

Tensorrechnung und Riemannsche Geometrie

16. August 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	5
1.1	Vorbemerkungen	6
1.2	Einsteinkonvention	7
1.3	Formen und Felder	8
1.4	$C^\infty(U)$ -Linearität	10
1.5	Zusammenhänge	11
1.6	Vektorfelder als Differentialoperatoren	13
1.7	Die Krümmung	15
1.8	Lineare Differentialgleichungen	16
1.9	Zusammenhänge auf dem Tangentialbündel	19
1.10	Metrische Zusammenhänge	20
1.11	Der Levi-Civita Zusammenhang	22
1.12	Tensorprodukte	24
1.13	Die Hessematrix	25
1.14	Krümmung und kovariante Ableitung	26
1.15	Pullback von Tensoren	27
1.16	Pullback von Zusammenhängen	29
1.17	Pushforward	30
1.18	Diffeomorphismen	31
1.19	Mannigfaltigkeiten	33
1.20	Vektorbündel	36
1.21	Zusammenhänge auf Vektorbündeln	38
1.22	*Vektorbündel auf \mathbb{R}	40
2	Die lineare Gruppe	41
2.1	Vorbemerkungen	42
2.2	Die Exponentialabbildung	43
2.3	Darstellungen und Gewichte	44

2.4	Die Liealgebra	45
2.5	Die Algebra U	46
2.6	Höchstgewichte	47
2.7	Der Casimir Operator	49
2.8	Die Höhengraduierung	51
2.9	Gewichtsyoga	52
2.10	*Sprungstellen	53
3	Tensoren	54
3.1	Vorbemerkungen	55
3.2	Multilineare Algebra	56
3.3	Die Tensoralgebra $T(V)$	57
3.4	Symmetrische Tensoren	58
3.5	*Multipolynome	59
3.6	Alternierende Tensoren	60
3.7	Die Zerlegung des Tensorprodukts	61
3.8	*Die symmetrische Gruppe	64
3.9	*Der Satz von Weyl	66
3.10	*Dimensionswechsel	68
3.11	*Tensorideale	70
3.12	*Appendix (Kovariante Ableitungen)	71
4	Formale Normalkoordinaten	72
4.1	Vorbemerkungen	73
4.2	Koordinatentransformationen	74
4.3	Beweis von Satz 5	76
4.4	*Der Raum $R^{r,2}(V)$	78
4.5	*Appendix	80
5	Riemannsche Geometrie	82
5.1	Einige Konventionen	83
5.2	Kurvenlänge	84
5.3	Parallel Transport	86
5.4	Geodäten	89
5.5	Geodätische Normalkoordinaten	91
5.6	Der Euleroperator	93
5.7	Die Länge in Polarkoordinaten	95
5.8	Strikte Injektivität	100

5.9	Vollständigkeit	101
5.10	Richtungen	103
5.11	Der Satz von Hopf-Rinow	106
5.12	Lokale Konvexität	107
5.13	*Appendix (Indefinite Metriken)	110
6	Algebraische Eigenschaften der Krümmung	112
6.1	Vorbemerkung	113
6.2	Das Kulkarni-Nomizu Produkt	114
6.3	Appendix: Tensoren der Stufe 4	116
6.4	Der Krümmungstensor	117
6.5	*Der Krümmungstensor II	119
7	Geometrische Bedeutung der Krümmung	120
7.1	Vorbemerkung	121
7.2	Die Schnittkrümmung	122
7.3	Gauss-Bonnet	124
7.4	Die hyperbolische Ebene	128
7.5	Hyperflächen	132
7.6	*Die zweite Fundamentalform	135
7.7	*Die Mainardi-Codazzi und Gaussgleichungen	137
8	Die Transportgleichungen	138
8.1	Vorbemerkungen	139
8.2	Kanonische Koordinatenwechsel	141
8.3	Die Transport Matrizen	143
8.4	Paralleltransport in Normalkoordinaten	145
8.5	Jacobifelder	149
8.6	Konstante Krümmung	154
8.7	Der verallgemeinerte Cotangens Σ	155
8.8	Räume mit konstanter Krümmung	157
8.9	*Der Konvexitätsradius	158
8.10	*Die Singularitäten von Σ	161
8.11	*Konvexitätspunkte	163
9	Lokale Extrema und der reguläre Stern	165
9.1	Vorbemerkung	166
9.2	Die ersten beiden Variationen	167

