Mirror Symmetry, Categorias de Fukaya e a conjectura HMS

Seminário de Geometria IMECC

Felipe Espreafico Guelerman Ramos
IMPA

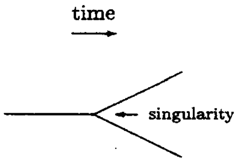
April 30, 2021

Tópicos

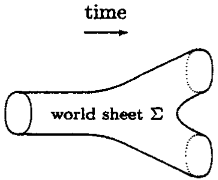
Introdução

O que é Mirror Simmetry?

Surge na Física, a partir do estudo da teoria das cordas. Em teoria das cordas, modela-se as partículas como pequeninas cordas.



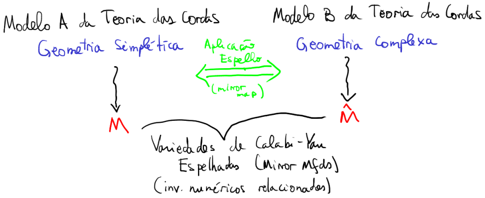
particle splitting,
represented as a point



particle splitting,
represented as a string

O que é Mirror Symmetry?

- Nesse contexto, as **variedades de Calabi-Yau** de dimensão 3 complexa aparecem como modelos naturais para as teorias físicas.
- Pode-se então construir uma teoria (lado A) com geometria simplética e outra (lado B) com geometria algébrica complexa que, no final, acabam sendo equivalentes.



O que é a conjectura HMS?

No início dos anos 90, um grupo de físicos, a partir de cálculos utilizando as teorias físicas, consegue calcular o número de curvas racionais de um certo grau em um quíntica de Calabi Yau genérica.

A PAIR OF CALABI–YAU MANIFOLDS AS AN EXACTLY SOLUBLE SUPERCONFORMAL THEORY*

Philip CANDELAS[1], Xenia C. DE LA OSSA[1,], Paul S. GREEN[2] and Linda PARKES[1]**

[1]*Theory Group, Department of Physics, The University of Texas, Austin, TX 78746, USA*
[2]*Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD 20742, USA*

Isso cria um interesse da comunidade matemática que, além de demonstrar rigorosamente o resultado, tenta entender o que está acontecendo.

O que é a conjectura HMS?

No ICM 1994, Kontsevich propõe uma conjectura que daria rigor ao conceito de variedades espelho. Para isso ele propõe que a simentria espelho na verdade viria de uma equivalência entre duas categorias, uma relacionada ao lado simplético e outra ao lado complexo.

HOMOLOGICAL ALGEBRA OF MIRROR SYMMETRY

MAXIM KONTSEVICH

Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn
and University of California, Berkeley

A categoria no lado simplético é associada **Categoria de Fukaya** e, no lado complexo, associada a **Cateogoria dos Feixes Coerentes**.

Definições Básicas

Nosso objetivo é dar as principais ideias envolvidas no lado simplético dessa história. Vamos dar as ideias envolvidas na definição da Categoria de Fukaya e enunciar a conjectura HMS. Aqui, damos as definições básicas que vamos precisar:

- Uma variedade simplética (M, ω) é uma variedade diferenciável M munida de uma 2-forma fechada não degenerada.Elas sempre tem dimensão par.
- Uma subvariedade $L \subset M$ de uma variedade simplética de dimensão $2n$ é chamada lagrangiana se tem dimensão n e $\omega|_L = 0$.

Definições Básicas

- Uma estrutura quase complexa em M é uma transformação linear $J : TM \to TM$ tal que $J^2 = -Id$. Se M é simplética Dizemos que J é compátivel com ω se $\omega(\cdot, J\cdot) = g(\cdot, \cdot)$ é uma métrica Riemanniana positivo definida. J é dita integrável se M com essa estrutura se torna uma variedade complexa.
- Uma variedade simplética é chamada Kähler se admite uma estrtura complexa compatível. Ou seja, variedades Kahler tem métrica, forma simplética e estrutura complexa.
- Uma variedade Kahler compacta de dimensão complexa n é de Calabi-Yau se tem fibrado canônico trivial, isto é, se tem uma n forma holomorfa que não se anula em nenhum ponto.

Homologia de Floer Lagrangiana

Motivação

A Homologia de Floer Lagrangiana nos dá uma forma de estudar como as lagrangianas se intersectam numa variedade simplética. Foi inicialmente introduzida por Floer para estudar a conjectura de Arnold.

