DIE ABLEITUNG

FRANZ LEMMERMEYER

Eine Gerade $y = mx + b$ hat in jedem Punkt dieselbe Steigung m. Bei einer Parabel $y = x^2$ dagegen ändert sich die Steigung von Punkt zu Punkt.

Sind zwei Punkte $P(x|f(x))$ und $Q(u|f(u))$ auf dem Schaubild einer (stetigen) Funktion f gegeben, so nennt man die Steigung der Geraden durch diese beiden Punkte die *durchschnittliche Änderungsrate* auf dem Intervall $[x, u]$.

Ein typisches Beispiel aus der Physik ist die durchschnittliche Geschwindigkeit: fährt man 30 min und legt dabei 40 km zurück, dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit $v = \frac{40 \text{ km}}{0{,}5 \text{ h}} = 80$ km/h.

Was auf dem Tachometer angezeigt wird ist dagegen die Momentangeschwindigkeit, also die *momentane Änderungsrate*. Um diese zu messen, bestimmt man den zurückgelegten Weg in einer sehr kleinen Zeitspanne. In der Mathematik betrachtet man dazu Grenzwerte. In der Praxis sieht das so aus.

Im Falle der Parabel $f(x) = x^2$ ist die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $[1; 2]$ gegeben durch

$$m = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3.$$

Lassen wir den Punkt $(2|4)$ auf der Parabel auf $(1|1)$ zugehen und betrachten die die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $[1; 1,1]$, so finden wir

$$m = \frac{f(1,1) - f(1)}{1,1 - 1} = \frac{1,21 - 1}{1,1 - 1} = \frac{0,21}{0,1} = 2,1.$$

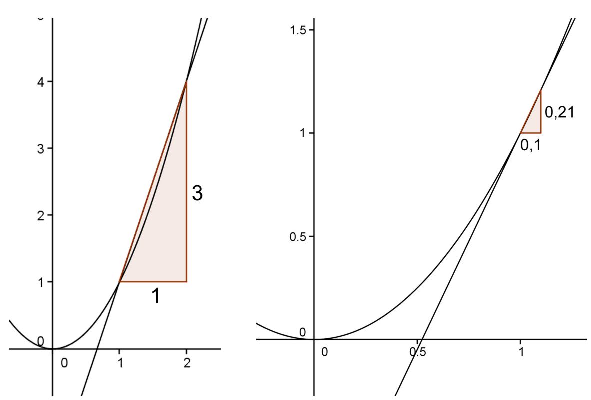

Abbildung 1. Steigung im Punkt $(1|1)$ der Normalparabel

Wenn wir das Intervall noch kleiner machen, sinkt auch die durchschnittliche Änderungsrate. Betrachten wir etwa das Intervall $[1; 1+h]$ für einen beliebigen kleinen Wert $h > 0$, so erhalten wir für die durchschnittliche Änderungsrate

$$m_h = \frac{f(1+h) - f(1)}{1+h-1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{1+h-1} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h.$$

Je kleiner h wird, desto weniger wird sich die durchschnittliche ÄNderungsrate von 2 unterscheiden, und dieser Unterschied wird beliebig klein, wenn wir h beliebig klein machen. Wir schreiben dafür

$$\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2$$

(lim steht für „Limes", das lateinische Wort für Grenze). Im vorliegenden Fall fassen wir $\lim_{h\to 0} m_h = 2$ als die „momentane Änderungsrate" im Punkt $(1|1)$ auf der Parabel auf.

Im Falle einer beliebigen Funktion f ist die durchschnittliche Änderungsrate auf dem Intervall $[x, u]$ gegeben durch

$$m = \frac{f(x) - f(u)}{x - u}.$$

Lassen wir jetzt u immer näher an x herangehen, dann schreiben wir

$$f'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

und nennen $f'(x)$ die Ableitung von f.

Statt $f'(x)$ schreibt man auch oft $\frac{df}{dx}$ oder $\frac{d}{dx}\, f$. Diese „Differentialschreibweise" hat eine Unmenge von Vorteilen, bei Anwendungen in der Physik und den Ingenieurwissenschaften ebenso wir in der „richtigen" Analysis in der Mathematik.

1. Ableitungen der Grundfunktionen

Wir geben jetzt einige Beispiele, von denen die beiden ersten ziemlich trivial sind.

Satz 1. *Konstante Funktionen f haben Ableitung $f'(x) = 0$.*

Ist nämlich $f(x) = c$, so ist

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = 0$$

für alle u.

