmen. Wir werden also eine Abbildung $\phi: S \rightarrow S$ betrachten, die durch die Abbildung ψ jedoch nicht eindeutig definiert ist. Aus der Betrachtung dieses kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & S \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{\psi} & A \end{array}$$

ergibt sich $p \circ \phi = \psi \circ p$. Somit handelt es sich bei der Abbildung ϕ um einen Homöomorphismus, den wir im Folgenden genauer untersuchen werden, auf dem Streifen S .

Dazu betrachten wir eine Translation $s: S \rightarrow S$ um 2π in x -Richtung

$$(x, y) \mapsto (x + 2\pi, y).$$

Offenbar gilt damit $p \circ s^n \circ \phi = \psi \circ p$, da $p \circ s = p$. Daraus wird ersichtlich, dass ein Fixpunkt von ϕ automatisch auch ein Fixpunkt von ψ ist, aber nicht umgekehrt.

In Polarkoordinaten gegeben schreiben wir die Abbildung $\phi: S \rightarrow S$ auf dem Streifen S nun als Tupel von zwei stetigen Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)).$$

Dabei haben die Punkte (x, y) und $s(x, y) = (x + 2\pi, y)$ die gleichen Bildpunkte im Kreisring A , d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi, y) &= f(x, y) + 2k\pi && \text{mit } k \in \mathbb{Z}, \\ g(x + 2\pi, y) &= g(x, y). \end{aligned}$$

Hierbei ist anzumerken, dass f an jedem Punkt im Kreisring A eindeutig bestimmt und somit in x periodisch mit Periode 2π ist. Da f eine stetige Funktion ist, ist die Differenz $f(x + 2\pi, y) - f(x, y) = 2k\pi$ entsprechend für alle $(x, y) \in S$ identisch. Demzufolge gilt:

$$\phi \circ s = s^k \circ \phi.$$

Analog zu obiger Konstruktion findet man zu der inversen Abbildung ϕ^{-1} eine Zahl $k' \in \mathbb{Z}$. Dann folgt aus $\phi \circ \phi^{-1} = id$, dass $k \cdot k' = 1$ und damit $k = \pm 1$ gilt. Im

Folgenden werden wir ohne Einschränkung annehmen, dass ϕ die Orientierung erhält, wodurch entsprechend $k = 1$ folgt. Somit resultiert

$$\phi \circ s = s \circ \phi.$$

Insgesamt ergeben sich die folgenden Voraussetzungen für das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem:

- (a) Die beiden äußeren Ränder bleiben unter ϕ erhalten, d.h.

$$g(x, a) = a, \quad g(x, b) = b.$$

- (b) Es gilt die „Twist-Bedingung“, d.h.

$$(f(x, a) - x)(f(x, b) - x) < 0.$$

- (c) Für jede offene Menge $E \subset A$ gilt die Identität

$$m(E) = \iint_E dx \wedge dy.$$

Wir definieren nun die Eigenschaft der Flächenerhaltung, um diese Bezeichnung im folgenden Abschnitt verwenden zu können.

Definition 1. Eine Abbildung ψ heißt **flächenerhaltend**, wenn die Orientierung und für jede offene Menge $E \subset A$ das Maß

$$m(E) = \iint_E dx \wedge dy$$

erhalten bleiben.

1.3 Aussage des Theorems

Nachdem wir einen Überblick über die Situation des Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorems erhalten haben, werden wir in diesem Abschnitt das Hauptresultat dieser Bachelorarbeit präsentieren. Dazu wird zunächst das Theorem statuiert und im Anschluss daran werden einige Bemerkungen zu der Wichtigkeit der Voraussetzungen gegeben.

Theorem 1. (*Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem*)

Sei $\phi: S \rightarrow S$ ein flächenerhaltender Homöomorphismus des Streifens S , der die in Abschnitt 1.2 genannten Voraussetzungen erfüllt. Dann besitzt die Abbildung ϕ mindestens zwei nicht-äquivalente Fixpunkte F_1, F_2 , d.h. es gilt

$$s^j(F_1) \neq F_2 \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung. Sowohl die „Twist-Bedingung“ als auch die Eigenschaft der Flächenerhaltung sind nötige Voraussetzungen für dieses Fixpunktttheorem. Dies wird ersichtlich anhand folgender Beispiele:

1. Die Translation

$$\phi(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, y\right)$$

ist eine flächenerhaltende Abbildung, welche die „Twist-Bedingung“ verletzt.

Beweis. Wir betrachten dazu:

(a) Es gilt für das Differential der Translation ϕ

$$D\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also sind $D\phi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $D\phi(x, y) \frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Damit ergeben sich

$$\phi^*(dx \wedge dy) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0 = \phi^*(dx \wedge dy) \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

und

$$\phi^*(dx \wedge dy) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = (dx \wedge dy) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1.$$

Insgesamt folgt, dass ϕ eine flächenerhaltende Abbildung ist.

(b) Für die Translation $\phi(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}, y\right)$ ist

$$f(x, y) = x + \frac{1}{2}.$$

Also gilt

$$f(x, a) = x + \frac{1}{2} > x.$$

Daraus folgt, dass ϕ die „Twist-Bedingung“ verletzt.

Somit ist das Theorem 1 nicht anwendbar, jedoch besitzt diese Abbildung als Translation ohnehin keine Fixpunkte. \square

2. Die Abbildung

$$\psi(x, y) = \left(x + y - \frac{1}{2}, y^2\right)$$

auf dem Kreisring $0 \leq y \leq 1$ erfüllt die „Twist-Bedingung“, ist aber nicht flächenerhaltend.

Beweis. Dafür zeigen wir:

(a) Für die Abbildung ψ gilt:

$$f(x, y) = x + y - \frac{1}{2} \text{ und } g(x, y) = y^2.$$

Also folgt im Kreisring $0 \leq y \leq 1$:

$$f(x, 0) = x - \frac{1}{2} < x \quad \text{und} \quad f(x, 1) = x + \frac{1}{2} > x.$$

Somit ist die „Twist-Bedingung“ erfüllt.

(b) Es gilt für das Differential der Abbildung ψ :

$$D\psi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also gelten } D\psi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } D\psi(x, y) \frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich

$$\psi^*(dx \wedge dy) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0 = \phi^*(dx \wedge dy) \left(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

und

$$\psi^*(dx \wedge dy) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) = (dx \wedge dy) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2y \end{pmatrix} \right) = 2dy \neq 1.$$

Demzufolge ist ψ nicht flächenerhaltend.

Für die Abbildung ψ sind Fixpunkte nur für $y = \frac{1}{2}$ möglich. Daraus folgt aber, dass $y^2 \neq y$ gilt. Also ist diese Abbildung ebenfalls fixpunktfrei. \square

Bemerkung. Anhand Abbildung 1.1 wird ersichtlich, dass das Theorem 1 tatsächlich genau zwei Fixpunkte liefern kann. Die gezeigte Abbildung erfüllt alle Voraussetzungen aus Abschnitt 1.2 auf Seite 5 und es liegen genau zwei Fixpunkte in dem gezeigten Kreisring vor.

1.4 Beweis des Theorems

In diesem Abschnitt führen wir den Beweis des Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorems aus. Dabei legen wir zunächst die Existenz eines ersten Fixpunktes der Abbildung ϕ dar. Die

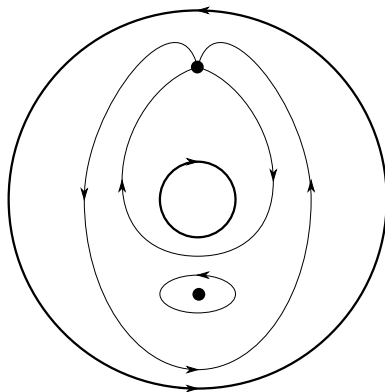


Abbildung 1.1: Twist-Abbildung mit genau zwei Fixpunkten in einem Kreisring

Existenz eines zweiten Fixpunktes kann durch eine Modifikation dieses Beweises gezeigt werden. Dazu sei auf den Abschnitt 1.5 verwiesen.

Zur Beweisstrategie ist anzuführen, dass wir zunächst annehmen, dass der Homöomorphismus ϕ keinen Fixpunkt im Streifen S besitzt. Dies wird über die Einführung eines Index zum Widerspruch geführt. Der Großteil der Beweisarbeit liegt dann darin, die den Widerspruch kreierende Proposition 1 zu überprüfen.

Beweis. Wir nehmen also an, dass ϕ keinen Fixpunkt in S hat. Ohne Einschränkung stellen wir die „Twist-Bedingung“ folgendermaßen dar:

$$f(x, a) - x > 0, \quad f(x, b) - x < 0,$$

sonst gehen wir von (x, y) auf $(-x, y)$ über.

