Espaços Ultramétricos e o Teorema de Płoski

Felipe Espreafico Guelerman Ramos

Intituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP

felipe.espreafico.ramos@usp.br

5 de Agosto de 2018

Visão Geral

1. O Teorema de Płoski
   - Multiplicidade e Número de Intersecção para curvas planas
   - Enunciado do Teorema
   - O Teorema de Puiseux e Expoentes Característicos
2. Espaços Ultramétricos, Árvores e a relação entre esses conceitos
   - Espaços Ultramétricos
   - A árvore associada a um espaço ultramétrico
3. Reformulação do teorema de Płoski e demonstração
   - Reformulações do Teorema
   - A árvore de Eggers-Wall
   - Função de Profundidade

Curvas Planas

Aqui, apresentaremos algumas definições básicas sobre curvas planas:

Curvas Planas

Aqui, apresentaremos algumas definições básicas sobre curvas planas:

Definição

Um germe de curva plana analítica é simplesmente o conjunto de zeros em uma vizinhança de zero $\mathbb{C}^2$ de uma equação holomorfa $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Em nossas considerações, $f(0,0) = 0$.
A curva é irredutível se f é irredutível no anel $\mathbb{C}\{x, y\}$.

Curvas Planas

Aqui, apresentaremos algumas definições básicas sobre curvas planas:

Definição

Um germe de curva plana analítica é simplesmente o conjunto de zeros em uma vizinhança de zero $\mathbb{C}^2$ de uma equação holomorfa $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Em nossas considerações, $f(0,0) = 0$.
A curva é irredutível se f é irredutível no anel $\mathbb{C}\{x, y\}$. (na verdade, a definição de germe é ligeiramente mais técnica)

Curvas Planas

Aqui, apresentaremos algumas definições básicas sobre curvas planas:

Definição

Um germe de curva plana analítica é simplesmente o conjunto de zeros em uma vizinhança de zero $\mathbb{C}^2$ de uma equação holomorfa $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Em nossas considerações, $f(0,0) = 0$.
A curva é irredutível se f é irredutível no anel $\mathbb{C}\{x, y\}$. (na verdade, a definição de germe é ligeiramente mais técnica)

Definição

A multiplicidade de uma curva $\mathcal{C} := Z(f)$ na origem é simplesmente o grau da parcela homogênea de f com o menor grau.

Curvas Planas

Aqui, apresentaremos algumas definições básicas sobre curvas planas:

Definição

Um germe de curva plana analítica é simplesmente o conjunto de zeros em uma vizinhança de zero $\mathbb{C}^2$ de uma equação holomorfa $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Em nossas considerações, $f(0,0) = 0$.
A curva é irredutível se f é irredutível no anel $\mathbb{C}\{x, y\}$. (na verdade, a definição de germe é ligeiramente mais técnica)

Definição

A multiplicidade de uma curva $\mathcal{C} := Z(f)$ na origem é simplesmente o grau da parcela homogênea de f com o menor grau.

Definição

Um ponto é singular se sua multiplicidade é maior que 1.

Multiplicidade de Intersecção

Já definimos a multiplicidade de um ponto, que mede quando pontos estão sobrepostos ou quando um ponto "vale"por mais de um. E se estivermos olhando pra mais de uma curva? Como ver quantos pontos "vale"um ponto na intersecção? Como definir multiplicidade de intersecção?

Multiplicidade de Intersecção

Já definimos a multiplicidade de um ponto, que mede quando pontos estão sobrepostos ou quando um ponto "vale"por mais de um. E se estivermos olhando pra mais de uma curva? Como ver quantos pontos "vale"um ponto na intersecção? Como definir multiplicidade de intersecção? Parametrizando!

Multiplicidade de Intersecção

Já definimos a multiplicidade de um ponto, que mede quando pontos estão sobrepostos ou quando um ponto "vale"por mais de um. E se estivermos olhando pra mais de uma curva? Como ver quantos pontos "vale"um ponto na intersecção? Como definir multiplicidade de intersecção? Parametrizando!

Definição

Dadas duas curvas planas irredutíveis A, B, sendo A dada pela equação $f = 0$ e B parametrizada injetivamente por $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, com $\varphi_i(0) = 0$. Definimos a multipicidade de intersecção das duas curvas na origem como a multiplicidade do zero como raiz da equação $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0$. Esscrevemos $A \cdot B$ para representar a multiplicidade de intersecção de A e B no zero.