Satz 2. *Die Funktion $f(x) = mx + b$ hat die Ableitung $f'(x) = m$.*

Auch hier ist

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \frac{mx + b - (mu + b)}{x - u} = \frac{mx - mu}{x - u} = \frac{m(x - u)}{x - u} = m$$

für alle u.

Satz 3. *Die Funktion $f(x) = x^2$ hat die Ableitung $f'(x) = 2x$.*

Hier ist
$$\frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \frac{x^2-u^2}{x-u} = \frac{(x-u)(x+u)}{x-u} = x+u.$$
Lässt man $u \to x$ gehen, folgt
$$f'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \lim_{u\to x}(x+u) = 2x.$$

Um die Ableitung der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ berechnen zu können, brauchen wir eine Verallgemeinerung der dritten binomischen Formel $x^2-y^2 = (x-y)(x+y)$.

Für die Differenz zweier Kuben gilt
$$x^3-u^3 = (x-u)(x^2+xu+u^2),$$
was man leicht durch Ausmultiplizieren bestätigt. Noch eindrucksvoller ist die folgende Herleitung: wir setzen $S = x^2+xu+u^2$ und finden
$$xS = x^3+x^2u+xu^2, \quad uS = x^2u+xu^2+u^3,$$
folglich
$$(x-u)S = xS-uS = x^3-u^3.$$

Damit erhalten wir die Ableitung von $f(x) = x^3$ folgendermaßen:
$$f'(x) = \lim_{u\to x}\frac{x^3-u^3}{x-u} = \lim_{u\to x}(x^2+xu+u^2) = 3x^2.$$

Auf dieselbe Art und Weise zeigt man leicht
$$x^n-u^n = (x-u)(x^{n-1}+x^{n-2}u+\ldots+ux^{n-2}+x^{n-1}).$$
Damit folgt jetzt für $f(x) = x^n$
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x}\frac{x^n-u^n}{x-u} = \lim_{u\to x}\frac{(x-u)(x^{n-1}+x^{n-2}u+\ldots+ux^{n-2}+x^{n-1})}{x-u} \\ &= \lim_{u\to x}(x^{n-1}+x^{n-2}u+\ldots+ux^{n-2}+x^{n-1}) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

Wir haben bewiesen:

Satz 4. *Die Funktion $f(x) = x^n$, wo $n \geq 1$ eine ganze Zahl ist, hat die Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Als nächstes beweisen wir die Potenzregel für negative Hochzahlen. Der einfachste Spezialfall ist durch $f(x) = \frac{1}{x}$ gegeben. Hier ist
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{u}}{x-u} = \lim_{u\to x}\frac{\frac{u-x}{xu}}{x-u} \\ &= \lim_{u\to x}\frac{u-x}{x-u}\cdot\frac{1}{xu} = -\lim_{u\to x}\frac{x-u}{x-u}\cdot\lim_{u\to x}\frac{1}{xu} = -1\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Sei jetzt allgemeiner $f(x) = \frac{1}{x^n}$; hier wird
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x}\frac{\frac{1}{x^n}-\frac{1}{u^n}}{x-u} = \lim_{u\to x}\frac{\frac{u^n-x^n}{x^nu^n}}{x-u} \\ &= \lim_{u\to x}\frac{u^n-x^n}{x-u}\cdot\frac{1}{x^nu^n} = \frac{1}{x^{2n}}\cdot(-nx^{n-1}) = -\frac{n}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

Dies ist genau das Ergebnis, das man erwarten würde, wenn man $f(x) = x^{-n}$ nach der Potenzregel ableitet.

Satz 5. *Die Funktion $f(x) = x^{-n}$, wo $n \ge 1$ eine ganze Zahl ist, hat die Ableitung $f'(x) = -nx^{-n-1}$.*