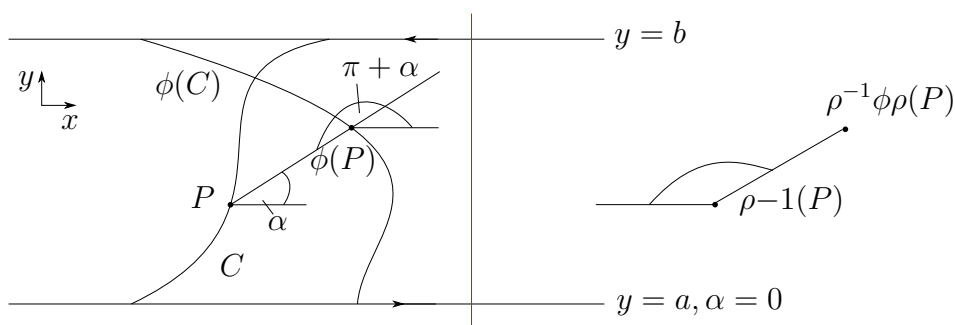


Abbildung 1.2: Darstellung zweier getwisteter Kurven im Streifen S

Die Situation des Theorems 1 ist in Abbildung 1.2 dargestellt.¹ Der Abbildung 1.2 kann man entnehmen, dass $\alpha(P) := \arg(P, \phi(P))$ den Winkel zwischen dem Vektor von P

¹Es ist nicht möglich zwei getwistete Kurven ohne einen Fixpunkt darzustellen.

nach $\phi(P)$ und der positiven x -Achse bezeichnet. Dieser ist bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π definiert. Zur Wohldefiniertheit setzen wir den Winkel $\alpha(P) = 0$ für P auf $y = a$. Mit Hilfe dieses Winkels definieren wir einen Index:

$$j(\phi) := \alpha(P)|_{y=b}.$$

Dieser bezeichnet den Wert von α am obigen Rand. Es ist auch möglich den Index als Steigung von α entlang einer Kurve C in S vermöge

$$j_C(\phi) := \int_C d\alpha$$

zu definieren.

Behauptung. *Diese beiden Definitionen stimmen überein, d.h. es gilt:*

$$j(\phi) = \alpha(P)|_{y=b} = \int_C d\alpha$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} j_C(\phi) &= \int_C d\alpha \\ &= \int_0^1 d\alpha_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \alpha(c(t)) \right] dt \\ &= \alpha(c(1)) - \underbrace{\alpha(c(0))}_{=0} \\ &= j(\phi). \end{aligned} \quad \square$$

Mit Hilfe der folgenden Proposition 1 führen wir die Annahme, dass die Abbildung ϕ keinen Fixpunkt im Streifen S besitzt, zum Widerspruch. Daraus folgt die Existenz eines Fixpunktes. Dabei wird zur Erhaltung der Stringenz der Beweis der Proposition 1 aufgeschoben.

Proposition 1. *Für beliebige fixpunktfreie, flächenerhaltende Abbildungen, welche die Voraussetzungen aus dem Abschnitt 1.2 auf Seite 5 erfüllen, ist der Index $j(\phi)$ unabhängig von der Abbildung ϕ , tatsächlich gilt:*

$$j(\phi) = \pi.$$

Wir definieren nun die Reflexion $\rho: S \rightarrow S$ gegeben durch $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Nach Voraussetzung erfüllt die Abbildung ϕ alle Bedingungen des Theorems 1 und hat nach Annahme keinen Fixpunkt. Dann gilt für die Verkettung $\rho^{-1} \circ \phi \circ \rho$ offenbar selbiges, da nur eine Reflexion in beide Richtungen vorliegt.

Proposition 2. *Für ein fixpunktfreies ϕ gilt:*

$$j(\rho^{-1} \circ \phi \circ \rho) = -j(\phi), \quad j(\phi^{-1}) = j(\phi).$$

Beweis. Dazu sei $C: \mathbb{R} \rightarrow S$ eine Kurve mit

$$t \mapsto (x = 0, y = t)$$

für $a \leq t \leq b$, sodass $\rho \circ C = C$ gilt. Durch den Übergang von ϕ auf $\rho^{-1} \circ \phi \circ \rho$ verändert sich der Winkel von α zu $\pi - \alpha$, wie man in Abbildung 1.2 auf Seite 8 erkennt. Damit ergibt sich die Gleichheit:

$$\begin{aligned} j_C(\rho^{-1} \circ \phi \circ \rho) &= \int_C d(\pi - \alpha) \\ &= - \int_C d\alpha \\ &= -j_C(\phi). \end{aligned}$$

Sei nun C eine Kurve von $y = a$ nach $y = b$ und $\phi(C)$ ebenfalls. Dann entspricht der Winkel α beim Punkt $P \in C$ dem Winkel $\pi + \alpha$ bei $\phi(P) \in \phi(C)$ (vgl. Abbildung 1.2 auf Seite 8). Damit folgt die Aussage der Proposition 2:

$$\begin{aligned} j_{\phi(C)}(\phi^{-1}) &= \int_{\phi(C)} d(\pi + \alpha) \\ &= \int_C d\alpha \\ &= j_C(\phi). \end{aligned} \quad \square$$

Im Anschluss an Proposition 1 wurde bereits festgestellt, dass $\rho^{-1} \circ \phi \circ \rho$ alle Voraussetzungen des Theorems 1 erfüllt, wenn diese für ϕ gelten. Aus Proposition 2 ergibt sich:

$$j(\rho^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \rho) = -j(\phi^{-1}) = -j(\phi) = j(\rho^{-1} \circ \phi \circ \rho).$$

Daraus folgt, dass $j = 0$ gelten muss. Dies steht aber im Widerspruch zur Proposition 1. Zum Beweis des Theorems 1 bleibt somit noch die Proposition 1 zu zeigen.

Beweis. (Proposition 1) Dazu weiten wir den Homöomorphismus ϕ zu einem Homöomorphismus der Ebene \mathbb{R}^2 durch

$$f(x, y) = \begin{cases} f(x, a) & \text{für } y \leq a \\ f(x, b) & \text{für } y \geq b \end{cases}$$

$$g(x, y) = y \quad \text{für } y \leq a \text{ und } y \geq b$$

aus. Dann ist ϕ nur auf dem Streifen S flächenerhaltend. Wir definieren mit Hilfe des flächenerhaltenden Shifts $\tau_\varepsilon: S \rightarrow S$

$$(x, y) \mapsto (x, y + \varepsilon)$$

die Abbildung $\phi_\varepsilon: S \rightarrow S$ durch

$$\phi_\varepsilon = \tau_\varepsilon \circ \phi.$$

Dabei ist ϕ_ε mit $0 < \varepsilon < \text{dist}(P, \phi(P))$ für alle P ebenfalls fixpunktfrei und auf dem Streifen S flächenerhaltend. Nun definieren wir den Index $j(\phi_\varepsilon) := (2k + 1)\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ durch

$$\left| \int_C d\alpha_\varepsilon - j(\phi_\varepsilon) \right| < \pi,$$

wobei $\alpha_\varepsilon(P) = \arg(P, \phi_\varepsilon(P))$ gilt und C eine Kurve von $y \leq a$ nach $y \geq b$ ist. Somit genügt es zu zeigen, dass $j(\phi_\varepsilon) = \pi$ gilt.

Dazu betrachten wir eine Kurve Γ von $y = a$ nach $y > b$. Dann gilt:

$$\left| \int_\Gamma d\alpha_\varepsilon - \pi \right| < \pi. \quad (1.1)$$

Aus dieser Behauptung folgt unmittelbar, dass $j(\phi_\varepsilon) = \pi$ gilt und summa summarum die Proposition 1. Es bleibt also zu zeigen, dass (1.1) erfüllt ist.

Zu diesem Zweck untersuchen wir ε -Streifen im Streifen S . Wir definieren

$$D_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y < a + \varepsilon\} \quad \text{und} \quad D_j := \phi_\varepsilon^j(D_0) \quad \forall j.$$

Zur Veranschaulichung dieser Streifen schauen wir die Abbildung 1.3 auf Seite 14 an.