9.3	*Länge versus Energie	169
9.4	Die Indexform	170
9.5	Konjugierte Punkte	171
9.6	Charakterisierung der Minimalkurven	174
9.7	Der Satz von Klingenberg	177
9.8	Geschlossene Geodäten	179
10	Vergleichssätze	181
10.1	Asymptotik von Jacobifeldern	182
10.2	Satz von Rauch	183
11	Räume mit negativer Krümmung	185
12	Liegruppen	186
13	Appendices	187
13.1	Appendix 1 (Eine Verallgemeinerung)	188
13.2	Appendix 2 (Die Riccati Differentialgleichung)	189
13.3	Appendix 3 (Formeln auf Geodäten)	196
13.4	Appendix 4 (Dictionary)	200
13.5	Appendix 5 (Die dritte Variation)	202

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Vorbemerkungen

Dieses Skript zur Vorlesung Einführung in die Differentialgeometrie (SS 2005) endet leider sehr abrupt. Grund: Die geplante Fortsetzung der Vorlesung im WS musste einer Anfängervorlesung weichen.

Viele Kapitel sind mit einem Stern versehen, sind optional und können daher beim ersten Lesen übersprungen werden. Wer nur an der Riemannschen Geometrie interessiert ist sollte Kapitel 1 und 5-9 lesen.

In diesem Abschnitt werden einige fundamentale Konzepte der Riemannschen Geometrie eingeführt, nämlich der Begriff des Zusammenhangs, der Torsion und der Krümmung.

Da diese Begriffe differentialgeometrischer und nicht topologischer Natur sind, sind sie bereits für offene Teilmengen des \mathbb{R}^N interessant. Sie werden daher zuerst für offene Teilmengen des \mathbb{R}^N eingeführt. Erst am Ende des Kapitels wird dann, ohne dabei gross auf Details einzugehen, angegeben wie sich allgemeiner diese Begriffe für Mannigfaltigkeiten definieren lassen.

Der Begriff der kovarianten Ableitung ∇ ist für die Analysis auf Mannigfaltigkeiten von fundamentaler Bedeutung, da nur kovariante Ableitungen von Tensoren wieder Tensoren definieren.

Als Ausblick wird schliesslich der Begriff des Vektorbündels eingeführt. Da wir später – bis auf wenige unvermeidbare Stellen – den Begriff des Vektorbündels eigentlich nicht benötigen, beschränkt sich der Ausblick darauf die später nützliche Aussage, dass jedes Vektorbündel auf einem reellen Intervall trivial ist. Einige der Bilder und anschauliche Erläuterungen, welche im Rahmen der Vorlesung gegeben wurden, fehlen leider (sic) in diesem Teil des Skripts.

1.2 Einsteinkonvention

Sei E ein reeller n -dimensionaler Vektorraum. Ist eine Basis e_1, \dots, e_n von E gewählt, schreiben wir Vektoren¹ v in E in der Form $v = (v^1, \dots, v^n)$. Bezüglich der Dualbasis e_1^*, \dots, e_n^* des Dualraums E^* schreiben sich die Vektoren $w \in E^*$ in der Form² $w = (w_1, \dots, w_n)$. Wir schreiben kurz $e^i := e_i^* \in E^*$.

Beachte die Konvention: Ist $M = (M_{ij})$ eine Matrix in der sonst üblichen Schreibweise, so schreiben wir jetzt $M = (M_j^i)$.

Üblicher Weise gilt für die Matrizenmultiplikation $(Mv)_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}v_j$ für Vektoren $v = (v_1, \dots, v_n)$, bzw. $M(e_i) = \sum_{j=1}^n M_{ji}e_j$. Da wir aber für Vektoren $v \in E$ generell $v = (v^1, \dots, v^n)$ schreiben, lautet für die neue Schreibweise M_j^i die Matrixmultiplikationsformel

$$(Mv)^i = \sum_{j=1}^n M_j^i v^j .$$

Entsprechend ergibt sich die Formel $M(e_i) = \sum_{j=1}^n M_i^j e_j$.

Diese neue Schreibweise mit oberen Indices suggeriert die Einsteinkonvention:

$$v^j M_j^i := M_i^j v^j := \sum_j M_i^j v^j .$$

Untere und obere Indices, welche gleich sind, werden summiert! Analog $M(e_i) = M_i^j e_j$.

