

AUFGABEN

FRANZ LEMMERMEYER

- (1) Ein Stern hat eine Entfernung von 1 pc, wenn man von ihm aus 1 AE unter einem Winkel von $1''$ sieht. Wie viele Lichtjahre entsprechen 1 pc?
- (2) Der Mond Io des Jupiter umkreist diesen in 1,77 Tagen und hat einen Bahnradius von 422 000 km. Bestimme die Masse des Jupiter.
- (3) Titan ist der größte Mond des Saturn. Er umkreist Saturn im Abstand von etwa 1.200.000 km in knapp 16 Tagen. Bestimme daraus die Masse des Saturn.
- (4) Der Mond Triton des Neptun hat eine Entfernung von 355.000 km vom Neptun und umkreist diesen in 5,877 Tagen. Bestimme daraus die ungefähre Masse des Neptun.
- (5) Pluto wird in etwa 6,4 Tagen in einer Entfernung von 19.600 km von seinem Mond Charon umkreist. Bestimme daraus die Gesamtmasse des Systems Pluto-Charon.
- (6) Berechne die Anziehungskraft zweier 60 kg schweren Personen, die 50 cm voneinander entfernt sind, und vergleiche sie mit der Anziehungskraft von Jupiter. Dieser ist etwa 5 AE von der Erde entfernt und hat eine Masse von $1,9 \cdot 10^{27}$ kg.
- (7) Zeige, dass $(G\rho)^{-\frac{1}{2}}$ die Dimension einer Periode hat.
Die theoretische Herleitung für die Periode P eines Cepheiden liefert die Formel

$$P = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

- (8) χ Persei ist ein offener Sternhaufen in der Milchstraße und hat eine Entfernung von etwa 8200 Lj. . Bestimme diese Entfernung mit Hilfe einiger Cepheiden:

| Stern | P in Tagen | m | M |
|-----------|--------------|------|-----|
| VY Persei | 5,37 | 8,36 | |
| V Persei | 5,53 | 7,99 | |
| VX Persei | 10,89 | 7,56 | |

- (9) Ein Proton hat eine Masse von $1,672622 \cdot 10^{-27}$ kg, ein Heliumkern $6,646477 \cdot 10^{-27}$ kg.

Berechne die Energie, die durch die Fusion von vier Protonen zu einem Heliumkern frei wird.

- (10) Die Sonne strahlt pro Sekunde $3,85 \cdot 10^{26}$ J ab. Wieviel Tonnen muss sie dafür pro Sekunde in Energie umwandeln?

FORMELSAMMLUNG

Newtonsches Gravitationsgesetz

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Gravitationskonstante $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$.

3. Keplersches Gesetz

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}.$$

Entfernungsmodul

$$d = 10^{1 + \frac{m-M}{5}} \text{ pc}$$

Perioden-Leuchtkraft-Beziehung für Cepheiden (P in Tagen):

$$M = -2,78 \log_{10}(P) - 1,32$$

Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300\,000 \text{ km/s}$.

LÖSUNGEN

Die Bestimmung der Gesamtmasse eines Systems erhält man aus der quantitativen Version des dritten Keplerschen Gesetzes:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Auflösen nach $m_1 + m_2$ ergibt

$$(1) \quad m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}.$$

Alle auftretenden Größen sind in die Einheiten umzurechnen, in welcher die Gravitationskonstante G angegeben ist, also in kg, m und s.

(1) Nach Definition des Tangens gilt für die Entfernung d des Sterns

$$\tan 1'' = \frac{1 \text{ AE}}{d}.$$

Wegen $1'' = \frac{1}{3600}^\circ$ ist daher ist

$$d = \frac{1 \text{ AE}}{\tan \frac{1}{3600}} \approx \frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{\tan \frac{1}{3600}} \approx 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m}.$$

Weil das Licht pro Sekunde 300 000 km zurücklegt, ist ein Lichtjahr

$$3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \approx 9,47 \cdot 10^{15} \text{ m}.$$

Wegen $\frac{3,1 \cdot 10^{16}}{9,47 \cdot 10^{15}} \approx 3,26$ ist 1 pc etwa 3,26 Lj.