Behauptung. Für $j \leq 0$ gilt:

$$D_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a + j\varepsilon \leq y < a + (j + 1)\varepsilon\}.$$

Beweis. Es ist also zu zeigen, dass

$$D_j = \phi_\varepsilon^j(D_0)$$

für $j \leq 0$ gilt. Definiere dazu zunächst

$$\tilde{D}_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a + j\varepsilon \leq y < a + (j + 1)\varepsilon\}.$$

Dann ist zu überprüfen, dass gilt:

$$\phi_\varepsilon(\tilde{D}_j) = D_0.$$

Betrachte zuerst den Fall $j = -1$. Es ist klar, dass \tilde{D}_{-1} eine maximale Breite von ε hat. Daher gelangt man durch Ausführung von $\phi_\varepsilon(\tilde{D}_{-1})$ direkt in den Streifen D_0 . Also folgt die Behauptung. Diese Überlegung kann man analog für alle $j < 0$ anwenden. Für $j = 0$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition von D_0 . Schlussendlich ergibt sich die Identität

$$D_j = \tilde{D}_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a + j\varepsilon \leq y < a + (j + 1)\varepsilon\}. \quad \square$$

Die Streifen D_j sind nach soeben bewiesener Behauptung für $j \leq 0$ offenbar disjunkt. Somit folgt auch für $j > 0$, dass die Streifen D_j disjunkt sind, da es sich hierbei um die Bilder von disjunkten Mengen (nämlich der Streifen D_j mit $j \leq 0$) unter dem Homöomorphismus ϕ_ε handelt. Entsprechend gehen die Streifen sukzessive ineinander über, d.h. ein Streifen D_l , $l \in \mathbb{Z}$, wird durch den Homöomorphismus ϕ_ε in einen Streifen D_{l+1} überführt. Durch wiederholte Ausführung dieses Prozesses entwickelt sich daraus für alle $j \in \mathbb{Z}$ eine fortlaufende Schicht der Streifen D_j .

Des Weiteren sind die Streifen D_j invariant unter der Shiftabbildung s , da $\phi \circ s = s \circ \phi$ gilt, wobei $s: S \rightarrow S$ vermöge $(x, y) \mapsto (x + 2\pi, y)$ gegeben ist. Wir können die betrachteten Streifen D_j somit als Kreisringe auffassen.

Die Flächen der D_j sind identisch, da ϕ_ε flächenerhaltend ist. Somit hat jeder Streifen D_j eine Breite von ε . Es gilt also:

$$m(D_j) = m(D_0) = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} du \wedge dv = 2\pi\varepsilon > 0.$$

Aus diesem Grund liegen die Mengen D_j , $j \geq 0$, in der Ebene mit $y \geq a$, aber nicht alle im Streifen S , da die Fläche $m(S) = 2\pi(b - a) < \infty$ endlich ist. Ergo definieren wir $N \in \mathbb{N}$ als die Zahl, sodass

$$D_0, D_1, \dots, D_{N-1} \subset S \text{ und } D_N \not\subset S$$

gilt. Sei $Q \in \bar{D}_{N+1}$ der Punkt mit dem größten y -Wert in \bar{D}_{N+1} . Da ϕ_ε ein Homöomorphismus ist, liegt $Q \in \partial D_{N+1}$.

Behauptung. Dabei gilt:

$$Q = \phi_\varepsilon^{N+2}(P_0) \text{ mit } P_0 \in \{y = a\} \subset D_0.$$

Beweis. Betrachte dazu für $P_0 \in \{y < a\}$

$$P_0 \in D_j \quad \text{für ein } j < 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\phi_\varepsilon^{N+2}(P_0) \in D_{j+N+2} \not\subset D_{N+2}$$

gilt und entsprechend

$$\phi_\varepsilon^{N+2}(P_0) \in D_{j+N+2} \not\subset \bar{D}_{N+2}.$$

Ebenfalls folgt für $P_0 \in \{y > a\}$

$$P_0 \in D_j \quad \text{für ein } j > 0.$$

Damit ergibt sich analog zu oben, dass $P_0 \in \{y = a\} \subset D_0$. □

Nun definieren wir $P_j := \phi_\varepsilon^j(P_0)$ mit $0 \leq j \leq N+2$. Folglich gilt $P_{N+2} = Q$. Aus diesen Punkten konstruieren wir eine stetige Kurve $\gamma: [0, N+2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, indem wir zunächst P_0 und das Bild von P_0 unter ϕ_ε durch eine Gerade verbinden:

$$\gamma(t) = \frac{t}{\varepsilon} P_1 + \left(1 - \frac{t}{\varepsilon}\right) P_0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon.$$

Im Anschluss iterieren wir diesen Weg unter ϕ_ε :

$$\gamma(t + \varepsilon \cdot j) = \phi_\varepsilon^j \circ \gamma(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq \varepsilon, j = 1, 2, \dots, N+1.$$

Entsprechend ist $\gamma(t)$ für alle $0 \leq t \leq T = (N+2) \cdot \varepsilon$ definiert und verbindet die Punkte $\gamma(0) = P_0$ und $\gamma(T) = \gamma(0 + (N+2) \cdot \varepsilon) = \phi_\varepsilon^{N+2} \circ \gamma(0) = \phi_\varepsilon^{N+2}(P_0) = Q = P_{N+2}$. Nach Konstruktion von Q liegt die ganze Kurve $\gamma(t)$ in dem Streifen S zwischen den Parallelen zur x -Achse durch P_0 und $P_{N+2} = Q$, vgl. Abbildung 1.3.

Damit haben wir die Kurve γ vollständig konstruiert und müssen noch beweisen, dass sie keine Selbstschnitte besitzt.

Proposition 3. Die Kurve $\gamma(t)$ hat keine Selbstschnitte für $0 \leq t \leq T$, d.h. es gilt:

$$\gamma(t) \neq \gamma(s) \quad \text{für } 0 \leq t < s \leq T.$$

Beweis. Es gilt die Inklusion:

$$\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 \mid j\varepsilon \leq t < (j+1)\varepsilon\} \subset D_j.$$

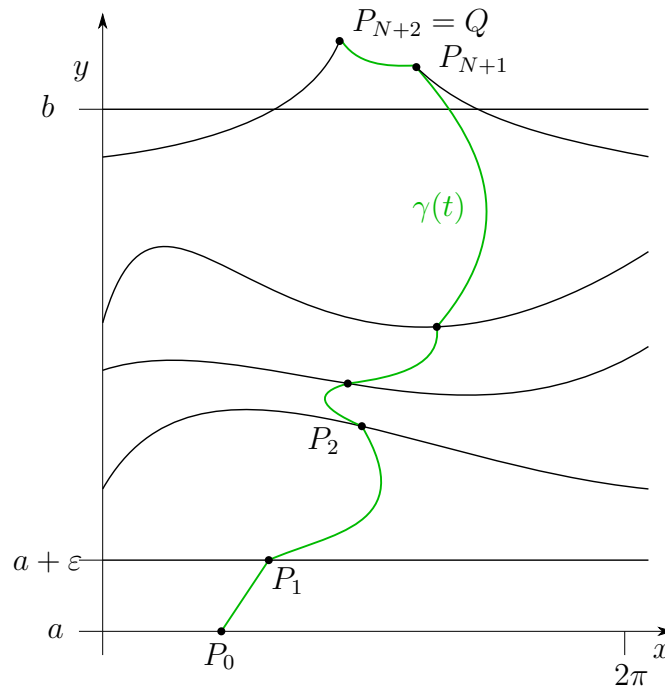


Abbildung 1.3: Die Streifen der D_j und der Weg γ

Nach Voraussetzung sind alle D_0, D_1, \dots, D_N disjunkt. Demnach kann ein Selbstschnitt nur in einem Intervall $[j\varepsilon, (j+1)\varepsilon)$, $j \in \mathbb{Z}$, auftreten, d.h. es ist

$$\gamma(t) = \gamma(s) \quad \text{mit } j\varepsilon \leq t < s \leq (j+1)\varepsilon.$$

Offensichtlich gelten:

$$\gamma(\varepsilon) = P_1 \quad \text{und} \quad \gamma(j \cdot \varepsilon) = \phi_\varepsilon^j(P_0).$$

Aus der Definition des Homöomorphismus ϕ_ε^j folgt ebenso:

$$\begin{aligned} \gamma(\varepsilon + j \cdot \varepsilon) &= \gamma((j+1) \cdot \varepsilon) \\ &= \phi_\varepsilon^j(\gamma(\varepsilon)) \\ &= \phi_\varepsilon^j(P_1). \end{aligned}$$

Folglich entspricht das Intervall $[j\varepsilon, (j+1)\varepsilon)$ der direkten Verbindungsline der beiden Punkte P_0 und P_1 . Somit folgt die Behauptung. \square

Im letzten Schritt wählen wir für Γ die soeben konstruierte Kurve $\gamma(t)$, $0 \leq t \leq T - \varepsilon$, um die Ungleichung (1.1) auf Seite 11 zu überprüfen. Wir definieren für dieses Ziel einen Winkel β zwischen den Kurvenabschnitten $\gamma(t)$ und $\gamma(s)$ mit $0 \leq t < s \leq T$ durch

$$\beta(t, s) = \arg(\gamma(t), \gamma(s)) \pmod{2\pi}.$$

Der Winkel β ist $(\text{mod } 2\pi)$ definiert, da γ nach Proposition 3 frei von Selbstschnitten ist. Aus dieser Definition folgt:

$$\begin{aligned}\alpha_\varepsilon(\gamma(t)) &= \arg(\gamma(t), \phi_\varepsilon(\gamma(t))) \\ &= \arg(\gamma(t), \gamma(t + 1 \cdot \varepsilon)) \\ &= \beta(t, t + \varepsilon) \pmod{2\pi}.\end{aligned}$$

Außerdem gilt die Identität

$$\int_\Gamma d\alpha_\varepsilon = \int_I d\beta$$

mit I als Linie gegeben durch $s = t + \varepsilon, 0 \leq t \leq T - \varepsilon$, in der (t, s) -Ebene.