Multiplicidade de Intersecção

Já definimos a multiplicidade de um ponto, que mede quando pontos estão sobrepostos ou quando um ponto "vale"por mais de um. E se estivermos olhando pra mais de uma curva? Como ver quantos pontos "vale"um ponto na intersecção? Como definir multiplicidade de intersecção? Parametrizando!

Definição

Dadas duas curvas planas irredutíveis A, B, sendo A dada pela equação $f = 0$ e B parametrizada injetivamente por $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, com $\varphi_i(0) = 0$. Definimos a multipicidade de intersecção das duas curvas na origem como a multiplicidade do zero como raiz da equação $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0$. Esscrevemos $A \cdot B$ para representar a multiplicidade de intersecção de A e B no zero.

Observe que a multiplicidade na origem é a simplesmente a multiplicidade de intersecção com uma reta transversal a sua curva.

Multiplicidade de Intersecção

Já definimos a multiplicidade de um ponto, que mede quando pontos estão sobrepostos ou quando um ponto "vale"por mais de um. E se estivermos olhando pra mais de uma curva? Como ver quantos pontos "vale"um ponto na intersecção? Como definir multiplicidade de intersecção? Parametrizando!

Definição

Dadas duas curvas planas irredutíveis A, B, sendo A dada pela equação $f = 0$ e B parametrizada injetivamente por $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, com $\varphi_i(0) = 0$. Definimos a multipicidade de intersecção das duas curvas na origem como a multiplicidade do zero como raiz da equação $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = 0$. Esscrevemos $A \cdot B$ para representar a multiplicidade de intersecção de A e B no zero.

Observe que a multiplicidade na origem é a simplesmente a multiplicidade de intersecção com uma reta transversal a sua curva.

Multiplicidade de Intersecção

Exemplo

Considere as curvas $A : y^2 - x^3 = 0$ e $B : y^3 - x^5 = 0$. Ambas passam pela origem. Para calcular a multiplicidade de intersecção, parametrizamos a primiera curva como (t^2, t^3) e substituímos na segunda:

$$t^9 - t^{10} = 0 \longrightarrow t^9(1-t) = 0 \longrightarrow 0 \text{ tem multiplicidade 9 como raiz}$$

Logo, $A \cdot B = 9$

O Teorema de Płoski

Agora que temos nossas definições, podemos enunciar o teorema principal.

O Teorema de Płoski

Agora que temos nossas definições, podemos enunciar o teorema principal.

Teorema (Płoski '85)

Sejam A, B e C germes de curvas irredutíveis. Então, a menos de permutar A, B e C, temos:

$$\frac{A \cdot B}{m(A)m(B)} \geq \frac{A \cdot C}{m(A)m(C)} = \frac{B \cdot C}{m(B)m(C)}$$

O Teorema de Płoski

Agora que temos nossas definições, podemos enunciar o teorema principal.

Teorema (Płoski '85)

Sejam A, B e C germes de curvas irredutíveis. Então, a menos de permutar A, B e C, temos:

$$\frac{A \cdot B}{m(A)m(B)} \geq \frac{A \cdot C}{m(A)m(C)} = \frac{B \cdot C}{m(B)m(C)}$$

Exemplo

$$A : y^2 - x^3 = 0 \quad B : y^3 - x^5 = 0 \quad C : y^5 - x^6 = 0$$

$$m(A) = 2 \quad m(B) = 3 \quad m(C) = 5$$

$$A \cdot B = 9 \quad A \cdot C = 12 \quad B \cdot C = 18$$

$$\frac{9}{6} \geq \frac{12}{10} = \frac{18}{15}$$

Toerema de Puiseux

Como conseguir uma parametrização para calcular a multiplicidade de intersecção? O teorema de Puiseux garante que sempre conseguimos uma parametrização:

Toerema de Puiseux

Como conseguir uma parametrização para calcular a multiplicidade de intersecção? O teorema de Puiseux garante que sempre conseguimos uma parametrização:

Teorema (de Puiseux

Seja $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ irredutível tal que $x = 0$ não seja tangente a curva definida por f. Então existe uma parametrização injetiva da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = t^m \\ y = \displaystyle\sum_{k=m}^{\infty} t^k \end{cases}$$

ou seja, a menos de escolher raizes da unidade, temos:

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k/m}$$

Toerema de Puiseux

O teorema de Puiseux diz muito mais sobre a geometria das curvas do que parece, como veremos no decorrer da palestra. Entre os expoentes da expansão, temos alguns mais importantes.

