MATHEMATIK G10C KLASSENARBEIT 2

14.12.2017

Aufgabe	1	2	3	4	5	6
Punkte (max)	6	7	4	3	6	4
Punkte						

(1) Bestimme die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$
\begin{array}{ll}
a) & f(x) = 0,2x^5 - x + 2 \\
b) & f(x) = 3\sqrt{x} + \dfrac{1}{2x^2} \\
c) & f(x) = \dfrac{3}{5x} + \dfrac{5x}{3} \\
d) & f(x) = -x(x^2 + 2) \\
e) & f(x) = x^4 + t^2x^2 + t^4 \\
f) & f(x) = 2(x - a)^2
\end{array}
$$

(2) Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 5.$$

Bestimme die Nullstellen und die Extrem- und Wendepunkte des Schaubilds von f.

(3) Bestimme die Gleichungen von Tangente und Normale an das Schaubild der Funktion $f(x) = -\frac{2}{x}$ in $x = 2$.

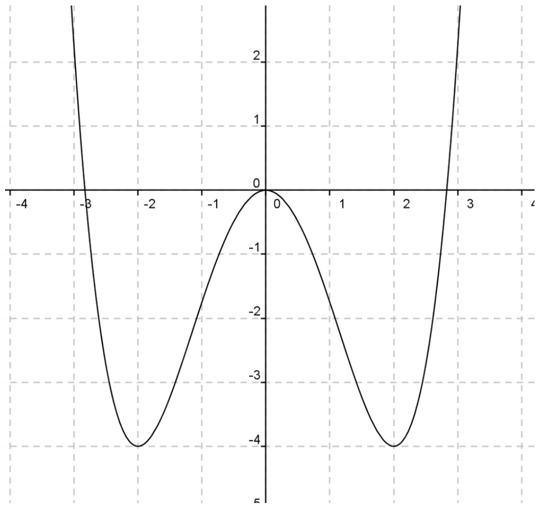
(4) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 3x$.

a) An welchen Stellen hat f den Funktionswert 4?

b) An welcher Stelle hat die Tangente an f Steigung 15?

c) An welcher Stelle ist die Tangente an f parallel zur Geraden $y = 5x - 1$?

(5) Das folgende Diagramm zeigt das Schaubild einer Funktion.



a) Markiere Nullstellen mit N, Hoch- und Tiefpunkte mit H bzw. T, und Wendepunkte mit W.

b) Lies die folgenden Werte näherungsweise ab:

a)	$f(2) =$	$f'(2) =$
b)	$f(1) \approx$	$f'(1) \approx$

Welches Vorzeichen hat f'' in $x = 2$?

(6) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 3ax + a^2$.

a) Bestimme a so, dass $f(2) = -1$ ist.

b) Bestimme a so, dass die Tangente an das Schaubild von f in $x_1 = 2$ Steigung 3 besitzt.

Lösungen

(1) Bestimme die jeweils erste Ableitung der folgenden Funktionen.

$$
\begin{aligned}
a) \qquad & f(x) = 0,2x^5 - x + 2 \\
& f'(x) = x^4 - 1 \\
b) \qquad & f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{2x^2} \\
& f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^3} \\
c) \qquad & f(x) = \frac{3}{5x} + \frac{5x}{3} \\
& f'(x) = -\frac{3}{5x^2} + \frac{5}{3} \\
d) \qquad & f(x) = -x(x^2+2) = -x^3 - 2x \\
& f'(x) = -3x^2 - 2 \\
e) \qquad & f(x) = x^4 + t^2x^2 + t^4 \\
& f'(x) = 4x^3 + 2t^2x \\
f) \qquad & f(x) = 2(x-a)^2 = 2x^2 - 4ax + 2a^2 \\
& f'(x) = 4x - 4a
\end{aligned}
$$

(2) *Gegeben ist die Funktion*

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 5.$$

Bestimme die Nullstellen und die Extrem- und Wendepunkte des Schaubilds von f.

Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 - 8x \\
f''(x) &= 12x^2 - 8
\end{aligned}
$$

Nullstellen: $f(x) = 0$. Substitution $x^2 = z$ ergibt $z^2 - 4z + 5 = 0$, also

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-20}}{2}.$$

Also gibt es keine reellen Lösungen und damit auch keine Nullstellen.

Extrempunkte: $f'(x) = 0$. Ausklammern und Satz vom Nullprodukt:

$$4x(x^2 - 2) = 0$$

ergibt $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$ und $x_2 = \sqrt{2}$.

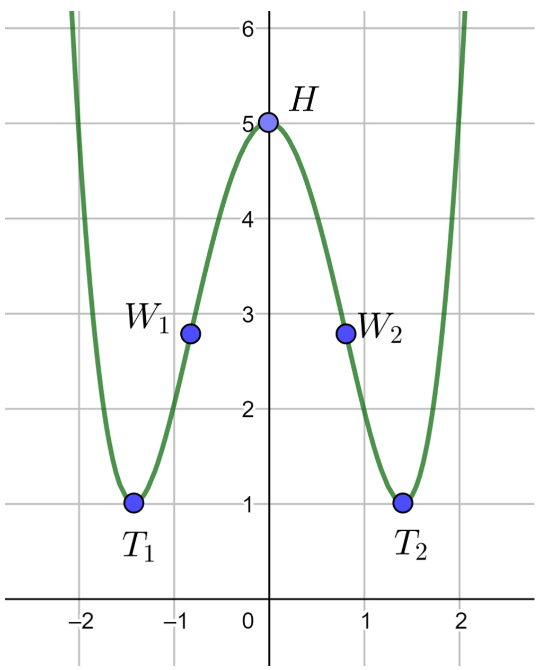
Die y-Koordinaten sind

- $y_1 = f(0) = 5$;
- $y_2 = f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2}\,)^4 - 4(-\sqrt{2}\,)^2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$.