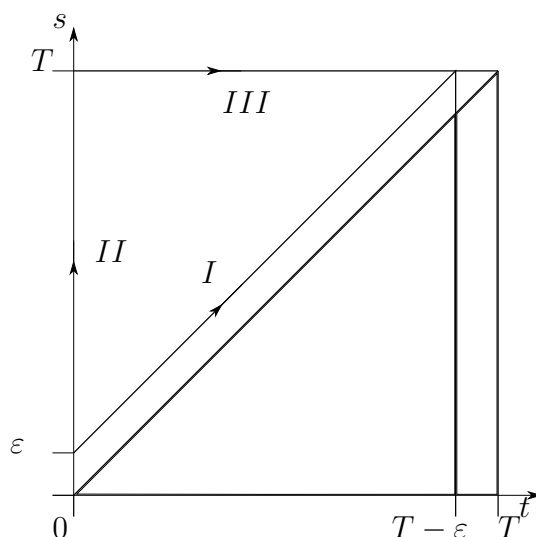


Abbildung 1.4: Darstellung der T -Bereiche

Aus Abbildung 1.4 geht hervor:

$$\int_I d\beta = \int_{II+III} d\beta. \quad (1.2)$$

Um das rechte Integral der Gleichung (1.2) zu berechnen, bestimmen wir das Integral von $(t, s) = (0, \varepsilon)$ zu einem Punkt q , welcher auf $II + III$ liegt. Dazu betrachten wir die folgenden Fälle:

1. Der Punkt q liegt auf der Strecke II . Dann ergibt sich für den Winkel:

$$\beta(0, s) = \arg(\gamma(0), \gamma(s)).$$

Daraus folgt, dass der Vektor von $\gamma(0)$ nach $\gamma(s)$ in der oberen Halbfäche bleibt, d.h. es ist

$$0 < \int_{II} d\beta < \pi$$

erfüllt.

2. Der Punkt q bewegt sich von der Strecke II auf die Strecke III . Entsprechend gilt:

$$\begin{aligned} \beta(t, T) &= \arg(\gamma(t), \gamma(T)) \\ &= \arg(\gamma(t), Q). \end{aligned}$$

Wir betrachten also den Vektor von $\gamma(t)$ nach Q . Da $Q > \gamma(t)$ mit $0 \leq t < T$ gilt, folgt:

$$0 < \int_{II} d\beta < \pi.$$

Insgesamt erschließt sich die folgende Ungleichung:

$$0 < \int_{II+III} d\beta < 2\pi. \quad (1.3)$$

Mit Hilfe des Ausdrucks (1.3) wollen wir nun zeigen, dass

$$\int_{\Gamma} d\alpha_{\varepsilon} = \pi$$

erfüllt ist. Nach Annahme auf Seite 11 gilt:

$$\alpha(P) = \pi \pmod{2\pi} \quad \text{mit } P \text{ auf } y = b.$$

Daraus folgt:

$$\alpha_{\varepsilon}(P) = (2k + 1)\pi + \omega(\varepsilon) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z},$$

wobei $\omega(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ gilt.

Alles in allem gelangen wir zu folgender Gleichung:

$$(2k + 1) \cdot \pi + \omega(\varepsilon) = \int_{\Gamma} d\alpha_{\varepsilon} = \int_I d\beta = \int_{II+III} d\beta.$$

Unter Betrachtung des Ausdrucks (1.3) können wir daraus schlussfolgern, dass $k = 0$ gelten muss, d.h. es gilt:

$$\int_{\Gamma} d\alpha_{\varepsilon} = \pi.$$

Inbesondere wissen wir jetzt, dass der Ausdruck (1.1) auf Seite 11 erfüllt ist. Also folgt schlussendlich die Behauptung der Proposition 1. \square

Somit haben wir den gewünschten Widerspruch kreiert und demzufolge die Existenz eines Fixpunktes bewiesen. Die Existenz des zweiten Fixpunktes wird im Abschnitt 1.5 erläutert. \square

1.5 Existenz des zweiten Fixpunktes

Zur Herleitung der Existenz eines zweiten Fixpunktes werden wir zunächst die Abbildung ϕ abändern, um dann mit dieser Modifikation in Anlehnung an den Beweis der Existenz des ersten Fixpunktes arbeiten zu können.

1.5.1 Modifikation der Abbildung ϕ

Wir modifizieren nun die im Theorem 1 verwendete Abbildung ϕ . Es ist ausreichend, wenn die Abbildung ϕ nur einen Randkreis erhält und keinen Endomorphismus darstellt. Dann können wir annehmen, dass die Iterationen von ϕ als Homöomorphismen in einer Umgebung $U(S)$ von S definiert sind. Wir betrachten also die Abbildung

$$\phi: S \rightarrow \tilde{S}$$

mit $\tilde{S} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y < c, c > b\}$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

- (a) Der Rand $y = a$ bleibt erhalten:

$$g(x, a) = a$$

- (b) und die „Twist-Bedingung“ ist erfüllt:

$$f(x, a) - x > 0, \quad f(x, y) - x < 0 \quad \text{für } (x, y) \in \tilde{S} \setminus S.$$

1.5.2 Theorem über die Existenz des zweiten Fixpunktes

In diesem Abschnitt werden wir das folgende Theorem über die Existenz des zweiten Fixpunktes unter den angegebenen Modifikationen beweisen. Dazu verweisen wir auf den Beweis des Theorems 1 auf Seite 5, um darauf aufbauend argumentieren zu können.

Theorem 2. *Ein flächenerhaltender Homöomorphismus $\phi: S \rightarrow \tilde{S}$, der $g(x, a) = a$ sowie die „Twist-Bedingung“ erfüllt, besitzt mindestens zwei nicht-äquivalente Fixpunkte im Streifen S .*

Beweis. Wir nehmen an, dass in dem Rechteck $-\pi \leq x < \pi$, $a \leq y \leq b$ ein Fixpunkt F_0 existiert. Diesen können wir per Translation in x -Richtung auf $x = -\pi$ verschieben, d.h. es gilt:

$$F_0 := (-\pi, y).$$

Wir betrachten nun die modifizierte Translation $\tau_\varepsilon: S \rightarrow \tilde{S}$ gegeben durch

$$(x, y) \mapsto (x, y + \varepsilon p(x)).$$

Dabei sei $p(x)$ eine stetige Funktion der Periode 2π , welche den folgenden Bedingungen genügt:

$$0 \leq p(x) \leq 1, \int_0^{2\pi} p(x) dx > 0 \text{ und } p(x) = 0 \text{ für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Zur Eindeutigkeit dieser Abbildung setzen wir $p(x) > 0$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$.

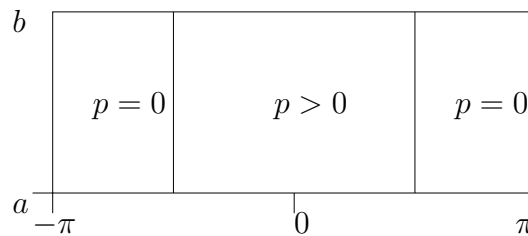


Abbildung 1.5: Rechteck $-\pi \leq x < \pi$, $a \leq y \leq b$

Im Rechteck $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, $a \leq y \leq b$ liegt kein Fixpunkt vor, weil ϕ nach Annahme den Fixpunkt $F_0 = (-\pi, y)$ besitzt. Somit können wir wie beim Beweis des ersten Fixpunktes ε so klein wählen, dass

$$\phi_\varepsilon = \tau_\varepsilon \circ \phi$$

ebenfalls keinen Fixpunkt besitzt.