Anderes Beispiel: Für Bilinearformen $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, schreibt man $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ wie bisher. Dann ist $g(v, w) = v^i g_{ij} w^j$. Wir schreiben auch nur $\langle v, w \rangle$ und $\|v\| = g(v, v)$, wenn g fixiert ist. g^{ij} bezeichne die Koeffizienten der zu g inversen Matrix.

Das Skalarprodukt schreibt sich dann in der Form $\|v\| = v^i v_i$, wobei $v_i = g_{ij} v^j$ die Koordinaten eines Vektors des Dualraums definiert. Ist $g = (g_{ij})$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf E , dann definiert $E \ni (v^1, \dots, v^n) \mapsto (v_1, \dots, v_n) \in E^*$ die übliche durch g induzierte Identifikation des Vektorraums mit seinem Dual. Für eine Basis e_i setzen wir $e^i = g^{ij} e_j$. Dann gilt $g(e^i, e_j) = g(g^{ik} e_k, e_j) = g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i$. Also repräsentieren die e^i die Dualbasis.

¹Eigentlich sollten hier Spaltenvektoren stehen

²Und hier nur Zeilenvektoren

1.3 Formen und Felder

Für Punkte im \mathbb{R}^N schreiben wir $x = (x^1, \dots, x^N)$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge. Funktionen auf U heissen glatt, wenn sie unendlich oft differenzierbar sind auf U .

Sei E ein endlich dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum. Dann bezeichne

$$E(U) = C^\infty(U, E)$$

den \mathbb{R} -Vektorraum aller glatten E -wertigen Funktionen $\eta : U \rightarrow E$. Im Fall $E = \mathbb{R}$, dann schreiben wir $E(U) = C^\infty(U)$. $C^\infty(U)$ ist ein Ring!

Modulstruktur: Funktionen aus $E(U)$ kann man mit glatten reellwertigen Funktionen multiplizieren. Auf diese Weise wird $E(U)$ ein $C^\infty(U)$ -Modul. Ist e_1, \dots, e_n eine Basis von E , dann schreibt sich $\eta \in E(U)$ in der Gestalt $\eta(x) = \sum_i \eta^i(x) e_i$. In der Tat ist $E(U)$ ein freier $C^\infty(U)$ -Modul vom Rang $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ aufgespannt von den e_i .

Sei E^* der Dualraum von E und $e^i \in E^*$ sei eine Dualbasis der $e_i \in E$, dann definiert $\langle \sum_i \omega_i(x) e^i, \sum_j \eta^j(x) e_j \rangle = \sum_i \omega_i(x) \eta^i(x)$ eine $C^\infty(U)$ bilineare nicht-ausgeartete kanonische Paarung

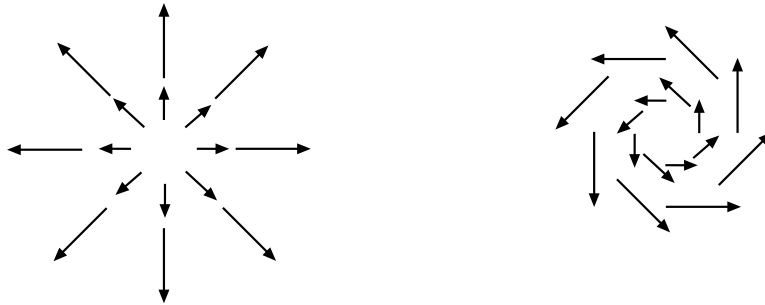
$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E^*(U) \times E(U) \rightarrow C^\infty(U) .$$

Vektorfelder: Wir sind an dem Spezialfall besonders interessiert, nämlich dem Fall wo wir Vektoren in E als Tangentialvektoren interpretieren. In diesem Fall schreiben wir T anstelle von E . Das heisst also $T = \mathbb{R}^N$. Anschaulich stellen wir uns in diesem Fall $X(x)$ als einen Vektor vor der im Punkt x seinen Ursprung hat. Da der Vektor $X(x)$ glatt von x abhängt, bekommt man auf diese Weise ein Feld von Vektoren, ein Vektorfeld auf U . Die kanonische Basis von T bezeichnen wir mit $\partial_1, \dots, \partial_N$. Dies hat im Moment nur eine symbolische Bedeutung: Wir schreiben also

$$X = X^1(x) \cdot \partial_1 + \dots + X^N(x) \cdot \partial_N$$

für Vektorfelder X . Später werden wir aber in der Tat Vektorfelder als Differentialoperatoren interpretieren! Die Koeffizienten $X^i(x)$ des Vektorfelds sind glatte Funktionen aus $C^\infty(U)$.

