O PARADOXO DE BANACH-TARSKI EM $\mathbb{R}^3$

1. Definição. Subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ são *equicompostos,* o que se denota $A \sim B$, se podem ser particionados em um mesmo número de partes disjuntas, $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$ e $B = \bigsqcup_{i=1}^n B_i$, de modo que, para todo i, existe uma isometria g_i de $\mathbb{R}^3$ tal que $g_i A_i = B_i$.

2. Teorema (Banach-Tarski)**.** *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^3$ subconjuntos limitados com interiores não-vazios. Então $A \sim B$.*

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência.

`Reflexividade`: Basta tomar $n := 1$, $A_1 := A$ e $g_1 := 1$.
`Simetria`: Se $A \sim B$ com A_i's, B_i's e g_i's como acima, tomemos g_i^{-1} e obtemos $B \sim A$.
`Transitividade`: Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A = \bigsqcup_i A_i$, $B = \bigsqcup_i g_i A_i$, $B = \bigsqcup_j B_j'$ e $C = \bigsqcup_j h_j B_j'$ para algumas isometrias g_i's e h_j's. Fazendo $B_{ij} := g_i A_i \cap B_j'$, $A_{ij} := g_i^{-1} B_{ij}$ e $C_{ij} := h_j B_{ij}$, obtemos $A = \bigsqcup_{ij} A_{ij}$ e $C = \bigsqcup_{ij} C_{ij}$ com $h_j g_i A_{ij} = C_{ij}$.

3. Lema. *Se $A \sim B$, então existe uma bijeção $\beta : A \to B$ tal que $C \sim \beta C$ para qualquer subconjunto $C \subset A$.*

Demonstração. Definimos $\beta a = g_i a$ para $a \in A_i$. Para qualquer $C \subset A$, temos $C = \bigsqcup_i (C \cap A_i)$ e $\beta C = \bigsqcup_i g_i (C \cap A_i)$ ■

4. Definição. Dizemos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é *equicomposto com uma parte* de um conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ e escrevemos $A \preccurlyeq B$ se $A \sim C$ para algum subconjunto $C \subset B$. A relação $\preccurlyeq$ é obviamente reflexiva. A transitividade de $\preccurlyeq$ segue do Lema 3.

5. Proposição. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $A \preccurlyeq B$ e $B \preccurlyeq A$. Então $A \sim B$.*

Demonstração. Pela hipótese, existem $A' \subset A$ e $B' \subset B$ tais que $A \sim B'$ e $A' \sim B$. Logo, existem bijeções $\alpha : A \to B'$ e $\beta : A' \leftarrow B$ como as do Lema 3. Definamos $C_0 := A \setminus A'$, $C_{n+1} := \beta\alpha C_n$ e $C := \bigcup_{i=0}^\infty C_i$. Já que $A \setminus C \subset A'$, de $\beta^{-1}(A \setminus C) = \beta^{-1}\Big(A' \setminus \bigcup_{i=1}^\infty C_i\Big) = B \setminus \bigcup_{i=1}^\infty \alpha C_{i-1} = B \setminus \alpha C$ segue $A \setminus C \sim B \setminus \alpha C$. Levando em conta $C \sim \alpha C$, concluímos que $A = (A \setminus C) \sqcup C \sim (B \setminus \alpha C) \sqcup \alpha C = B$ ■

Seja $F := F(x_1, x_2)$ o grupo livre de posto 2. Denotamos por $[x_i-] \subset F$ e $[x_i^{-1}-] \subset F$ os subconjuntos de todas as "palavras" que começam com x_i e x_i^{-1}, respectivamente. Note que

$$(6) \qquad F = x_1^{-1}[x_1-] \sqcup [x_1^{-1}-] = x_2^{-1}[x_2-] \sqcup [x_2^{-1}-] = 1 \sqcup [x_1-] \sqcup [x_1^{-1}-] \sqcup [x_2-] \sqcup [x_2^{-1}-].$$

Deste modo, poderíamos pensar que $F \sqcup F \preccurlyeq F$, pois, de uma forma,

$$(7) \qquad F = x_1^{-1}[x_1-] \sqcup [x_1^{-1}-] \sim [x_1-] \sqcup [x_1^{-1}-], \qquad F = x_2^{-1}[x_2-] \sqcup [x_2^{-1}-] \sim [x_2-] \sqcup [x_2^{-1}-],$$

tratando $x_1^{-1}, 1$ e $x_2^{-1}, 1$ como isometrias.