Damit bleiben noch die Potenzfunktionen mit rationaler Hochzahl. Wir beginnen mit $f(x) = \sqrt{x}$. Hier haben wir den Term $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{u}}{x-u}$ zu untersuchen. Um den Faktor $x-u$ kürzen zu können, müssen wir diesen Bruch erweitern, und zwar mit $\sqrt{x}+\sqrt{u}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{u}}{x-u} = \lim_{u\to x} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{u}\,)(\sqrt{x}+\sqrt{u}\,)}{(x-u)(\sqrt{x}+\sqrt{u}\,)} \\ &= \lim_{u\to x} \frac{x-u}{(x-u)(\sqrt{x}+\sqrt{u}\,)} = \lim_{u\to x} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Auch hier stimmt dies mit der Potenzregel für $n = \frac12$ überein, denn danach ist die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac12}$ die Funktion $f'(x) = \frac12 x^{-\frac12} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Bevor wir den allgemeinen Fall angreifen, schauen wir uns den Spezialfall $f(x) = x^{\frac{n}{2}}$ an, wo n eine ungerade natürliche Zahl ist. Hier finden wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x} \frac{x^{\frac{n}{2}}-u^{\frac{n}{2}}}{x-u} = \lim_{u\to x} \frac{(x^{\frac{n}{2}}-u^{\frac{n}{2}})(x^{\frac{n}{2}}+u^{\frac{n}{2}})}{(x-u)(x^{\frac{n}{2}}+u^{\frac{n}{2}})} \\ &= \lim_{u\to x} \frac{x^n-u^n}{(x-u)(x^{\frac{n}{2}}+u^{\frac{n}{2}})} = \frac{1}{2x^{\frac{n}{2}}} \lim_{u\to x} \frac{x^n-u^n}{x-u} \\ &= \frac{1}{2x^{\frac{n}{2}}} \cdot nx^{n-1} = \frac{n}{2} \cdot x^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned}$$

Sei jetzt $f(x) = \sqrt[q]{x^p} = x^{\frac{p}{q}}$. Wie oben finden wir

$$f'(x) = \lim_{u\to x} \frac{x^{\frac{p}{q}}-u^{\frac{p}{q}}}{x-u}.$$

Zum Rationalmachen des Zählers erweitern wir diesen Bruch so, dass wir im Zähler

$$\Big(x^{\frac{p}{q}}-u^{\frac{p}{q}}\Big)\cdot\Big(x^{\frac{p(q-1)}{q}}+x^{\frac{p(q-2)}{q}}u^{\frac{p}{q}}+x^{\frac{p(q-3)}{q}}u^{\frac{2p}{q}}+\cdots+x^{\frac{p}{q}}u^{\frac{p(q-2)}{q}}+u^{\frac{p(q-1)}{q}}\Big) = x^p-u^p$$

erhalten. Damit wird

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x} \frac{x^{\frac{p}{q}}-u^{\frac{p}{q}}}{x-u} \\ &= \lim_{u\to x} \frac{x^p-u^p}{x-u} \cdot \frac{1}{x^{\frac{p(q-1)}{q}}+x^{\frac{p(q-2)}{q}}u^{\frac{p}{q}}+\cdots+x^{\frac{p}{q}}u^{\frac{p(q-2)}{q}}+u^{\frac{p(q-1)}{q}}} \\ &= px^{p-1} \cdot \frac{1}{q\cdot x^{\frac{p(q-1)}{q}}} = \frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}. \end{aligned}$$

2. Ableitungsregeln

Ableitungsregeln erlauben uns, die Ableitungen von komplizierten Funktion auf die von einfachen Funktionen zurückzuführen. Die beiden einfachsten Ableitungsregeln zeigen, wie man Summen von Funktionen und konstante Vielfache von Funktionen ableitet.

Summen und Produkte. Die einfachste Methoden, aus gegebenen Funktionen neue zu gewinnen, sind Addition und die Multiplikation mit einer Konstanten. Sind g und h Funktionen auf demselben Definitionsbereich, so ist die Funktion $f = g+h$ definiert durch $f(x) = g(x) + h(x)$. Beispielsweise ist $f(x) = x^4 + x^2$ die Summe von $g(x) = x^4$ und $h(x) = x^2$.

Satz 6 (Summenregel)**.** *Die Ableitung der Summe $f(x) = g(x) + h(x)$ zweier differenzierbarer Funktionen g und h ist die Summe der Ableitungen $f'(x) = g'(x) + h'(x)$.*

In Differentialschreibweise lautet die Summenregel

$$\frac{d}{dx}(g+h) = \frac{d}{dx}g + \frac{d}{dx}h.$$

Der Beweis ist einfach:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \lim_{u\to x} \frac{g(x)+h(x)-g(u)-h(u)}{x-u} \\ &= \lim_{u\to x} \frac{g(x)-g(u)}{x-u} + \frac{h(x)-h(u)}{x-u} = g'(x) + h'(x). \end{aligned}$$