Bisher haben wir die Abbildungen aus dem Beweis des Theorems 1 angepasst. Nun werden wir das wesentliche Argument ändern. Dazu betrachten wir das Integral

$$\int_C d\alpha_\varepsilon,$$

wobei C eine Kurve von $y = a$ zu einem Punkt in $\tilde{S} \setminus S$ darstellt, die $s^j(F_0)$ nicht durchläuft. Es sei $\alpha_\varepsilon = \arg(P, \phi_\varepsilon(P))$ wie zuvor gegeben. Wir definieren den Index $j_C(\phi_\varepsilon) := (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, durch

$$\left| \int_C d\alpha_\varepsilon - j_C(\phi_\varepsilon) \right| < \pi.$$

Dabei passiert C keine Fixpunkte und verbindet $y = a$ mit $b \leq y < c$. Analog zum Beweis des ersten Fixpunktes im Theorem 1 kann man diese Kurve in eine Linie auf $x = 0 \pmod{2\pi}$ vermöge $y = t, a \leq t \leq b$, überführen. Somit ergibt sich, dass der Index unabhängig von der Kurve ist, d.h. die Identität

$$j_C(\phi_\varepsilon) = j(\phi_\varepsilon)$$

ist erfüllt. Für genügend kleines ε gilt:

$$j(\phi_\varepsilon) = j(\phi).$$

Es bleibt folglich noch zu zeigen, dass $j(\phi)$ unabhängig von ϕ ist, also der Beweis der Proposition 1 aus Theorem 1 unter diesen modifizierten Voraussetzungen. Dazu konstruieren wir wieder eine Kurve Γ ohne Selbstschnitte, die $y = a$ und $b \leq y < c$ verbindet, den Fixpunkt F_0 nicht schneidet und entlang welcher der Index $j(\phi) = \pi$ beträgt. Wir definieren zunächst:

$$D_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y < a + \varepsilon p(x)\}$$

und

$$D_j := \phi_\varepsilon^j(D_0) \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, N + 1.$$

Dabei ist N der maximale Index, sodass $D_{N-1} \subset S$.

Mit Hilfe dieser Streifen zeigen wir nun, dass $N < \infty$ gilt. Da τ_ε flächenerhaltend ist, ergibt sich dies auch für ϕ_ε . Somit folgt:

$$m(D_j) = m(D_0) = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \varepsilon \, dx \wedge dy = \varepsilon \int_0^{2\pi} p(x) \, dx \pmod{2\pi}.$$

Wir erweitern die Abbildung $\phi: S \rightarrow \tilde{S}$ durch

$$(x, y) \mapsto (f(x, a), y), \quad y \leq a.$$

Damit folgt für $j \leq 0$:

$$D_j = \phi_\varepsilon^j(D_0).$$

Nun zeigen wir, dass

$$\overset{\circ}{D}_j \cap \overset{\circ}{D}_k = \emptyset, \quad 0 \leq j < k \leq N + 1,$$

gilt.

Behauptung. *Dazu genügt es zu prüfen, dass*

$$\overset{\circ}{D}_{-i} \cap \overset{\circ}{D}_0 = \emptyset \quad \text{mit } i = k - j > 0$$

erfüllt ist.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt:

$$D_j = \phi_\varepsilon^j(D_0) \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Aus $\emptyset = \overset{\circ}{D}_{-i} \cap \overset{\circ}{D}_0$ folgt:

$$\begin{aligned} \emptyset &= \phi_\varepsilon^k(\overset{\circ}{D}_{-i} \cap \overset{\circ}{D}_0) \\ &= (\phi_\varepsilon^k(\overset{\circ}{D}_{-i})) \cap (\phi_\varepsilon^k(\overset{\circ}{D}_0)) \\ &= \overset{\circ}{D}_{-i+k} \cap \overset{\circ}{D}_k, \end{aligned}$$

da ϕ_ε ein Homöomorphismus ist. □

Wir beweisen nun, dass

$$D_j = \phi_\varepsilon^j(D_0) \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist.

Behauptung. *Es gilt:*

$$D_{-i} = \phi_\varepsilon^{-i} = \phi_\varepsilon^{-i}(D_0) \subset \mathbb{R} \times (-\infty, a).$$

Beweis. Sei $(x, y) \in D_{-i}$ gegeben. Wir prüfen die Behauptung zunächst für $i = 1$. Der allgemeine Fall folgt leicht daraus.

Fall $i = 1$: Setze $(\bar{x}, \bar{y}) := \phi(x, y)$. Dann ist zu zeigen, dass $y < a$ erfüllt ist. Falls $y \geq a$ gilt und damit $(x, y) \in S$ liegt, folgt $(\bar{x}, \bar{y}) \in \tilde{S}$, das heißt es gilt $\bar{y} \geq a$.

Andererseits gilt:

$$\phi_\varepsilon(x, y) = (\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon p(\bar{x})) \in D_0.$$

Somit folgt:

$$a \leq \bar{y} + \varepsilon p(\bar{x}) < a + \varepsilon p(\bar{x})$$

und damit:

$$\bar{y} < a \quad \text{!}.$$

Daraus ergibt sich, dass $y < a$ gilt, das heißt $D_{-1} \subset \mathbb{R} \times (-\infty, a)$.

Allgemeines i : Für $y \geq a$ gilt wieder:

$$\phi_\varepsilon^{i-1}(x, y) =: (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R} \times (a, \infty).$$

Wie oben folgt:

$$\phi_\varepsilon(\hat{x}, \hat{y}) \in D_0$$

und entsprechend $\hat{y} < a - \frac{\varepsilon}{2}$.

Insgesamt schließen wir daraus die Behauptung. □

Damit ist gezeigt, dass $N < \infty$ tatsächlich endlich ist.

Die Mengen

$$D_N = \phi_\varepsilon^N(D_0) = \phi_\varepsilon(D_{N-1})$$

und

$$D_{N+1} = \phi_\varepsilon^2(D_{N-1})$$

sind für genügend kleines $\varepsilon > 0$ wohldefiniert, da aus der Inklusion $D_{N-1} \subset S$ folgt, dass $\phi(D_{N-1}) \subset \tilde{S}$ gilt.

Wir wählen nun einen Punkt $Q \in \bar{D}_{N+1}$ mit maximaler y -Koordinate. Analog zum Beweis des Theorems 1 konstruieren wir eine Kurve γ aus den Punkten P_0, P_1, \dots, P_{N+2} als Urbilder von Iterationen unter ϕ_ε des Punktes Q :

$$P_j = \phi_\varepsilon^j(P_0) \text{ und } P_{N+2} = Q \quad \text{mit } 0 \leq j \leq N+2.$$

Dabei gilt:

$$P_0 \in D_0 \cap \{y = a\}.$$

Folgend erweitern wir diese Definition für $j \leq -1$ durch:

$$P_j := \phi_\varepsilon^j(P_0).$$

Damit folgt insbesondere:

$$P_{-1} = \phi_\varepsilon^{-1}(P_0) \in \partial D_{-1}.$$

Die Kurve γ soll mit einer Geraden durch die Punkte P_{-1} und P_0 starten, d.h. wir erhalten einen Abschnitt L_{-1} , der mit Parallelen zur Geraden $\{y = a\}$ jeweils durch die Punkte P_{-1} und P_0 beschränkt ist. Diese Kurve wird mittels

$$L_0 := \phi_\varepsilon(L_{-1}) \quad \text{und} \quad L_j := \phi_\varepsilon^j(L_0)$$

fortgeführt. Eine skizzierte Darstellung dieser Kurve γ befindet sich in Abbildung 1.6.

Dabei ist zu bemerken, dass die Streifen L_j nicht zwingend den Streifen D_j entsprechen.

Wir müssen also noch zeigen, dass

$$L_i \cap L_k = \emptyset \quad \text{für } 0 \leq i \leq k \leq N+1$$

gilt bzw. die Schnittmenge $L_i \cap L_k$, $0 \leq i \leq k \leq N+1$, höchstens einem der Punkte P_j gleicht. Dazu betrachten wir wieder die Mengen $L_j := \phi_\varepsilon^j(L_0)$ für $j \leq -1$.

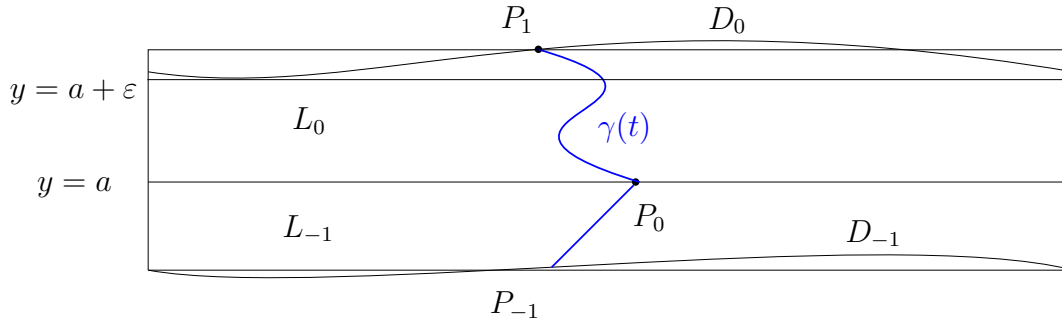


Abbildung 1.6: Darstellung der Kurve γ

Behauptung. Für $j \leq -1$ liegen die Mengen L_j in dem Bereich

$$x_j \leq x \leq x_{j+1},$$

wobei $x_{j+1} := f(x_j, a)$ für $j \leq -1$ gilt und $P_0 = (x_0, a)$.