(2) Es ist

$$1,77 \text{ d} = 1,77 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 1,53 \cdot 10^5 \text{ s},$$

$$422 \text{ 000 km} = 4,22 \cdot 10^8 \text{ m},$$

also

$$m = \frac{4\pi^2 (4,2 \cdot 10^8)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (1,53 \cdot 10^5)^2} \text{ kg} \approx 1,9 \cdot 10^{27} \text{ kg}.$$

(3) Es ist

$$r = 1,2 \cdot 10^9 \text{ m} \quad \text{und} \quad T = 16 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \approx 1,4 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

Damit wird

$$m = \frac{4\pi^2 (1,2 \cdot 10^9)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} (1,4 \cdot 10^6)^2} \text{ kg} \approx 5,2 \cdot 10^{26} \text{ kg}.$$

- (4) Einsetzen der Werte (Einheiten sind kg, m und s) liefert

$$m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 \cdot 355\,000\,000^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (5,877 \cdot 24 \cdot 60^2)^2} \text{kg} \approx 1,03 \cdot 10^{26} \text{kg}.$$

Der Löwenanteil der Gesamtmasse geht dabei an den Gasplaneten Neptun, dessen Masse daher zwischen der Erdmasse und der Sonnenmasse liegt.

- (5) Wir finden

$$r = 1,96 \cdot 10^7 \text{ m}, \quad T = 5,53 \cdot 10^5 \text{ s},$$

also

$$m \approx \frac{4\pi^2 (1,96 \cdot 10^7)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (5,53 \cdot 10^5)^2} \text{kg} \approx 1,5 \cdot 10^{22} \text{kg}.$$

- (6) Mit $m_1 = m_2 = 60 \text{ kg}$ berechnet sich die gegenseitige Anziehungskraft F_1 der beiden Personen bzw. F_2 zwischen Person und Jupiter zu

$$F_1 \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{60 \cdot 60}{0,5^2} \text{ N} \approx 9,6 \cdot 10^{-7} \text{ N},$$

$$F_2 \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{60 \cdot 1,9 \cdot 10^{27}}{(7,5 \cdot 10^{11})^2} \text{ N} \approx 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ N}.$$

Die Anziehungskraft von Jupiter ist also etwa 15 Mal stärker.

- (7) Die Einheit von $(G\rho)^{-\frac{1}{2}}$ ist

$$(\text{m}^3/\text{kgs}^2 \cdot \text{kg}/\text{m}^3)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1/\text{s}^2} = \text{s}.$$

- (8) Wir finden

| Stern | P in Tagen | m | M | d |
|-----------|--------------|------|-------|------|
| VY Persei | 5,37 | 8,36 | -3,35 | 6140 |
| V Persei | 5,53 | 7,99 | -3,38 | 6140 |
| VX Persei | 10,89 | 7,56 | -4,21 | 5040 |

- (9) Die Massendifferenz beträgt

$$0,044 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4,4 \cdot 10^{-29} \text{ kg}.$$

Die freigesetzte Energie ist daher

$$E = mc^2 = 4,4 \cdot 10^{-29} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \text{ J} \approx 4 \cdot 10^{-12} \text{ J}.$$

(10) Es ist

$$m = \frac{E}{c^2} \approx \frac{3,8 \cdot 10^{26}}{(3 \cdot 10^8)^2} \text{kg} \approx 4,2 \cdot 10^9 \text{kg},$$

also etwas mehr als 4 Millionen Tonnen pro Sekunde.

Fragen:

- Wie erzeugen Sterne Energie (ganz grob: 4 Protonen werden zu einem Heliumkern verschmolzen, die Massendifferenz wird über $E = mc^2$ in Energie verwandelt. Bei hohem Druck und sehr hohen Temperaturen kommen andere Prozesse ins Spiel. Fusion von Atomen mit Ordnungszahl größer als Eisen liefern keine Energie mehr.
- Erklärung des Hertzsprung-Russell-Diagramms, Lebenslauf von Einzelsternen in Abhängigkeit von ihrer Masse mit Endprodukt weißer Zwerg, Neutronenstern oder schwarzes Loch.