Musterlösung zur Probeklausur
Lineare Algebra I

Prof. Dr. K. Wingberg
J. Bartels WS 2007

1 . Aufgabe :
Beweisen oder widerlegen sie die folgenden Aussagen:

a) Es seien A, B, C Mengen mit $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$ und $X = A \cup B \cup C$. Dann gibt es eine Äquivalenzrelation of X mit genau den Äquivalenzklassen A, B, C.

Lösung:
Wahr: Nach Voraussetzung ist jedes $x \in X$ in genau einer der Mengen A, B bzw. C enthalten. Setze nun $x \approx y \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in A) \vee (x \in B \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in C)$.
Ganz offenbar ist dies reflexiv ($x \approx x$) und symmetrisch ($x \approx y \Leftrightarrow y \approx x$).
Zur Transitivität:
Sei $x \approx y \wedge y \approx z$
y ist in genau einer der Mengen enthalten, o.B.d.A. in der Menge A:
$\Rightarrow y \notin B \wedge y \notin C$
$\Rightarrow x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \Rightarrow x \approx z$
$\Rightarrow \approx$ ist eine Äquivalenzrelation

b) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ $(n > 0)$ gibt es eine Gruppe mit n Elementen.

Lösung:
Wahr: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist für jedes n eine Gruppe mit n Elementen.

c) Es seien V, W Vektorräume über dem Körper K und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es genau einen Unterraum $U \leq V$, für den $\phi|_U : U \to W$ ein Isomorphismus ist.

Lösung:
Falsch: Wenn ϕ nicht surjektiv dann ist für alle U natürlich $\phi|_U$ auch nicht surjektiv und damit natürlich auch nicht bijektiv.

d) Es gibt ein lineares Gleichungssystem mit genau 3 Lösungen.

Lösung:
Wahr: Betrachte über dem Körper $\mathbb{F}_3$ die Gleichung:

$$\bar{0} * x = \bar{0}$$

Diese besitzt offenbar genau 3 Lösungen ($\bar{0}, \bar{1}$ und $\bar{2}$). Ein anderes Beispiel, in dem auch andere Zahlen vorkommen ist z.B.:

$$x_1 + x_2 = \bar{1}$$

2 . Aufgabe :
Es sei K ein Körper und V, W, X seien K-Vektoräume. Außerdem seien $\phi : V \to W$ und $\psi : W \to X$ lineare Abbildungen. Zeigen sie:

a) $\psi \circ \phi : V \to X$ ist eine lineare Abbildung.

Lösung:
Die Zusammensetzung $\psi \circ \phi$ ist offenbar eine Abbildung von V nach X. Zu zeigen ist, dass diese linear ist: Seien $\vec{a}, \vec{b} \in V, k \in K$

$$\psi \circ \phi(\vec{a}+\vec{b}) = \psi(\phi(\vec{a}+\vec{b})) = \psi(\phi(\vec{a})+\phi(\vec{b})) = \psi(\phi(\vec{a}))+\psi(\phi(\vec{b})) = \psi \circ \phi(\vec{a})+\psi \circ \phi(\vec{b})$$

$$k\psi \circ \phi(\vec{a}) = k\psi(\phi(\vec{a})) = \psi(k\phi(\vec{a})) = \psi(\phi(k\vec{a})) = \psi \circ \phi(k\vec{a})$$

$$\Rightarrow \psi \circ \phi : V \to X \; \textit{ist linear}$$

b) Wenn ϕ bijektiv ist, so ist die Umkehrabbildung $\phi^{-1} : W \to V$ eine lineare Abbildung.

Lösung:
Zuerst einmal nehmen wir (wie in der Klausur) an, V und W seien endlich dimensional: Wir wissen: Eine lineare Abbildung ist definiert durch Bilder auf einer Basis.
Sei $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ Basis von V.
$\Rightarrow \vec{w}_1 = \phi(\vec{e}_1), \vec{w}_2 = \phi(\vec{e}_2), ..., \vec{w}_n = \phi(\vec{e}_n)$ ist Basis von W (da ϕ bijektiv)
Definiere:

$$\sigma(\vec{w}_1) = \vec{v}_1$$

$$\sigma(\vec{w}_2) = \vec{v}_2$$

$$....$$

$$\sigma(\vec{w}_n) = \vec{v}_n$$

Diese Abbildung ist offenbar linear und es gilt $\forall i$:

$$\sigma \circ \phi(\vec{v}_i) = \sigma(\phi(\vec{v}_i)) = \sigma(\vec{w}_i) = \vec{v}_i$$