Definição

Os expoentes característicos da expansão de Puiseux de uma certa curva são definidos indutivamente. O primeiro expoente é o menor expoente que não é inteiro.
Depois, o segundo expoente é o menor expoente que não está no grupo aditivo gerado por 1 e pelo primeiro expoente. E assim por diante até que tenhamos gerado todos os expoentes, o que sempre ocorre após finitos passos, se a parametrização for injetiva em torno da origem.
Denotamos esses expoentes por α_k.

Toerema de Puiseux

O teorema de Puiseux diz muito mais sobre a geometria das curvas do que parece, como veremos no decorrer da palestra. Entre os expoentes da expansão, temos alguns mais importantes.

Definição

Os expoentes característicos da expansão de Puiseux de uma certa curva são definidos indutivamente. O primeiro expoente é o menor expoente que não é inteiro.
Depois, o segundo expoente é o menor expoente que não está no grupo aditivo gerado por 1 e pelo primeiro expoente. E assim por diante até que tenhamos gerado todos os expoentes, o que sempre ocorre após finitos passos, se a parametrização for injetiva em torno da origem.
Denotamos esses expoentes por α_k.

Exemplo

$A : y = x^{3/2} + x^{7/4} + x^{13/6} + x^{9/4} + x^{17/6} + x^{3} + x^{23/2}$
$\alpha_1 = \frac{3}{2}$, $\alpha_2 = \frac{7}{4}$, $\alpha_3 = \frac{13}{6}$

Espaços Ultramétricos

Definição

Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é ultramétrico se d satisfaz a seguinte "desigualdade triangular forte":

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$$

Espaços Ultramétricos

Definição

Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é ultramétrico se d satisfaz a seguinte "desigualdade triangular forte":

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$$

Com essa definição, obtemos algumas propriedades interessantes:

Espaços Ultramétricos

Definição

Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que X é ultramétrico se d satisfaz a seguinte "desigualdade triangular forte":

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(y, z)\}$$

Com essa definição, obtemos algumas propriedades interessantes:

Teorema

Seja (X, d) um espaço métrico. São equivalentes:

a) d é uma ultramétrica.

b) Os triângulos são isósceles ou equiláteros.

c) Todos os pontos de uma bola fechada são seu centro.

d) Duas bolas fechadas são disjuntas ou uma está contida na outra.

Árvore associada

Definição

Uma árvore é um conjunto parcialmente ordenado $(T, <)$ tal que, para qualquer $t \in T$, $\{s \in T : s < t\}$ é bem ordenado com a ordem induzida. Nessa apresentação, nossas árvores tem raiz, isto é, uma elemento que é menor que todos os outros.

Árvore associada

Definição

Uma árvore é um conjunto parcialmente ordenado $(T, <)$ tal que, para qualquer $t \in T$, $\{s \in T : s < t\}$ é bem ordenado com a ordem induzida. Nessa apresentação, nossas árvores tem raiz, isto é, uma elemento que é menor que todos os outros.

Definição

Uma função de profundidade em uma árvore $(T, <)$ é uma função $f : T \to [0, \infty]$ estritamente decrescente.

Árvore associada

Definição

Uma árvore é um conjunto parcialmente ordenado $(T, <)$ tal que, para qualquer $t \in T$, $\{s \in T : s < t\}$ é bem ordenado com a ordem induzida. Nessa apresentação, nossas árvores tem raiz, isto é, uma elemento que é menor que todos os outros.

Definição

Uma função de profundidade em uma árvore $(T, <)$ é uma função $f : T \to [0, \infty]$ estritamente decrescente.

Considere o conjunto de $\mathcal{B}(X)$, o conjunto de bolas fechadas do espaço ultramétrico X. Podemos definir um ordem parcial nesse espaço (de uma forma um pouco estranha):

$$B_1 \prec B_2 \iff B_1 \supset B_2$$

Árvore Associada

Com essa definição, temos:

Proposição

Se X é um espaço ultramétrico, então $(\mathcal{B}(X), \prec)$ é uma árvore e a função que calcula o raio, $R : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ é uma função de profundidade.