8. Lema. *O grupo $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$ contém um grupo livre $F(x_1, x_2)$ de posto 2.*

Denotemos por $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera e a bola fechada unitárias centradas na origem 0.

9. Lema. $(\mathbb{S}^2 \setminus D) \sqcup (\mathbb{S}^2 \setminus D) \preccurlyeq (\mathbb{S}^2 \setminus D)$ *para algum subconjunto enumerável $D \subset \mathbb{S}^2$.*

Demonstração. Pelo Lema 8, $F := F(x_1, x_2) \leqslant \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$. Denotemos por

$$D := \{d \in \mathbb{S}^2 \mid \exists g \in F\ g \neq 1 \text{ e } gd = d\}$$

o conjunto (claramente enumerável) de todos os pontos fixos de elementos não-triviais de F. Se $gd = d$ e $h \in F$, então $g^h(hd) = hd$. Em outras palavras, D é estável pela ação de F. Obviamente, a acão de F sobre $\mathbb{S}^2 \setminus D$ é livre. Escolhendo exatamente um ponto em cada órbita desta ação $F \curvearrowright (\mathbb{S}^2 \setminus D)$, formamos um conjunto $S \subset \mathbb{S}^2 \setminus D$ tal que $FS = \mathbb{S}^2 \setminus D$ (de fato, $FS = F \times S$ na linguagem categórica). As decomposições (7) e (6) providenciam as decomposições

$$FS = x_1^{-1}[x_1-]S \sqcup [x_1^{-1}-]S, \qquad FS = x_2^{-1}[x_2-]S \sqcup [x_2^{-1}-]S,$$

$$FS = S \sqcup [x_1-]S \sqcup [x_1^{-1}-]S \sqcup [x_2-]S \sqcup [x_2^{-1}-]S,$$

ou seja, $FS \sqcup FS \preccurlyeq FS$ ■

10. Proposição. $\mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{S}^2 \preccurlyeq \mathbb{S}^2$.

Demonstração. Existe uma rotação σ tal que $\sigma^m D \cap \sigma^n D = \varnothing$ para quaisquer distintos $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Com efeito, fixamos um ponto $f \in \mathbb{S}^2 \setminus D$. As rotações com ponto fixo f formam um subgrupo abeliano não-enumerável $H \leqslant \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}$. Dados $p, q \in D$ e $0 < k \in \mathbb{N}$, a cardinalidade dos $\sigma \in H$ tais que $\sigma^k p = q$ é finita. Portanto, podemos encontrar $\sigma \in H$ tal que $D \cap \sigma^k D = \varnothing$ para todo $0 < k \in \mathbb{N}$. Daí obtemos $D \subset C := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \subset \mathbb{S}^2$ com $\sigma C = C \setminus D$. Deste modo,

$$C = \sigma^{-1}\sigma C = \sigma^{-1}(C \setminus D) = \sigma^{-1}\big((\mathbb{S}^2 \setminus D) \cap C\big).$$

Agora, $\mathbb{S}^2 \setminus C \subset \mathbb{S}^2 \setminus D$ implica $\mathbb{S}^2 = (\mathbb{S}^2 \setminus C) \sqcup C = \big((\mathbb{S}^2 \setminus D) \cap (\mathbb{S}^2 \setminus C)\big) \sqcup \sigma^{-1}\big((\mathbb{S}^2 \setminus D) \cap C\big)$, ou seja, $\mathbb{S}^2 \sim \mathbb{S}^2 \setminus D$. Resta usar o Lema 9 ■

11. Proposição. $\mathbb{B}^3 \sqcup \mathbb{B}^3 \preccurlyeq \mathbb{B}^3$.

Demonstração. Pela Proposição 10, $(\mathbb{B}^3 \setminus 0) \sqcup (\mathbb{B}^3 \setminus 0) \preccurlyeq (\mathbb{B}^3 \setminus 0)$. Seja r uma rotação em torno de um ponto próximo à origem tal que $0 \neq r^n 0 \in \mathbb{B}^3$ para todo $0 < n \in \mathbb{N}$.