Analog gilt:

$$\phi \circ \sigma(\vec{w}_i) = \vec{w}_i$$

Da dies für alle Basisvektoren gilt, gilt es für jeden Vektor $\vec{x} \in V$

$$\left(\sigma \circ \phi(\vec{x}) = \sigma \circ \phi(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma \circ \phi(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i = \vec{x}\right)$$

$\Rightarrow \sigma = \phi^{-1} \Rightarrow \phi^{-1}$ linear

Dies kann man nun auf unendlich dimensionale Räume verallgemeinern. Wir wissen: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis, auch unendlich dimensionale. Mit solch einer Basis funktioniert der Beweis nun genau gleich. Statt $\phi_1, ..., \phi_n$ nimmt man nun $\phi_i, i \in I$ und verfährt völlig analog.

3 . Aufgabe :
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

gegeben.
Für welche t hat $Ax = b$ mindestens eine Lösung?

Lösung:
Löse Gleichungssystem durch elementare Zeilenumformungen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & t \end{array}\right) \begin{array}{c} I = I - \frac{1}{2} II \\ III = III * 4 \\ IV = IV * 2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 12 & 4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 & 2t \end{array}\right) \begin{array}{c} III = III - 3 * II \\ IV = IV + II \\ \sim \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 2t \end{array}\right) \begin{array}{c} II = II + III \\ IV = IV + III \\ III = 2 * III \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2t + 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Für $t \neq -2$ hat das System keine Lösung. Für $t = -2$ hat das System die Lösung $(x_3 + 1, -3x_3 - 2, x_3)$ (x_3 beliebig)

4 . Aufgabe :
Es sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $K-$Vektorräumen V und W. Zeigen Sie:

1. f ist genau dann injektiv, wenn $Kern(f) = \{0\}$ gilt.

   Lösung:
   Zeige transponierte Aussage: f nicht injektiv $\Leftrightarrow Kern(f) \neq \{0\}$
   $\Leftarrow$: Sei $Kern(f) \neq \{0\}$
   $$\Rightarrow \exists \vec{x} \in Kern(f) : \vec{x} \neq \vec{0}$$
   $$\Rightarrow f(\vec{x}) = f(\vec{0}) = \vec{0} \ \wedge \ \vec{x} \neq \vec{0}$$
   $$\Rightarrow f \ nicht \ injektiv$$
   $\Rightarrow$: Sei f nicht injektiv
   $$\Rightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{y} : f(\vec{x}) = f(\vec{y})$$
   $$\Rightarrow f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = f(\vec{x} - \vec{y}) = \vec{0}$$
   $$\Rightarrow \vec{x} - \vec{y} \neq \vec{0} \ \wedge \ (\vec{x} - \vec{y}) \in Kern(f)$$
   $$\Rightarrow Kern(f) \neq \{0\}$$

2. f ist genau dann injektiv, wenn es ein $g : W \to V$ mit $g \circ f = id_V$ gibt.

   Lösung:
   Anmerkung: Für diese Äquivalenz braucht man in keiner Weise, dass V, W Vektorräume bzw. dass f injektiv. Der folgende Beweis kommt ohne diese Voraussetzungen aus.
   $\Leftarrow$: Widerspruchsbeweis: Sei f nicht injektiv
   $$\Rightarrow \exists \vec{x} \neq \vec{y} : f(\vec{x}) = f(\vec{y})$$
   $$\Rightarrow g \circ f(\vec{x}) = g \circ f(\vec{y}) \ \wedge \vec{x} \neq \vec{y}$$
   $$Widerspruch \ zu \ g \circ f = id_V$$
   $\Rightarrow$:
   Wähle $\vec{a} \in V$ beliebig.
   Definiere nun eine Abbildung $g : W \to V$ gemäß:
   $g(\vec{x}) = \vec{a}$ falls $\vec{x} \notin Bild(f)$
   Falls $\vec{x} \in Bild(f)$ existiert (da f injektiv) genau ein $\vec{v}_x \in V$ mit $f(\vec{v}_x) = \vec{x}$
   Setze $g(\vec{x}) = \vec{v}_x$
   Für $\vec{y} \in V$ gilt nun: $g \circ f(y) = y$ also $g \circ f = id_V$