  Beachte, dass $(-\sqrt{2}\,)^2 = 2$ und deswegen $(-\sqrt{2}\,)^4 = 2^2 = 4$ ist.
- $y_3 = f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}\,)^4 - 4(\sqrt{2}\,)^2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$.

Wert der zweiten Ableitung:

- $f''(0) = -8 < 0$: Hochpunkt $H(0|5)$
- $f''(-\sqrt{2}\,) = 12 \cdot 2 - 8 = 16 > 0$: Tiefpunkt $T(-\sqrt{2}\,|1)$.
- $f''(\sqrt{2}\,) = 12 \cdot 2 - 8 = 16 > 0$: Tiefpunkt $T(\sqrt{2}\,|1)$.



Wendepunkte sind Punkte, in welchen die zweite Ableitung 0 (und die dritte Ableitung $\neq 0$) ist. Also $f''(x) = 0$ setzen:

$$12x^2 - 8 = 0$$

ergibt $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Funktionswerte:

- $f\big(-\sqrt{\frac{2}{3}}\big) = \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} + 5 = \frac{25}{9}$.
- $f\big(\sqrt{\frac{2}{3}}\big) = \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} + 5 = \frac{25}{9}$.

Also $W_1\big(-\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\,\frac{25}{9}\big)$ und $W_2\big(\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\,\frac{25}{9}\big)$.

(3) *Bestimme die Gleichungen von Tangente und Normale an das Schaubild der Funktion $f(x) = -\frac{2}{x}$ in $x = 2$.*

$f'(x) = \frac{2}{x^2}$. Also ist $m = f'(2) = \frac{1}{2}$. Wegen $f(2) = -1$ folgt durch Einsetzen in $y = mx + b$ die Gleichung $-1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b$, also $b = -2$ und damit $t : y = \frac{1}{2}x - 2$.

Die Normalensteingung ist $m_n = -\frac{1}{m_t} = -2$ (Kehrwert, Vorzeichen ändern). Einsetzen ergibt $n : \; y = -2x + 3$.

(4) *Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 3x$.*

a) *An welchen Stellen hat f den Funktionswert 4?*

$f(x) = 4$, also $x^2 + 3x = 4$ oder $x^2 + 3x - 4 = 0$. Vieta (oder abc-Formel) ergibt $(x + 4)(x - 1) = 0$, also $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$.

b) *An welcher Stelle hat die Tangente an f Steigung 15?*

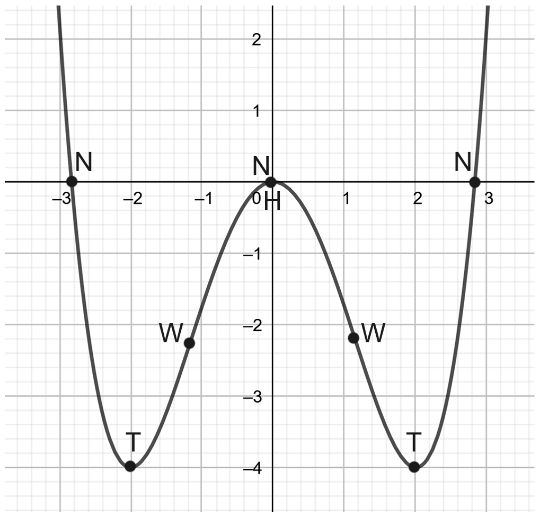
$f'(x) = 2x + 3 = 15$ ergibt $x = 6$.

c) welcher Stelle ist die Tangente an f parallel zur Geraden $y = 5x - 1$?

Steigung der Tangente muss 5 sein; $f'(x) = 2x + 3 = 5$ ergibt $x = 1$.

(5) *Das folgende Diagramm zeigt das Schaubild einer Funktion.*

a) *Markiere Nullstellen mit N, Hoch- und Tiefpunkte mit H bzw. T, und Wendepunkte mit W.*



b) Lies die folgenden Werte näherungsweise ab:

a)	$f(2) = -4$	$f'(2) = 0$
b)	$f(1) \approx -1,75$	$f'(1) \approx -3$

Welches Vorzeichen hat f'' *in* $x = 2$*?*

In $x = 2$ ist die Näherungsparabel nach oben geöffnet; also ist $f''(2) > 0$ (Vorzeichen positiv).

(6) *Gegeben ist die Funktion* $f(x) = x^3 - 3ax + a^2$.

a) *Bestimme* a *so, dass* $f(2) = -1$ *ist.*

$$-1 = f(2) = 8 - 6a + a^2$$

ergibt $a^2 - 6a + 9 = 0$, also (abc-Formel oder binomische Formel $a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$) $a = 3$.

b) *Bestimme* a *so, dass die Tangente an das Schaubild von* f *in* $x_1 = 2$ *Steigung* 3 *besitzt.*

Es ist $f'(x) = 3x^2 - 3a$. Also muss

$$3 = f'(2) = 12 - 3a$$

gelten, und das ergibt $a = 3$.