Árvore Associada

Com essa definição, temos:

Proposição

Se X é um espaço ultramétrico, então $(\mathcal{B}(X), \prec)$ é uma árvore e a função que calcula o raio, $R : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ é uma função de profundidade.

Por outro lado, se temos uma árvore T e uma função de profundidade D, com D zerando nas folhas, temos a recíproca.

Árvore Associada

Com essa definição, temos:

Proposição

Se X é um espaço ultramétrico, então $(\mathcal{B}(X), \prec)$ é uma árvore e a função que calcula o raio, $R : \mathcal{B}(X) \to [0, \infty]$ é uma função de profundidade.

Por outro lado, se temos uma árvore T e uma função de profundidade D, com D zerando nas folhas, temos a recíproca.

Proposição

Seja T uma árvore munida de uma função de profundidade D, com D zerando no conjunto $F(T)$ de folhas

$$d : F(T) \times F(T) \to [0, \infty]$$

$$(A, B) \mapsto D(inf(A, B))$$

é uma ultramétrica em $L(T)$.

Reformulação do Teorema de Płoski

Utilizando a teoria de ultramétricas que acabamos de desenvolver, podemos ver que o seguinte teorema é equivalente ao teorema de Płoski.

Reformulação do Teorema de Płoski

Utilizando a teoria de ultramétricas que acabamos de desenvolver, podemos ver que o seguinte teorema é equivalente ao teorema de Płoski.

Teorema (Płoski '85)

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de germes de curvas planas irredutíveis. Então:

$$U(A,B) = \begin{cases} \frac{m(A)m(B)}{A \cdot B}, & \text{se } A \neq B \\ 0, & \text{se } A = B \end{cases}$$

é uma ultramétrica em $\mathcal{C}$.

Reformulação do Teorema de Płoski

Utilizando a teoria de ultramétricas que acabamos de desenvolver, podemos ver que o seguinte teorema é equivalente ao teorema de Płoski.

Teorema (Płoski '85)

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de germes de curvas planas irredutíveis. Então:

$$U(A,B) = \begin{cases} \frac{m(A)m(B)}{A \cdot B}, & \text{se } A \neq B \\ 0, & \text{se } A = B \end{cases}$$

é uma ultramétrica em $\mathcal{C}$.

É fácil ver que esse teorema é equivalente ao original, basta usar o fato dos triângulos serem todos isósceles.

Reformulação do Teorema de Płoski

Utilizando a teoria de ultramétricas que acabamos de desenvolver, podemos ver que o seguinte teorema é equivalente ao teorema de Płoski.

Teorema (Płoski '85)

Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de germes de curvas planas irredutíveis. Então:

$$U(A,B) = \begin{cases} \frac{m(A)m(B)}{A \cdot B}, \text{ se } A \neq B \\ 0, \text{ se } A = B \end{cases}$$

é uma ultramétrica em $\mathcal{C}$.

É fácil ver que esse teorema é equivalente ao original, basta usar o fato dos triângulos serem todos isósceles.

Para verficar que um função é uma ultramétrica, basta mostrar que ela satisfaz a desigualdade para um conjunto finito de elementos quaisquer. Isso nos motiva a enunciar a seguinte reformulação:

Reformulação do Teorema de Płoski

Para verficar que um função é uma ultramétrica, basta mostrar que ela satisfaz a desigualdade para um conjunto finito de elementos quaisquer. Isso nos motiva a enunciar a seguinte reformulação:

Teorema (Płoski '85)

Sejam $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ germes de curvas planas irredutíveis e seja $L \in \mathcal{C}$ um germe de uma curva suave transversal a todas elas. Então:

$$\frac{(L \cdot C_i)(L \cdot C_j)}{C_i \cdot C_j} \leq \max \left\{ \frac{(L \cdot C_i)(L \cdot C_k)}{C_i \cdot C_k}, \frac{(L \cdot C_k)(L \cdot C_j)}{C_k \cdot C_j} \right\}$$

para quaisquer $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$

Reformulação do Teorema de Płoski

Para verficar que um função é uma ultramétrica, basta mostrar que ela satisfaz a desigualdade para um conjunto finito de elementos quaisquer. Isso nos motiva a enunciar a seguinte reformulação:

Teorema (Płoski '85)