Satz 7 (Faktorregel)**.** *Die Ableitung von $f(x) = c \cdot g(x)$, wo c eine Konstante und g eine differenzierbare Funktion bezeichnet, ist gegeben durch $f'(x) = c \cdot g'(x)$.*

In Differentialschreibweise lautet die Faktorregel

$$\frac{d}{dx}(c \cdot g) = c\frac{d}{dx}f.$$

Auch dies kann man einfach nachrechnen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \lim_{u\to x} \frac{c\cdot g(x) - c\cdot g(u)}{x-u} \\ &= \lim_{u\to x} c\frac{g(x)-g(u)}{x-u} = c\cdot g'(x). \end{aligned}$$

Etwas anspruchsvoller ist es mit Produkten von Funktionen $f(x) = g(x)h(x)$. Hier finden wir

$$f'(x) = \lim_{u\to x} \frac{f(x)-f(u)}{x-u} = \lim_{u\to x} \frac{g(x)h(x)-g(u)h(u)}{x-u}.$$

Wie sollen wir hier die Ableitungen von g und h ins Spiel bringen? Die Idee ist, in der Mitte $g(x)h(u) - g(x)h(u)$ einzufügen (das ändert den Ausdruck nicht, weil $g(x)h(u) - g(x)h(u) = 0$ ist):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u\to x} \frac{g(x)h(x)-g(x)h(u)}{x-u} + \frac{g(x)h(u)-g(u)h(u)}{x-u} \\ &= \lim_{u\to x} g(x)\frac{h(x)-h(u)}{x-u} + h(u)\frac{g(x)-g(u)}{x-u} \\ &= g(x)h'(x) + h(x)g'(x). \end{aligned}$$

Satz 8 (Produktregel)**.** *Das Produkt $f(x) = g(x)h(x)$ zweier differenzierbarer Funktionen g und h ist differenzierbar, und die Ableitung ist gegeben durch*

$$f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x).$$

In Differentialschreibweise lautet die Produktregel

$$\frac{d}{dx}(gh) = h\frac{d}{dx}g + g\frac{d}{dx}h.$$

Die Ableitung von $f(x) = x^6$ ist $f'(x) = 6x^5$; mit Hilfe der Produktregel findet man die Ableitung von $f(x) = x^2 \cdot x^4$ durch $f'(x) = 2x \cdot x^4 + x^2 \cdot 4x^3 = 2x^5 + 4x^5 = 6x^5$. Selbstverständlich ist die Produktregel nicht dazu da, um Funktionen abzuleiten, die man ohne Produktregel viel leichter beherrscht.

Übungen

(1) Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^m \cdot x^n$ mit und ohne Anwendung der Produktregel.

(2) Beweise die Potenzregel $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ für alle natürlichen Zahlen n durch vollständige Induktion und Anwendung der Produktregel.

   (a) Ausgehend von $\frac{d}{dx}x = 1$ beweise man $\frac{d}{dx}x^2 = \frac{d}{dx}(x \cdot x) = 2x$ und $\frac{d}{dx}x^3 = \frac{d}{dx}(x^2 \cdot x) = 3x^2$.

   (b) Zeige: gilt $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ für irgendeine natürliche Zahl n, dann gilt auch $\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n$.

(3) Beweise die Potenzregel $\frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{n}{x^{n+1}}$ für alle natürlichen Zahlen n durch vollständige Induktion und Anwendung der Produktregel.

(4) Beweise die Potenzregel $\frac{d}{dx}x^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}x^{\frac{n}{2}-1}$ für alle (ungeraden) natürlichen Zahlen n durch vollständige Induktion und Anwendung der Produktregel.

(5) Beweise die Produktregel für drei Faktoren:

$$\frac{d}{dx}uvw = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Wie lautet die Produktregel für vier Faktoren?

(6) Sei $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ eine ganzrationale Funktion 4. Grades. Wenn f' zwei verschiedene Nullstellen $r < s$ besitzt, dann gilt nach Vieta $f'(x) = 4(x-r)(x-s)$. Zeige, dass f in $x = r$ einen Hochpunkt und in $x = s$ einen Tiefpunkt besitzt.

(7) Sei $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ eine ganzrationale Funktion 4. Grades.

   (a) Wenn f' drei verschiedene Nullstellen $r < s < t$ besitzt, dann gilt nach Vieta

   $$f'(x) = 4(x-r)(x-s)(x-t).$$

   Zeige, dass f Tiefpunkte in $x = r$ und $x = t$, sowie einen Hochpunkt in $x = s$ besitzt.

