RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

Mathematisches Institut

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 15.07.2016

Übungsblatt 14

Geodätischen

Abzugeben bis Freitag, 22.07.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Kurve $\gamma : [0, \infty) \to M$ heißt *divergent*, falls es für jede kompakte Menge $K \subset M$ ein t_0 gibt, so dass $\gamma(t) \notin K \ \forall t > t_0$. Wir definieren die Länge einer divergenten Kurve als

$$L(\gamma) := \lim_{t\to\infty} \int_0^t \|\dot\gamma(s)\| \mathrm{d}s \in [0, \infty]$$

Zeigen Sie: M ist genau dann vollständig, wenn die Länge jeder divergenten Kurve unbeschränkt ist (also gleich ∞ in obiger Definition).

Aufgabe 2. Sei (M, g) eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei $R > 0$, $p \in M$ und $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folgen in M, so dass $d(x_i, p) \xrightarrow{i\to\infty} \infty$, $d(y_i, p) \xrightarrow{i\to\infty} \infty$ und jede kürzeste Verbindung von x_k mit y_k den Ball $B_R(p)$ trifft.
Zeigen Sie: Es existiert eine Gerade in M, also eine bezüglich der Pfadmetrik isometrische Einbettung $\mathbb{R} \to M$.

Aufgabe 3. Es sei (M, g) ein lokal symmetrischer Raum, d.h. eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $DR = 0$. Für ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\exp_p : B_\varepsilon(0) \to \exp_p(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(p)$$

ein Diffeomorphismus ist, definieren wir die geodätische Spiegelung

$$\sigma_p : B_\varepsilon(p) \to B_\varepsilon(p)$$

vermöge $\sigma_p(\gamma(t)) = \gamma(-t)$ für alle Geodätischen γ mit $\gamma(0) = p$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma_p = \exp_p \circ (-\mathrm{id}_{T_pM}) \circ \exp_p^{-1}$.

(b) Es sei $v \in B_\varepsilon(0)$ und $q = \exp_p(v)$. Wir bezeichnen den Paralleltransport entlang den Geodätischen $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ und $\tilde\gamma(t) = \gamma(-t)$ mit

$$\mathcal{P}_t : T_{\gamma(0)}M \to T_{\gamma(t)}M \text{ und } \tilde{\mathcal{P}}_t : T_{\tilde\gamma(0)}M \to T_{\tilde\gamma(t)}M$$

und definieren

$$\Phi_t : T_{\gamma(t)}M \ni w \to \tilde{\mathcal{P}}_t \circ (-\mathrm{id}_{T_pM}) \circ \mathcal{P}_t^{-1}(w) \in T_{\tilde\gamma(t)}M$$

Zeigen Sie: Ist $t \to J(t)$ ein Jacobi-Feld längs γ, so ist $t \to \tilde J(t) = \Phi_t(J(t))$ ein Jacobi-Feld längs $\tilde\gamma$.

(c) Folgern Sie, dass $\sigma : B_\varepsilon(p) \to B_\varepsilon(p)$ eine Isometrie ist.
Hinweis: Ist $q = \exp_p(v) \in B_\varepsilon(p)$ und $X \in T_qM$, so existiert genau ein $x \in T_v(T_pM) \simeq T_pM$ mit $(d_v\exp_p)(x) = X$. Wenden Sie nun (b) auf das Jacobi-Feld J längs $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ mit $J(0) = 0$ und $D_t|_{t=0}J(t) = x$ an.

Aufgabe 4. Es seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension, wobei N zusammenhängend sei.

(a) Es seien $h, \tilde{h} : N \to M$ lokale Isometrien, und es existiere ein Punkt $p \in N$ mit $h(p) = \tilde{h}(p)$ und $d_p h(v) = d_p \tilde{h}(v)$ für alle $v \in T_p N$. Zeigen Sie, dass dann schon $h = \tilde{h}$ gilt.

(b) Es sei $f : M \to M$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass die Zusammenhangskomponenten von $\mathrm{Fix}(f) = \{p \in M \mid f(p) = p\}$ Untermannigfaltigkeiten von M sind.

Hinweis: Verwenden Sie, dass für alle $q \in M$ die Exponentialabbildung $\exp_q$ ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung von $0 \in T_q M$ ist und dass (lokale) Isometrien Geodäten auf Geodäten abbilden.