Sejam $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ germes de curvas planas irredutíveis e seja $L \in \mathcal{C}$ um germe de uma curva suave transversal a todas elas. Então:

$$\frac{(L \cdot C_i)(L \cdot C_j)}{C_i \cdot C_j} \leq \max \left\{ \frac{(L \cdot C_i)(L \cdot C_k)}{C_i \cdot C_k}, \frac{(L \cdot C_k)(L \cdot C_j)}{C_k \cdot C_j} \right\}$$

para quaisquer $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$

Para ver que essa versão é equivalente à anterior, basta utilizar a transversalidade, já que teremos $m(C_i) = L \cdot C_i$ e, portanto, a equivalência.

Ingredientes da Demonstração

- A ideia da demonstração do teorema será construir uma árvore e uma função de profundidade e mostrar que o espaço ultramétrico associado a essa árvore é justamente o desejado.

Ingredientes da Demonstração

- A ideia da demonstração do teorema será construir uma árvore e uma função de profundidade e mostrar que o espaço ultramétrico associado a essa árvore é justamente o desejado.
- Para isso, vamos usar um teorema clássico de Max Noether que relaciona a séries de Puiseux e conceito de exponente característico (como vimos no começo da apresentação) de f com números de intersecção.

A árvore de Eggers-Wall

Vamos construir, primeiro, o segmento de Eggers-Wall relativo a curva irredutível C e a curva suave transversal a C, L, que vamos supor que seja $V(x)$.

A árvore de Eggers-Wall

Vamos construir, primeiro, o segmento de Eggers-Wall relativo a curva irredutível C e a curva suave transversal a C, L, que vamos supor que seja $V(x)$.
Seja C uma curva irredutível dada pela parametrização de Puiseux:

$$\begin{cases} x = t^m \\ y = \sum_{k=m}^{\infty} t^k \end{cases}$$

Suponha que os expoentes característicos relativos a L são $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$.

A árvore de Eggers-Wall

Definição

O segmento de Eggers-Wall de C é o segmento $[0, \infty]$ com os expoentes característicos marcados munida de uma função i_C, definida da seguinte forma:

$$i_C(x) = mmc\{\text{denominador de } \alpha_j : \alpha_j < x\}$$

A árvore de Eggers-Wall

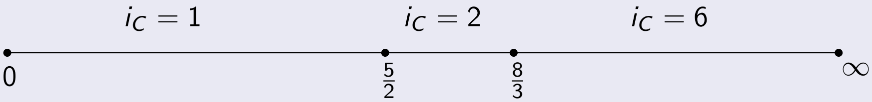
Definição

O segmento de Eggers-Wall de C é o segmento $[0, \infty]$ com os expoentes característicos marcados munida de uma função i_C, definida da seguinte forma:

$$i_C(x) = mmc\{\text{denominador de } \alpha_j : \alpha_j < x\}$$

Exemplo

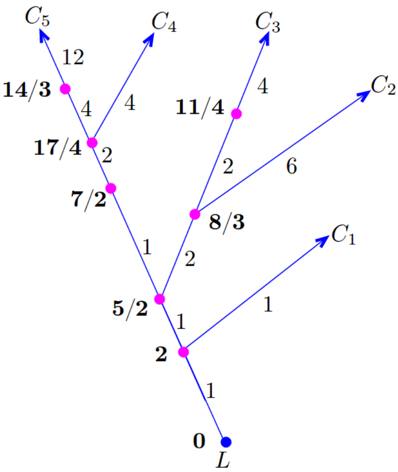
Seja C dada por $y = x^{5/2} + x^{8/3}$. Os expoentes característicos são $\frac{5}{2}$ e $\frac{8}{3}$. O segmento, portanto, terá esses dois pontos marcados. A função i_L vale 1 para $x \leq \frac{5}{2}$, vale 2 para $\frac{5}{2} < x \leq \frac{8}{3}$ e 6 para $x > \frac{8}{3}$.