Conjectura (Arnold)

Seja (M, ω) uma variedade simplética compacta e se φ um difeomorfismo *hamiltoniano* para o qual todos os pontos fixos são não degenerados. Então:

$$\#\{p \in M \mid \varphi(p) = p\} \geq \sum_{j=0}^{2n} h_j(M, \mathbb{Z}_2).$$

Estdar pontos fixos é estudar a intersecção do gráfico e da diagonal! Esses dois objetos são lagrangianos em $M \times M$!

Ideia Geral

J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
28 (1988) 513–547

MORSE THEORY FOR LAGRANGIAN INTERSECTIONS

ANDREAS FLOER

1. A ideia é definir um complexo a partir dos pontos de intersecção entre duas lagrangianas L_1 e L_2.
2. Para definir o operador de bordo desse complexo, precisarems contar o número de faixas J-holomorfas na mesma classe de homotopia conectando dois pontos.
3. Essa definição é uma adaptação do conceito de Homologia de Morse.

Ideia Geral

Morse Homology

- Morse function
- Critical points
- Gradient flows
- Morse index

$\longleftrightarrow$

Floer Homology

- Action functional
- Intersection points
- J-holomorphic strips
- Maslov Index

Faixas J holomorfas

Fixe M simplética e J uma estrutura quase complexa em M compatível com ω.

Definição

Um mapa J-holomorfo $f : S \to M$, onde S é uma superfície de Riemann, é um mapa que satisfaz as equações de Cauchy Riemann em relação a J e a estrutura complexa padrão de S.

No nosso caso, estaremos interessados em *faixas* J-holmorfas, que são mapas $(0,1) \times \mathbb{R} \to M$. Note que $(0,1) \times \mathbb{R}$ é um aberto de $\mathbb{C}^n$.

O Complexo de Floer

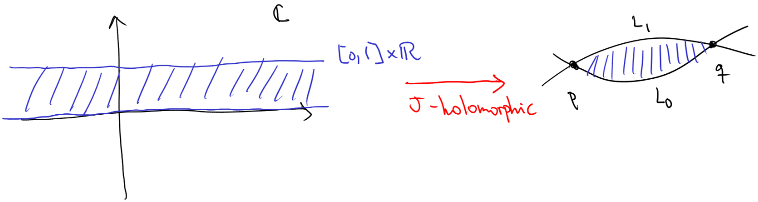
Fixe duas lagrangianas compactas L_0 e L_1 (que se intersectam transversalmente) em finitos pontos.
Nossa ideia é definir um complexo da forma:

$$CF(L_0, L_1) = \bigoplus_{p \in L_0 \cap L_1} \Lambda p.$$

onde Λ é um anel de coeficientes específico.
Para conseguir uma graduação, é preciso utilizar o chamado índice de Maslov. Para definir o bordo, temos que contar faixas J-holomorfas ligando dois pontos.

$$\partial(p) = \sum_{\substack{q \in L_0 \cap L_1 \\ A \in \pi_2(M, L_1 \cup L_2) \\ \mu(A) = 1}} \#M(p, q, J, A) \cdot T^{\int_A \omega} q$$

O Complexo de Floer



Homologia de Floer

Podemos provar, sobre certas condições, que $\partial^2 = 0$ (usando compactificação de Gromov). Podemos então calcular a homologia do complexo dada por

$$HF(L_0, L_1) = \frac{\ker \partial}{\operatorname{im} \partial}$$

.

Teorema (Floer)

Sejam $L_0, L_1 \subset M$ lagrangianas em uma variedade simplética satisfazendo algumas condições. Então:

- $HF(L_0, L_1) = HF(L_0, \varphi(L_1))$, where φ onde φ é um diffeomorfismo hamiltoniano.
- $HF(L, L) := HF(L, \varphi(L)) = H_*(L, \Lambda)$ (homologia singular com coeficientes em Λ).

A Categoria de Fukaya

Ingredientes

- A ideia é formar uma categoria com objetos sendo lagrangianas compactas de M e os espaços de morfismos sendo os complexos de Floer.
- Para fazer isso é preciso definir uma operação de composição, isto é, dadas três lagrangianas:

$$\circ : CF(L_0, L_1) \times CF(L_1, L_2) \to CF(L_0, L_2)$$

- A estrutura natural não será a de categoria usual, mas de um objeto mais elaborado: as chamadas categorias $\mathcal{A}_\infty$.