Definimos $0 \in E := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} r^n 0 \subset \mathbb{B}^3$. Como antes, $E = r^{-1}rE = r^{-1}(E \setminus 0) = r^{-1}\big((\mathbb{B}^3 \setminus 0) \cap E\big)$ e

$$\mathbb{B}^3 = (\mathbb{B}^3 \setminus E) \sqcup E = \big((\mathbb{B}^3 \setminus 0) \cap (\mathbb{B}^3 \setminus E)\big) \sqcup r^{-1}\big((\mathbb{B}^3 \setminus 0) \cap E\big),$$

implicando $\mathbb{B}^3 \sim \mathbb{B}^3 \setminus 0$ ■

Demonstração do Teorema 2. Podemos escolher bolas fechadas $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ tais que $\mathbb{A} \subset A$ e $B \subset \mathbb{B}$. Podemos cobrir $\mathbb{B}$ por um número finito n de cópias de $\mathbb{A}$, isto é, $\mathbb{B} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathbb{A}_i$. Daí extraímos uma partição $\mathbb{B} = \bigsqcup_{i=1}^n P_i$ de $\mathbb{B}$ tal que $P_i \subset \mathbb{A}_i$ para todo i. (Por exemplo, podemos tomar $P_i := (\mathbb{B} \cap \mathbb{A}_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} \mathbb{A}_j$.) Pela Proposição 11, $B \subset \mathbb{B} = \bigsqcup_{i=1}^n P_i \preccurlyeq \bigsqcup_{i=1}^n \mathbb{A}_i \preccurlyeq \mathbb{A} \subset A$, ou seja, $B \preccurlyeq A$. Por simetria, $A \preccurlyeq B$. Resta aplicar a Proposição 5 ■

Demonstração do Lema 8. Considere as rotações x_1 e x_2 pelo ângulo $\arccos \frac{1}{3}$ em torno dos eixos coordenados

$$x_1^{\pm 1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp 2\sqrt{2} \\ 0 & \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad x_2^{\pm 1} := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & \pm 2\sqrt{2} & 0 \\ \mp 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Note que $x_1^{\pm 1}\begin{bmatrix} a_1\sqrt{2} \\ a_2 \\ a_3\sqrt{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3a_1\sqrt{2} \\ a_2 \mp 4a_3 \\ (\pm 2a_2 + a_3)\sqrt{2}\end{bmatrix}$ e $x_2^{\pm 1}\begin{bmatrix} a_1\sqrt{2} \\ a_2 \\ a_3\sqrt{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} (a_1 \pm 2a_2)\sqrt{2} \\ \mp 4a_1 + a_2 \\ 3a_3\sqrt{2}\end{bmatrix}$. Logo, para $p := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0\end{bmatrix}$ e qualquer palavra $w := w(x_1, x_2)$ de comprimento n, obtemos $wp = \frac{1}{3^n}\begin{bmatrix} a_1\sqrt{2} \\ a_2 \\ a_3\sqrt{2}\end{bmatrix}$, onde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$. Mais ainda, denotando $A_{1,n} := A_{1,n}^+ \cup A_{1,n}^-$ e $A_{2,n} := A_{2,n}^+ \cup A_{2,n}^-$, onde

$$A_{1,n}^{\pm} := \left\{ \frac{1}{3^n}\begin{bmatrix} a_1\sqrt{2} \\ a_2 \\ a_3\sqrt{2}\end{bmatrix} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z},\ a_1 \equiv a_2 \pm a_3 \equiv 0 \not\equiv a_2 a_3 \mod 3 \right\},$$

$$A_{2,n}^{\pm} := \left\{ \frac{1}{3^n}\begin{bmatrix} a_1\sqrt{2} \\ a_2 \\ a_3\sqrt{2}\end{bmatrix} \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z},\ a_1 a_2 \not\equiv 0 \equiv a_1 \pm a_2 \equiv a_3 \mod 3 \right\}$$

para $n \in \mathbb{N}$, mostraremos que $x_1^{\pm k} A_{2,n} \subset A_{1,n+k}$ e $x_2^{\pm k} A_{1,n} \subset A_{2,n+k}$ para qualquer $0 < k \in \mathbb{N}$. Realmente, utilizando as fórmulas acima, obtemos

$$x_i^{\pm 1} A_{i,n}^{\pm} \subset A_{i,n+1}^{\pm}, \qquad x_1^{\pm 1} A_{2,n} \subset A_{1,n+1}^{\pm}, \qquad x_2^{\pm 1} A_{1,n} \subset A_{2,n+1}^{\pm},$$

implicando o desejado. Finalmente, $x_i^{\pm 1} p \in A_{1,n} \cup A_{2,n}$ e $wp = p \notin A_{1,n} \cup A_{2,n}$ implicam $w = 1$ ■