RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

MATHEMATISCHES INSTITUT

Vorlesung Differentialgeometrie I
Heidelberg, 6.05.2016

ÜBUNGSBLATT 4

Bündel

Abzugeben bis Freitag, 13.04.16, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. Das *Möbiusbündel* ist die Menge $[0,1] \times \mathbb{R}/\sim$, mit der Äquivalenzrelation $(0,r) \sim (1,-r)$.

(a) Zeigen Sie, dass das Möbiusbündel eine Struktur als Vektorbündel von Rang 1 (Linienbündel) über S^1 besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Möbiusbündel nicht isomorph zum trivialen Bündel $S^1 \times \mathbb{R}$ ist.

(*Definition*: Ein Bündelisomorphismus ist eine Bündelabbildung, zu der es eine inverse Bündelabbildung gibt.)

Aufgabe 2. Das tautologische Linienbündel (bzw. sein Totalraum) über $\mathbb{RP}^n$ ist

$$L_n = \left\{(x,v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in x\right\}.$$

Zeigen Sie, dass es eine natürliche Struktur als Vektorbündel über $\mathbb{RP}^n$ besitzt.

Aufgabe 3. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Das Normalbündel über M ist

$$N(M) = \{(v,x) \in \mathbb{R}^n \times M \mid \forall w \in T_x(M), \langle v,w\rangle = 0\}$$

Zeigen Sie, dass es eine natürliche Struktur als Vektorbündel über M besitzt.

Aufgabe 4. Für jede der drei Lie-Gruppen G in Übungsblatt 3, Aufgabe 3, finden Sie den Tangentialraum $T_e(G)$ an der Identität e.