   (b) Wenn f' genau eine Nullstelle r besitzt, dann ist nach Vieta

   $$f'(x) = 4(x-r)g(x)$$

   für ein quadratisches Polynom $g(x) = x^2+sx+t$ ohne Nullstelle. Zeige, dass f in $x = r$ einen Tiefpunkt besitzt.

Verkettungen. Noch verbreiteter als Produkte von Funktionen sind Verkettungen von Funktionen. Sind g und h Funktionen, so nennt man $g(h(x))$ die Verkettung von g mit h; zu beachten ist, dass $h(g(x))$ im allgemeinen von $g(h(x))$ vollkommen verschieden sind. Ist etwa $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x + 1$, so erhält man $g(h(x)) = (2x + 1)^2$ (jedes x in $g(x)$ wird durch $2x + 1$ ersetzt) und $h(g(x)) = 2x^2 + 1$.

Verkettungen von Funktionen sind nicht immer uneingeschränkt möglich; ist $g(x) = x^2 - 1$ und $h(x) = \sqrt{x}$, so ist $g(h(x)) = \sqrt{x}^2 + 1$ für alle $x \geq 0$ definiert, während $h(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ für $x \leq -1$ oder $x \geq +1$ definiert ist.

Die mächtigste Waffe unter den Ableitungsregeln ist die Kettenregel, mit der man die Ableitung verketteter Funktionen bestimmen kann.

Sei $g(x) = x^2$ und $h(x) = 3x$; dann ist $f(g(x)) = (3x)^2 = 9x^2$. Auf der andern Seite ist $f'(g(x))$ diejenige Funktion, die man erhält, wenn man g mit $f'(x) = 2x$ verkettet, also $f'(g(x)) = 2(3x) = 6x$. Um die Ableitung $(f(g(x)))' = 18x$ zu erhalten, muss man $f'(g(x))$ noch mit $3 = g(x)$ multiplizieren. Dass die „Kettenregel“

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

allgemein richtig ist, werden wir jetzt nachrechnen.

Zur Herleitung der Kettenregel setzen wir $z = h(x)$ und $w = h(u)$ und rechnen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{u \to x} \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \lim_{u \to x} \frac{g(h(x)) - g(h(u))}{x - u} \\ &= \lim_{u \to x} \frac{g(z) - g(w)}{x - u} = \lim_{u \to x} \frac{g(z) - g(w)}{z - w} \cdot \frac{z - w}{x - u}. \end{aligned}$$

Wenn nun $u \to x$ geht, dann geht $w = h(u)$ gegen $z = h(x)$, d.h. der erste Faktor geht gegen $g'(z) = g'(h(x))$; der zweite Faktor ist

$$\lim_{u \to x} \frac{z - w}{x - u} = \lim_{u \to x} \frac{h(x) - h(u)}{x - u} = h'(x).$$

Also folgt

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

In der Differentialschreibweise wurd die Kettenregel besonders durchsichtig: es ist nämlich mit $u = g(x)$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

d.h. die Kettenregel sieht aus wie die ganz normale Multiplikation von Brüchen. Natürlich ist $\frac{df}{dx}$ schon deswegen kein Bruch, weil wir gar nicht gesagt haben, was df und dx eigentlich sein sollen.

Übungen

(1) Bilde die Ableitung von $f(x) = (2x+1)^2$ durch Anwendung (a) der binomischen Formel, (b) der Produktregel, und (c) der Kettenregel und überzeuge dich davon, dass sich jedesmal dasselbe Ergebnis ergibt.

(2) Bilde die Ableitung von $f(x) = (ax^2+b)^2$ durch Anwendung (a) der binomischen Formel, (b) der Produktregel, und (c) der Kettenregel und überzeuge dich davon, dass sich jedesmal dasselbe Ergebnis ergibt.

(3) Die Produktregel folgt aus der Kettenregel. Zeige:

(a) Es gilt
$$uv = \Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{u+v}{2}\Big)^2.$$

(b) Sind u und v differenzierbare Funktionen, so erhält man $(uv)'$ durch das Ableiten der rechten Seite der letzten Gleichung. Dabei ergibt sich die Produktregel.

(4) Zeige, dass die Quotientenregel aus der Kettenregel folgt.

Hinweis: $\frac{g(x)}{h(x)} = g(x) \cdot h(x)^{-1}$.