Das radiale Eulerfeld $E = x\partial_x + y\partial_y$ und das Drehfeld $R = x\partial_y - y\partial_x$.



Differentialformen: Der zweite wichtige Spezialfall ist dazu dual $E = T^*$. Vektoren in T^* heissen Kotangentialvektoren. Die Dualbasis der Basis $\partial_1, \dots, \partial_N$ von T bezeichnen wir mit den Symbolen dx_1, \dots, dx_N . Elemente $\eta \in T^*(U)$ bezeichnet man als Differentialformen auf U . $\eta \in T^*(U)$ ist also von der Gestalt

$$\eta = \eta_1(x)dx^1 + \dots + \eta_N(x)dx^N$$

mit glatten Koeffizienten $\eta_i(x) \in C^\infty(U)$.

Tensoren: Allgemeiner interessieren uns auch Vektorräume E , welche aus dem Tangentialraum T oder dem Kotangentialraum T^* durch iterierte Tensorproduktbildungen entstehen. Ist E von dieser Gestalt, nennt man Funktionen in $E(U)$ Tensoren auf U . Später relevante Beispiele: $E = T^* \otimes T^*$ oder $E = T \otimes T^* \otimes T^* \otimes T^*$ oder $E = T^* \otimes T^* \otimes T^* \otimes T^*$ etc.

Tensoren in $T^* \otimes \dots \otimes T^* = (T^*)^{\otimes r}$ sind nichts anderes als \mathbb{R} -lineare Multilinearformen $f : T \times \dots \times T \rightarrow \mathbb{R}$ in r Variablen. Insbesondere hat man den Unterraum $\Lambda^i(T^*) \subseteq (T^*)^{\otimes i}$ der alternierenden Multilinearformen. Wir werden später Tensorprodukte genauer untersuchen und verweisen auf diese Abschnitte in Kapitel III.

1.4 $C^\infty(U)$ -Linearität

Wir betrachten jetzt $C^\infty(U)$ -lineare Abbildungen, d.h. Abbildungen

$$T : E_1(U) \rightarrow E_2(U),$$

für die gilt $T(X + Y) = T(X) + T(Y)$ sowie $T(fX) = fT(X)$ für alle $X, Y \in E_1(U)$ und alle $f \in C^\infty(U)$.

Beispiel: $T(\sum_i X^i(x)e_i) = \sum_{j,i} M_i^j(x)X^i(x)f_j$ ist $C^\infty(U)$ -linear, für gegebene Basisvektoren e_i von E_1 beziehungsweise f_j von E_2 . Dieser Abbildung ist die glatte matrixwertige Funktion mit den Koeffizienten $M_i^j(x)$ aus $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2)(U)$ zugeordnet.

Abstrakter: Sei $E = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2) = E_1^* \otimes E_2$. Für $\Gamma \in E(U)$ und $X \in E_1(U)$ ist die Zuordnung $T(X) = \Gamma \cdot X \in E_2(U)$ offensichtlich $C^\infty(U)$ -linear und man liefert eine kanonische Abbildung

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2)(U) \rightarrow \text{Hom}_{C^\infty(U)}(E_1(U), E_2(U)).$$

Da die Moduln $E_1(U)$ und $E_2(U)$ freie $C^\infty(U)$ -Moduln sind, ist diese Abbildung ein Isomorphismus

Lemma 1. Sei $E = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2) = E_1^* \otimes E_2$. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$E(U) = \text{Hom}_{C^\infty(U)}(E_1(U), E_2(U)).$$

Beweis: Wir beschränken uns darauf die Umkehrabbildung anzugeben.

Sei $T : E_1(U) \rightarrow E_2(U)$ eine $C^\infty(U)$ -lineare Abbildung. Fasst man Vektoren e_i einer Basis von E_1 als konstante Funktionen auf U auf, so ist $T(e_i) \in E_2(U)$ erklärt. Bezüglich einer Basis f_j von E_2 gilt daher $T(e_i) = \sum_j M_i^j(x)f_j$ für gewisse glatte reellwertige Funktionen $M_i^j(x)$. Diese Koeffizienten definieren ein Element in $E(U)$, das gesuchte Bild von T unter der Umkehrabbildung.