$\mathcal{A}_\infty$-categories

Definição

Fixe um corpo k. Uma categoria $\mathcal{A}_\infty$ $\mathcal{C}$ consiste de um conjunto de objetos, conjuntos $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para cada X, Y munidos de uma estrutura de espaços vetorias graduados sobre k e, por fim, mapas de composição d-lineares μ^d de grau $2 - d$:

$$\mu^d_{\mathcal{C}} : hom(X_0, X_1) \otimes \cdots \otimes hom(X_{d-1}, X_d) \to hom(X_0, X_d)$$

satisfazendo algumas condições algébricas (com sinais adequados):

$$\sum_{\substack{1 \leq m \leq d \\ 0 \leq n \leq d-m}} \mu^{d-m+1}(a_1, a_2, \ldots \mu^m(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}), a_{n+m+1}, \ldots, a_d)$$

$\mathcal{A}_\infty$-categories

μ^1 é um mapa $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ para o qual $\mu^1 \circ \mu^1 = 0$.

$$\Downarrow$$

$\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pode ser visto como um complexo de cadeia com bordo μ^1!

$\mu^2 i$ é um mapa $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \otimes hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$ que satisfaz a regra de Lebniz com respeito ao bordo μ^1:

$$\mu^1(\mu^2(a, b)) = \pm\mu^2(a, \mu^1(b)) \pm \mu^2(\mu^1(a), b)$$

Cateogoria Cohomológica

Podemos associar a $\mathcal{C}$ uma categoria (quase) honesta $\mathcal{H}(\mathcal{C})$:

- Objetos: Mesmos objetos de $\mathcal{C}$.
- Morfismos:$\hom_{\mathcal{H}(\mathcal{C})}(X, Y) := H^*(\hom_{\mathcal{C}}(X, Y), \mu^1)$
- Composição: $[f] \circ [g] := [\mu^2(f, g)]$

Note que a composição está bem defineda e é associativa. Poderíamos também considerar outra categoria trocando H^* by H^0 na definição.

Apesar da associatividade, não temos necessariamente os morfismos identidade!

Alguns Resultados

- Para uma $\mathcal{A}_\infty$-category $\mathcal{C}$, temos uma estrutura triangulada em $\mathcal{H}^0(\mathcal{C})$ (no sentido que temos uma definição natural de triângulo exato).

- Podemos consturir uma categoria $\mathcal{A}_\infty$ chamada "categoria torcida de $\mathcal{C}$", denotada por Tw$\mathcal{C}$ para a qual a triangulação natural em $\mathcal{H}^0(\mathrm{Tw}\mathcal{C})$ satisfaz os axiomas de uma *categoria triangulada*.

E o que é a Categoria de Fukaya?

Para cada M, queremos obter uma categoria $\mathcal{A}_\infty$:

- Já temos:
  - Objetos: Lagrangianas de M
  - Morfismos: Para cada par de Lagrangianas, associamos: $Hom(L_0, L_1) = CF(L_0, L_1)$
- Precisamos:
  - Graduação em $CF(L_0, L_1)$ (dada pelo índice de Maslov, assumindo algumas hipóteses)
  - Mapas de composição μ^d em $CF(L_0, L_1)$

Mapas de Composição

$$\mu^d : CF(L_0, L_1) \otimes \cdots \otimes CF(L_{d-1}, L_d) \to CF(L_0, L_d)$$

$$\mu^d(p_1, p_2, \ldots, p_d) = \sum \# M(p_1, p_2, \ldots, p_d, q, J, A) \cdot T^{\int_A \omega} q,$$

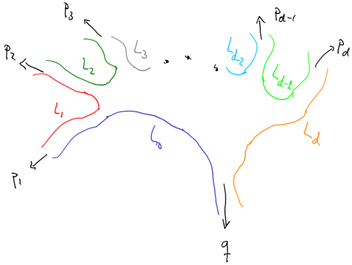


Figure: O domínio do mapa J-holomorfo conectando d lagrangianas

A Categoria de Fukaya

Para uma variedade simplética satisfazendo “boas hipóteses”, temos uma categoria $\mathcal{A}_\infty$ $\mathcal{F}(M)$ para a qual:

- Objetos: Lagrangianas
- Morfismos: $CF(L_0, L_1)$ para cada par de lagrangianas.
- Mapas de composição: $\mu^1 = \partial$, μ^d definidos acima.