A árvore de Eggers-Wall

Agora suponha que temos várias curvas irredutiveis $C_1, \ldots, C_n$ e reta $L = V(x)$. A **árvore de Eggers-Wall** relativa a essas curvas é a colagem dos segmentos de Eggers-Wall de cada curva.
Dados dois segmentos, identificamos os segmentos até que encontremos um expoente característico em um que não existe no outro.
As funções i_{C_k} induzem uma função i_L definida em toda árvore
Vamos entender em um exemplo:
Sejam C_i curvas irredutíveis dadas pelas equações
$C_1 : y = x^2$
$C_2 : y = x^{5/2} + x^{8/3}$
$C_3 : y = x^{5/2} + x^{11/4}$
$C_4 : y = x^{7/2} + x^{17/4}$
$C_5 : y = x^{7/2} + x^{17/4} + x^{14/3}$

A árvore de Eggers-Wall



Função de Profundidade na árvore

Agora que temos a árvore, precisamos construir uma função de profundidade nela para obtermos uma ultramétrica.

Definição

A **complexidade de contato** de um ponto P na árvore de Eggers-Wall é defnida como:

$$c(P) = \int_L^P \frac{1}{i_L(x)} dx$$

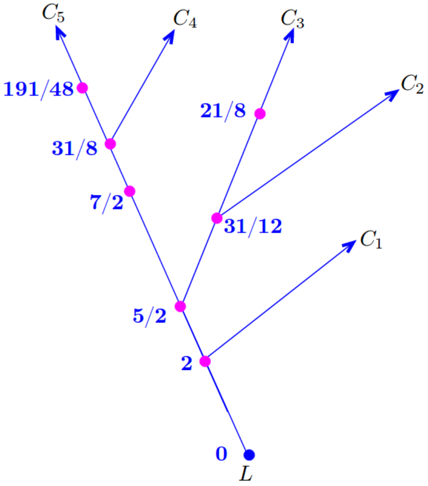
Exemplo

Na árvore anterior, temos:

$$c(8/3) = \int_0^{8/3} \frac{1}{i_L(x)} dx = \int_0^2 1 dx + \int_2^{5/2} 1 dx + \int_{5/2}^{8/3} \frac{1}{2} dx =$$

$$2 + 1/2 + 1/12 = 31/12$$

Função de Profundidade na Árvore



Função de Profundidade na Árvore

É fácil ver que a função de complexidade de contato é crescente e, portanto, seu inverso é uma função de profundidade. Já temos nossa candidata a função de profundidade. Observando que a integral dá infinito nas folhas, seu inverso pode ser definido como dando zero. Logo, sabemos que $\frac{1}{c(inf\{A,B\})}$ define uma ultramétrica para $A, B \in \mathcal{C}$
O próximo teorema, que remonta a Max Noether, mostra que, de fato, essa função de profundidade associada gera a ultramétrica do teorema de Płoski:

Teorema (Max Noether)

$$\frac{1}{c\{(inf(A,B)\}} = \frac{(L \cdot A)(L \cdot B)}{A \cdot B}$$

Caso de Superfícies Singulares

- Essa forma de estudar curvas em superfícies suaves via ultramétricas e árvores pode ser estendida para o caso singular, assim como os conceitos de multiplicidade de intersecção e multiplicidade ponto.
- Isso nos enunciar um análogo do toerema de Płoski nesse caso. O que ocorre é que o teorema passa a valer apenas para uma classe específica de superfícies singulares, as "arborescentes".
- De fato, essa caracterização está relacionada com a resolução da singularidade, já que singularidades "arborescentes"são exatamente aquelas cujo o grafo de resolução é uma árvore.
- A demonstração passa por contrução de árvores como a de Eggers-Wall e um pouco mais de ferramentas da geometria algébrica e teoria de grafos.
- De qualquer forma, essa visão das curvas é muito útil no entendimento da topologia das singularidades de curvas e superfícies.

Fim!

OBRIGADO!

References

Evelia R. García Barroso, Pedro D. González Pérez, Patrick Popescu-Pampu (2018)
The Valuative Tree is the projective limit of Eggers-Wall tree.
ArXiv e-prints

Evelia R. García Barroso, Pedro D. González Pérez, Patrick Popescu-Pampu (2018)
Ultrametric spaces of branches on arborescent singularities.
ArXiv e-prints

Evelia R. García Barroso, Pedro D. González Pérez, Patrick Popescu-Pampu, Matteo Ruggiero (2018)
Ultrametric properties for valuation spaces of normal surface singularities.
ArXiv e-prints

Charles Favre, Mattias Jonsson
The Valuative Tree
ArXiv e-prints

C. T. C. Wall (2018)
Singular Points of Plane Curves.
Cambdrige University Press