Beweis. Wir betrachten zuerst den Fall $j = -1$. Dann ist zu zeigen, dass die Inklusion

$$L_{-1} \subset \{x_{-1} \leq x \leq x_0, y \leq a\}$$

gilt. Nach voriger Behauptung ist klar, dass

$$L_{-1} \subset \mathbb{R} \times (-\infty, a]$$

ist. Daher folgt für den Homöomorphismus ϕ :

$$\phi(x, y) = (f(x, a), y)$$

und damit:

$$\phi_\varepsilon(x, y) = (f(x, a), y + \varepsilon p(f(x, a))).$$

Es ist offensichtlich, dass

$$P_0 \in \{x_{-1} \leq x \leq x_0\} \times (-\infty, a]$$

gilt. Weiter liegt $P_{-1} = (x_{-1}, \star)$ in der Menge $\{x_{-1} \leq x \leq x_0, y \leq a\}$, weil die Identität $f(x_{-1}, a) = x_0$ gilt. Das Sternchen symbolisiert dabei einen irrelevanten zweiten Koordinateneintrag. Da der Streifen L_{-1} durch die Gerade, welche von P_{-1} nach P_0 verläuft, gebildet wird, folgt aus dieser Betrachtung, dass die Inklusion

$$L_{-1} \subset \{x_{-1} \leq x \leq x_0, y \leq a\}$$

erfüllt ist.

Wir betrachten weiter die Streifen L_{j-1} , $j \leq -1$. Dann ist zu zeigen, dass

$$L_{j-1} \subset \{x_{j-1} \leq x \leq x_j, y \leq a\}$$

gilt. Es ist $P_{j-1} = (x_{j-1}, \star)$. Nach Definition gelten $f(x_{j-1}, a) = x_j$ und $\phi_\varepsilon(P_{j-1}) = P_j$. Entsprechend sind die Streifen L_{j-1} vertikal begrenzt.

Mit Hilfe der „Twist-Bedingung“ folgt sofort die Behauptung, d.h. es gilt:

$$L_{j-1} \subset \{x_{j-1} \leq x \leq x_j, y \leq a\}.$$

Folgend haben wir gezeigt, dass die Streifen L_j , $j \leq -1$, die Inklusion

$$L_j \subset \{x_j \leq x \leq x_{j+1}, y \leq a\}$$

erfüllen. □

Offensichtlich folgt aus dieser Behauptung für $j \leq -1$, dass

$$L_j \cap L_{j-1} = P_j$$

gilt. Analog zu der Strategie im Beweis der Disjunktheit der Streifen D_j ergibt sich daraus mittels Iteration des Homöomorphismus ϕ_ε , dass

$$L_i \cap L_k = \emptyset \quad \text{für } 0 \leq i \leq k \leq N + 1$$

gilt oder dass die Schnittmenge $L_i \cap L_k$, $0 \leq i \leq k \leq N + 1$, höchstens einem der Punkte P_j gleich ist. Schlussendlich folgt daraus, dass die Kurve γ frei von Selbstschnitten ist. Wie bereits angemerkt, hat ϕ_ε den gleichen Fixpunkt $s^j(F_0)$ wie ϕ . Also schneidet γ diesen ebenfalls nicht. Der Rest der Behauptung lässt sich analog zum Beweis des Theorems 1 schließen. □

Damit ist die Existenz des zweiten Fixpunktes belegt.

1.6 Unendlich viele periodische Orbits

Als Abschluss dieses ersten Kapitels beweisen wir auf der Grundlage des Theorems 1 die Existenz unendlich vieler periodischer Punkte für eine Kreisring-Abbildung. Mit Hilfe dieses Theorems werden wir im nächsten Kapitel interessante Schlüsse über das Billardkugelproblem ziehen können. Zu diesem Zweck beginnen wir mit folgender Definition:

Definition 2. Ein Punkt $P \in A$ heißt **periodisch**, falls $\psi^N(P) = P$ für ein $N \geq 1$ gilt. Dabei heißt das kleinste N „minimale Periode“. Für jeden Punkt $P \in A$ nennen wir die Menge

$$\{\psi^j(P) \mid j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

den **Orbit** über P . Bei einem periodischen Punkt besteht der Orbit nur aus endlich vielen Punkten.

Theorem 3. Falls eine flächenerhaltende Abbildung $\psi: A \rightarrow A$ auf einem Kreisring A zu einer Abbildung $\phi: S \rightarrow S$ auf einem Streifen S mit den Eigenschaften

$$\phi \circ s = s \circ \phi, \quad g(x, a) = a, \quad g(x, b) = b \quad \text{und} \quad f(x, b) - x \leq c_1 < c_2 \leq f(x, a) - x,$$

mit $x \in \mathbb{R}$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, fortgesetzt werden kann, dann besitzt die Abbildung ψ unendlich viele periodische Orbits im Inneren von A .

Beweis. Sei $\phi: S \rightarrow S$ vermöge

$$(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$$

eine Abbildung zu ψ gehörend auf dem Streifen S , analog zum Theorem 1. Nach Voraussetzung existieren Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x, b) - x \leq c_1 < c_2 \leq f(x, a) - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Da die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen, findet man eine rationale Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit

$$c_1 < 2\pi \frac{p}{q} < c_2.$$

Nun beschreiben wir den Orbit ϕ^q durch die Vorschrift

$$(x, y) \mapsto (f^q, g^q).$$

Dann genügt auch die Abbildung $s^{-p} \circ \phi^q$ der „Twist-Bedingung“, denn es gilt:

$$f^q(x, b) - x \leq qc_1 < 2\pi p < qc_2 \leq f^q(x, a) - x$$

und damit

$$f^q(x, b) - x - 2\pi p \leq qc_1 - 2\pi p < 0 < qc_2 - 2\pi p \leq f^q(x, a) - x - 2\pi p.$$

Somit gelten alle Voraussetzungen des Theorems 1 auf Seite 5, d.h. für alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $c_1 < 2\pi \frac{p}{q} < c_2$ existiert ein Fixpunkt F mit $s^{-p} \circ \phi^q(F) = F$. Sei nun $\frac{\tilde{p}}{q} \in \mathbb{Q}$ eine weitere von $\frac{p}{q}$ verschiedene rationale Zahl, $\frac{p}{q} \neq \frac{\tilde{p}}{q}$, aus dem Intervall (c_1, c_2) , dann existiert nach

Theorem 1 ein weiterer Fixpunkt \tilde{F} von $s^{-\tilde{p}} \circ \phi^{\tilde{q}}(\tilde{F}) = \tilde{F}$, der nicht äquivalent ist zum Fixpunkt F .

Wenn man annimmt, dass F und \tilde{F} äquivalent sind, dann gilt $\tilde{F} = s^j(F)$. Nach Voraussetzung kommutieren s und ϕ . Demzufolge ist die folgende Gleichungskette erfüllt:

$$\begin{aligned} \phi^{\tilde{q}}(s^{-j}(\tilde{F})) &= \phi^{\tilde{q}}(F) \\ &= s^{-j}(\phi^{\tilde{q}}(\tilde{F})) \\ &= s^{-j} \circ \underbrace{\phi^{\tilde{q}}(\tilde{F})}_{=s^{\tilde{p}}(\tilde{F})} \\ &= s^{-j+\tilde{p}}(\tilde{F}) \\ &= s^{\tilde{p}}(\underbrace{s^{-j}(\tilde{F})}_=F) \\ &= s^{\tilde{p}}(F). \end{aligned}$$

Durch Symmetrie in $\frac{p}{q}$ und $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ ergibt sich

$$\phi^{q\tilde{q}}(F) = s^{q\tilde{p}}(F) = s^{\tilde{q}p}(F).$$

Daraus folgt:

$$q\tilde{p} = \tilde{q}p \Leftrightarrow \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} = \frac{p}{q} \quad \not\Leftarrow \text{ zur Annahme.}$$

Somit erschließt sich insgesamt die Behauptung. \square

Bemerkung. Eine wichtige Voraussetzung für das Theorem 3 auf Seite 24, in welchem die „Twist-Bedingung“ spezialisiert wurde, ist die Eigenschaft der Flächenerhaltung. Betrachte dazu das folgende Beispiel:

Beispiel. Seien $\alpha = \alpha(y)$ und $\beta = \beta(y)$ stetige Funktionen auf dem Streifen S . Sei β eine streng monoton wachsende Abbildung. Weiter gelte die „Twist-Bedingung“ mit $\alpha(a) < 0$ und $\alpha(b) > 0$. Dann ist die Abbildung $\phi: S \rightarrow S$ vermöge

$$(x, y) \mapsto (x + \alpha(y), \beta(y))$$

ein nicht-flächenerhaltender Homöomorphismus.