Podemos então construir um tipo de "categoria derivada" da categoria de Fukaya: consideramos a Categoria Torcida $Tw(\mathcal{C})$ e tomamos a categoria cohomologica associada.

A Conjectura HMS

Categorias Derivadas

- Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Podemos associar a $\mathcal{C}$ uma nova categoria chamada *categoria derivada de* $\mathcal{C}$.
- A ideia é que a categoria derivada guarde informações não só sobre os objetos de $\mathcal{C}$ mas também sobre as resoluções deles.
- A ideia da construção vem de identificar os complexos homotópicos de $\mathcal{C}$ e localizar os quasi-isomorfismos.
- Essa categoria tem o que chamamos de tringulação e essa triangulação satisfaz os axiomas de uma categoria triangulada.

Feixes, Fibrados Vetoriais e Feixe Coerente

- Um feixe é um objeto que associa, a cada aberto de um espaço topológico, uma estrutura algébrica.
- E, se temos uma inclusão de abertos, temos um morfismo entre as estruturas algébricas.
- No caso de variedades complexas ou algébricas, temos o que chamamos de feixe estrutural $\mathcal{O}_X$. Ele associa cada aberto às funções regulares (holomorfas) naquele aberto.

Feixes, Fibrados Vetoriais e Feixe Coerente

- Podemos pensar num Fibrado Vetorial como um feixe! Associamos a cada aberto U as seções $\Gamma(U)$ do fibrado.
- Se temos um feixe localmente isomorfo a $\mathcal{O}_X^{\oplus n}$, podemos associá-lo a um fibrado vetorial, simplesmente tomando os caules como fibras.
- Estudar fibrados vetoriais é bom, mas precisamos de uma categoria mais bem comportada. Daí surgem os feixes coerentes!

Calabi Yau Manifolds

Voltando às variedades de Calabi Yau:

Defintion

Uma variedade Kähler compacta de dimensão complexa n é dita *Calabi Yau* se tem fibrado canônico trivial, isto é, se existe n-forma holomorfa que nunca se anula.

Em dimensão 1, variedades de Calabi Yau são curvas elípticas.

Em dimensão 2, são as famosas superfícies K3.

Em dimensão 3, existem vários tipos de variedades de Calabi Yau, mas ainda não se sabe se esse número é finito ou não.

A conjectura HMS

Seja M uma variedade de Calabi-Yau. Denote a categoria cohomológica da categoria torcida da categoria de Fukaya de M por $D^\pi(M)$ e denote por $D^b(M)$ a categoria derivada de feixes coerentes sobre M.

Conjectura (Kontsevich)

Para variedades Calabi Yau espelho, X e $\hat{X}$, temos que $D^\pi(X)$ e $D^b(\hat{X})$ são equivalentes como categorias **trianguladas**.

A Conjectura HMS

Hoje, temos alguns casos já provados, como para curvas elípticas e algumas classes específicas de variedades de Calabi Yau.

- Fisicamente, essas categorias representam D-branas (lado B) e A-branas (lado A), que são equivalentes.
- Matematicamente, ambas tem um tipo de dualidade $(\hom(X, Y))^* \cong \hom(Y, X[n])$
- Algumas pessoas acreditam que o fato é falso. Sentem que fisicamente ainda faltaria alguma coisa nas categorias para que a equivalência funcionasse.

Referências

Referências

- Fukaya Categories and Picard-Lefchetz Theory - Paul Seidel
- A Beginner's Introduction to Fukaya Categories - Denis Auroux
- Morse Theory for Lagrangian Intersections - Andreas Floer
- Morse homotopy, $\mathcal{A}_\infty$-category and Floer homologies. - Kenji Fukaya
- Mirror Symmetry and Algebraic Geometry - Sheldon Katz & David Cox
- Homological Algebra of Mirror Symmetry - Maxim Kontsevich
- A Pair of Calabi-Yau Manifolds as an Exactly Soluble Superconformal Theory - Phillip Candelas, Xenia de la Ossa, Paul Green e Linda Parkes.