Beweis. Es gilt für das Differential der Abbildung ϕ

$$D\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha'(y) dy \\ 0 & \beta'(y) dy \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$\phi^*(dx \wedge dy)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \beta'(y) dy \neq 1.$$

Das heißt, die Abbildung ϕ ist nicht flächenerhaltend. Aber da $\beta(y) \neq y$ in $a < y < b$ gilt, weil β streng monoton wachsend ist, hat die Abbildung ϕ keinen Fixpunkt. \square

Kapitel 2

Das Billardkugelproblem

In diesem Abschnitt soll die Anwendung des Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorems auf ein geometrisches Problem, scilicet das Billardkugelproblem, dargelegt werden. Dazu werden wir zunächst einen Billard definieren, um darauf aufbauend eine Abbildung zur Beschreibung dieses Vorgangs herzuleiten. Mit Hilfe dieser Abbildung werden wir das Billardkugelproblem untersuchen.

Diese Ausführungen stützen sich auf [MZ05], [Tab05] sowie [Bir27].

2.1 Billardabbildung

Im Folgenden betrachten wir eine strikt konvexe Region D mit Rand in der Ebene \mathbb{R}^2 , welche einen Billardtisch darstellen soll. Dabei bilde eine geschlossene C^1 -Kurve den Rand der Region D . Das Ziel dieses Kapitels besteht in der Untersuchung der Wege einer punktförmig gedachten Kugel, die sogenannte Billardkugel, welche sich reibungsfrei innerhalb eines idealen Billardtisches D bewegt. Dabei habe die Kugel eine konstante Geschwindigkeit und stoße elastisch an die Bande an, d.h. die Kugel wird gemäß des Reflexionsgesetzes unter dem Einfallswinkel reflektiert. Danach setzt die Kugel ihren Weg mit gleicher Geschwindigkeit, aber neuer Richtung fort. Dieser Vorgang wiederholt sich, vgl. Abbildung 2.1.

Definition 3. Dieser soeben beschriebene Vorgang wird **Billard** genannt.

Als Anwendung des in Kapitel 1 erläuterten Theorems 1 sollen nun Billards untersucht werden. Dazu betrachten wir eine Abbildung auf der soeben beschriebenen Region D . Zunächst parametrisieren wir zu diesem Zweck die Randkurve mit Hilfe der Bogenlänge. Ohne Einschränkung sei die Länge der Randkurve $L = 2\pi$. Wir betrachten eine glatte

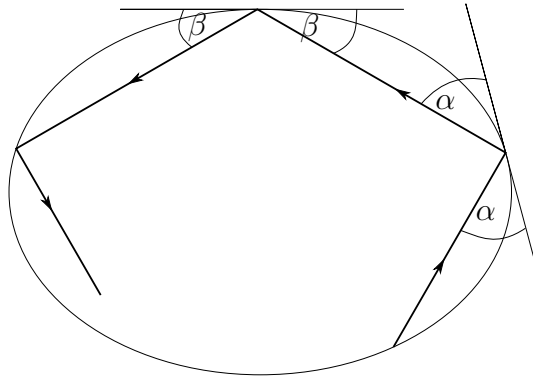


Abbildung 2.1: Darstellung eines Billardzuges

Funktion $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $c(0) = c(2\pi)$, sodass gilt:

$$\partial D = \{c(r) \mid r \in [0, 2\pi]\}.$$

Die Billardkugel treffe den Rand im Punkt $s_0 = c(r_0)$ mit Stoßrichtung $c'(r_0)$ und unter dem Einfallswinkel t_0 . Danach erreiche die Kugel den Punkt $s_1 = c(r_1)$ unter dem zugehörigen Winkel t_1 mit dem Tangentialvektor $c'(r_1)$. Aus diesen Vorgaben bilden wir nun die Abbildung

$$\phi: \partial D \times [0, \pi] \rightarrow \partial D \times [0, \pi].$$

Mit Hilfe dieser Abbildung wird der Weg einer Billardkugel als Folge der $(s_i, t_i)_{i \geq 0}$ mit

$$\begin{aligned} \phi(s_i, t_i) &:= (s_{i+1}, t_{i+1}) \\ &= (s_i + f(s_i, t_i), g(s_i, t_i)) \end{aligned}$$

beschrieben. Hier sind die Funktionen f, g wieder analog zum Theorem 1 als stetig vorgegeben.

Definition 4. Eine Abbildung ϕ , wie oben definiert, wird als **Billardabbildung** bezeichnet.

Zur Eindeutigkeit dieser Billardabbildung ϕ müssen wir $f(s_i, t_i)$ fixieren, da $f(s_i, t_i)$ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π definiert ist. Dafür betrachten wir

$$\begin{aligned} \text{Für } t_i \rightarrow 0 : \quad & f(s_i, 0) = 0, \quad g(s_i, 0) = 0 \quad \text{und} \\ \text{für } t_i \rightarrow \pi : \quad & f(s_i, \pi) = 2\pi, \quad g(s_i, \pi) = \pi. \end{aligned}$$

Insgesamt umrundet somit das Bild $\phi(s_i, t_i)$ den Rand des Billardtisches D der Länge 2π .

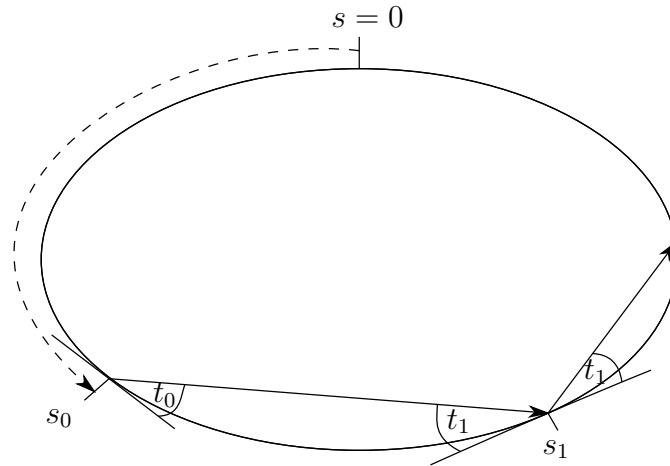


Abbildung 2.2: Darstellung der Koordinaten s_i und t_i

2.2 Anwendung des ersten Kapitels

Wir betrachten jetzt das Billardkugelproblem als beispielhafte Anwendung des Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorems. Durch die oben beschriebene mathematische Modellierung des Billardspiels haben wir eine Billardabbildung ϕ auf einem Kreisring $\partial D \times [0, \pi]$ erhalten. Es bleibt also noch die Überprüfung der Voraussetzungen aus dem Abschnitt 1.2 auf Seite 5, um ein dem Theorem 1 entsprechendes Ergebnis über Orbits auf einem strikt konvexen Billardtisch zu erhalten. Dazu betrachten wir zunächst das Resultat und werden im Beweis die angesprochenen Eigenschaften wiederfinden.

Theorem 4. *Auf einem strikt konvexen Billardtisch D existieren unendlich viele unterschiedliche periodische Orbits.*

Beweis. Wir prüfen zunächst, dass die Abbildung ϕ das Flächenelement $\sin t_i dt_i \wedge ds_i$ erhält.

Behauptung. *Es gilt also:*

$$\sin t_0 dt_0 \wedge ds_0 = \sin t_i dt_i \wedge ds_i.$$

Beweis. Dazu führen wir einige Bezeichnungen ein. Sei $\tau(s_0)$ der Winkel zwischen der positiv orientierten Tangente an der Randkurve am Punkt s_0 und einer festen Richtung, der Horizontalen, weiter sei $\alpha = t_0 + \tau(s_0)$, vgl. Abbildung 2.3.

Mit Hilfe der Abbildung 2.3 kann man sich folgendes überlegen:

$$\alpha = t_0 + \tau(s_0) = -t_1 + \tau(s_1).$$

Für festes $\alpha = t_0 + \tau(s_0)$ ergibt sich aus dem Sinusgesetz für Dreiecke die Identität

$$-\frac{ds_1}{\sin t_0} = \frac{ds_0}{\sin t_1}.$$

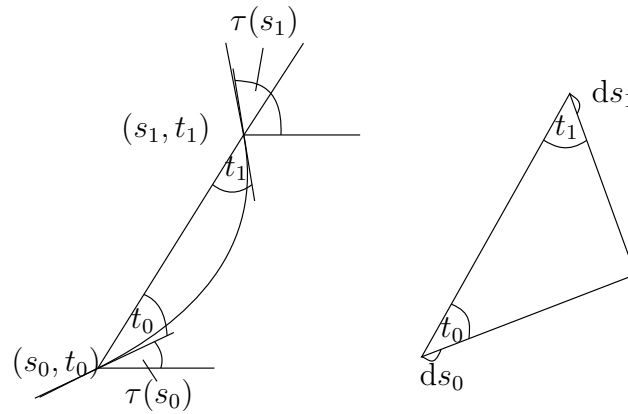


Abbildung 2.3: Ausschnitt der Region D

Damit gilt also:

$$-\frac{ds_1}{ds_0} = \frac{\sin t_0}{\sin t_1}.$$

Daraus folgt für beliebiges α die Gleichung:

$$\sin t_0 ds_0 \wedge d\alpha = -\sin t_1 ds_1 \wedge d\alpha.$$

Aus $d\alpha = dt_0 + \tau'(s_0) ds_0 = -dt_1 + \tau'(s_1) ds_1$ wird ersichtlich, dass

$$\begin{aligned} \sin t_0 ds_0 \wedge d\alpha &= \sin t_0 ds_0 \wedge (dt_0 + \tau'(s_0) ds_0) \\ &= \sin t_0 ds_0 \wedge dt_0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\sin t_1 ds_1 \wedge d\alpha &= -\sin t_1 ds_1 \wedge (-dt_1 + \tau'(s_1) ds_1) \\ &= \sin t_1 ds_1 \wedge dt_1 \\ &= -\sin t_1 dt_1 \wedge ds_1 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Somit folgt insgesamt:

$$\sin t_0 dt_0 \wedge ds_0 = \sin t_1 dt_1 \wedge ds_1.$$

Für alle $i \geq 0$ folgt die Gleichheit analog. □

Nun führen wir Polarkoordinaten r, θ vermöge

$$\frac{1}{2}r^2 = c - \cos t, \quad \theta = s \quad \text{mit } c > 1$$

ein. Somit ergibt sich für den Kreisring $R := \partial D \times [0, \pi]$

$$\sqrt{2(c-1)} < r < \sqrt{2(c+1)}$$

und für das Standardflächenelement

$$\sin t_i dt_i \wedge ds_i = r dr \wedge d\theta.$$

Dabei ist offensichtlich, dass die Ränder des Kreisrings invariant unter ϕ sind. Außerdem ist die „Twist-Bedingung“ erfüllt, da der Rand des Billardtisches ∂D eine feste Orientierung trägt und somit durch das Kreuzprodukt mit dem Intervall $[0, \pi]$ zwei entgegengesetzt orientierte Randkreise des Kreisrings R entstehen. Also können wir das Theorem 3 auf Seite 24 anwenden.

Sei dazu eine beliebige rationale Zahl $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \frac{p}{q} < 1$ gegeben. Dann existiert zu jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q}$ ein Fixpunkt F mit

$$\rho^{-p} \circ \phi^q(F) = F,$$

wobei $\rho: R \rightarrow R$ durch $(s_i, t_i) \mapsto (s_i + 2\pi, t_i)$ gegeben ist und $\rho \circ \phi = \phi \circ \rho$ erfüllt. Diese Fixpunkte entsprechen geschlossenen Orbits des Billardproblems mit q Randanstößen je Periode. Dabei werden die entgegengesetzten Orbits per Reflexionsabbildung $\tau: R \rightarrow R$ gegeben durch $(s_i, t_i) \mapsto (s_i, \pi - t_i)$ und entsprechend mittels $1 - \frac{p}{q}$ statt $\frac{p}{q}$ gebildet. Wir zeigen also, dass identische Orbits mit unterschiedlicher Orientierung existieren.

Behauptung. *Es gelten:*

$$\begin{aligned} \tau \circ \phi &= \rho \circ \phi^{-1} \circ \tau && \text{und} \\ \phi^j &= \tau \circ \rho^j \circ \phi^{-j} \circ \tau. \end{aligned}$$

Beweis. Betrachte dazu einerseits

$$\begin{aligned} \tau \circ \phi(s_i, t_i) &= \tau(s_{i+1}, t_{i+1}) \\ &= (s_{i+1}, \pi - t_{i+1}) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \rho \circ \phi^{-1} \circ \tau(s_i, t_i) &= \rho \circ \phi^{-1}(s_i, \pi - t_i) \\ &= \rho(s_{i+1}, \pi - t_{i+1}) \\ &= (s_{i+1} + 2\pi, \pi - t_{i+1}). \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke entsprechen dem gleichen Punkt, da $f(s_i, t_i)$ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π definiert ist.

Da die Identität

$$\begin{aligned}
 \tau^2(s_i, t_i) &= \tau \circ \tau(s_i, t_i) \\
 &= \tau(s_i, \pi - t_i) \\
 &= (s_i, \pi - (\pi - t_i)) \\
 &= (s_i, t_i) \\
 &= id
 \end{aligned}$$

gilt, folgt dann:

$$\phi^j = \tau \circ \rho^j \circ \phi^{-j} \circ \tau. \quad \square$$

Wir wollen nun zeigen, dass für einen periodischen Punkt m mit Rotationszahl $\frac{p}{q}$, d.h. für

$$\phi^q(m) = \rho^p(m),$$

die Reflexion $\tau(m)$ ebenfalls ein periodischer Punkt mit derselben Periode q mit Rotationszahl $1 - \frac{p}{q}$ ist.

Behauptung. *Es ergibt sich folglich:*

$$\phi^q(\tau(m)) = \rho^{q-p}(\tau(m)).$$

Beweis. Betrachte dazu:

$$\phi^{-q} \circ \rho^{-p} \circ \phi^q(m) = \phi^{-q} \circ \rho^{-p} \circ \rho^p(m).$$

Daraus ergibt sich:

$$\rho^{-p}(m) = \phi^{-q}(m),$$

da $\rho \circ \phi = \phi \circ \rho$ gilt. Weiter folgt dann aus

$$\phi^{-q}(m) = \tau \circ \rho^{-q} \circ \phi^q \circ \tau(m),$$

dass gilt:

$$\phi^q(\tau(m)) = \rho^q \circ \tau \circ \underbrace{\phi^{-q}(m)}_{\rho^{-p}(m)}.$$

Da $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$ gilt, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \phi^q(\tau(m)) &= \rho^q \circ \tau \circ \rho^{-p}(m) \\
 &= \rho^q \circ \rho^{-p}(\tau(m)) \\
 &= \rho^{q-p}(\tau(m)).
 \end{aligned}$$

Somit folgt insgesamt:

$$\phi^q(\tau(m)) = \rho^{q-p}(\tau(m)). \quad \square$$

Damit haben wir gezeigt, dass Orbits mit entgegengesetzter Orientierung die gleichen Fixpunkte besitzen. Aus diesem Grund schränken wir den Bereich der rationalen Zahl $\frac{p}{q}$ ein:

$$0 \leq \frac{p}{q} < \frac{1}{2}.$$

Somit existiert für jede rationale Zahl $\frac{p}{q}$ mit $0 \leq \frac{p}{q} < \frac{1}{2}$ ein periodischer Orbit, d.h. es gibt auf einem strikt konvexen Billardtisch D unendlich viele unterschiedliche periodische Orbits. \square

2.2.1 Geometrische Darstellung

Als Abschluss dieser Bachelorarbeit präsentieren wir eine anschauliche Darstellung der Rotationszahl $\frac{p}{q}$, welche den durchschnittlichen Drehwinkel entlang eines Orbits einer Abbildung beschreibt. An Abbildung 2.4 wird ersichtlich, dass der Wert p die Anzahl der Richtungswechsel des periodischen Orbits beschreibt und der Wert q für die Anzahl der Randanstöße steht.

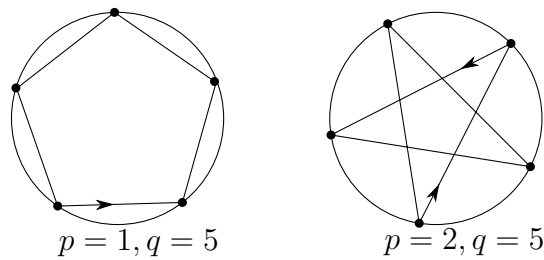


Abbildung 2.4: Geometrische Interpretation periodischer Orbits

Literaturverzeichnis

- [Bir13] BIRKHOFF, George D.: Proof of Poincaré's geometric theorem. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 14 (1913), S. 14–22
- [Bir27] BIRKHOFF, George D.: On the periodic motions of dynamical systems. In: *Acta Mathematica Volume 50* (1927), S. 359–379
- [MS98] MC DUFF, Dusa ; SALAMON, Dietmar: *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford Science Publications, 1998
- [MZ05] MOSER, Jürgen ; ZEHNDER, Eduard J.: *Notes on Dynamical Systems*. AMS/CIMS, 2005
- [Poi12] POINCARÉ, Henri: Sur un théorème de géométrie. In: *Rend. Circ. Mat. Palermo* 33 (1912), S. 375–407
- [Tab05] TABACHNIKOV, Serge: *Geometry an Billards*. AMS/ MASS, 2005

Plagiatserklärung der Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über *das Poincaré-Birkhoff Fixpunkttheorem und Anwendungen auf innere Billards* selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Ort, Datum

Unterschrift

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Ort, Datum

Unterschrift