Bemerkung: Eine Variante des obigen Lemmas besagt, dass $C^\infty(U)$ -multilineare Abbildungen $T : E_1(U) \times \cdots \times E_r(U) \rightarrow E$ eindeutig den Elementen von $(E_1^* \otimes \cdots \otimes E_r^* \otimes E)(U)$ entsprechen. Einige im folgenden in natürlicher Weise auftretende Tensoren, nämlich die Torsion und die Krümmung, werden auf diese Weise erklärt.

1.5 Zusammenhänge

Zusammenhänge verallgemeinern den Begriff des totalen Differentials einer Funktion auf vektorwertige Funktion. Bei der totalen Differentiation wird aus einer Funktion eine Differentialform. Beim Ableiten mit einem Zusammenhang nimmt die Zahl der Variablen ebenso zu: aus einer E -wertigen Funktion wird eine E -wertige Differentialform.

Zur Erinnerung: Die totale Ableitung $d : C^\infty(U) \rightarrow T^*(U)$ einer Funktion f ist die Differentialform

$$df = \sum_{i=1}^N \partial_i f(x) \cdot dx^i .$$

Die Ableitung d ist \mathbb{R} -linear und erfüllt die Produktregel $d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$. Wir schreiben hierbei kurz ∂_i für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Definition: Eine Abbildung

$$\nabla : E(U) \rightarrow (T^* \otimes E)(U)$$

heißt verallgemeinerte Ableitung oder Zusammenhang auf E , wenn gilt

- ∇ ist \mathbb{R} -linear
- Verallgemeinerte Produktregel: $\nabla(f \cdot \eta) = df \otimes \eta + f \cdot \nabla(\eta)$ für alle Funktionen $f \in C^\infty(U)$ und alle $\eta \in C^\infty(U, E)$.

Unmittelbar aus der Definition von Zusammenhängen folgt

Lemma 2. Sei ∇ eine fixierter Zusammenhang auf E . Dann ist jeder andere Zusammenhang auf E von der Form $\nabla + \theta$ für eine $C^\infty(U)$ -lineare Abbildung $\theta : E(U) \rightarrow (T^* \otimes E)(U)$, also für ein Element aus $\theta \in (T^* \otimes \text{End}(E))(U)$. Für jedes solche θ definiert $\nabla + \theta$ einen Zusammenhang auf E .

Beispiel: Seien $\Gamma_i \in \text{End}(E)(U)$ glatte matrixwertige Funktionen auf U . Dann definiert (bei Wahl einer Basis e_1, \dots, e_n von E)

$$\nabla \begin{pmatrix} \eta^1(x) \\ \vdots \\ \eta^n(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N dx^i \otimes \left[\begin{pmatrix} \partial_i \eta^1(x) \\ \vdots \\ \partial_i \eta^n(x) \end{pmatrix} + \Gamma_i(x) \cdot \begin{pmatrix} \eta^1(x) \\ \vdots \\ \eta^n(x) \end{pmatrix} \right]$$

einen Zusammenhang auf E . Für $\Gamma = \sum_i dx^i \otimes \Gamma_i$ schreiben wir also kurz

$$\boxed{\nabla = d + \Gamma \quad , \quad \Gamma \in \mathbb{C}^\infty(U, T^* \otimes \text{End}(E))}.$$

Aus dem letzten Lemma folgt

Korollar 1. : *Jeder Zusammenhang auf E hat die Gestalt $\nabla = d + \Gamma$ (wie im obigen Beispiel).*

Einige Notationen: $\nabla(\eta) \in (T^* \otimes E)(U)$ kann man bezüglich der Basis dx_i von T^* in Komponenten entwickeln $\nabla(\eta) = \sum_i dx^i \otimes \nabla_i(\eta)$. Die Koeffizienten $\nabla_i(\eta)$ liegen dann in $E(U)$. Obige Formel liefert explizit

$$\boxed{\nabla_i(\eta) = \partial_i(\eta) + \Gamma_i(\eta)}.$$

Die Matrizen $\Gamma_i \in \text{End}(E)(U)$, oder genauer deren Matrixkoeffizienten, nennt man die Christoffelsymbole des Zusammenhangs ∇ .

Bemerkung: Seien $i_F : F(U) \rightarrow E(U)$ und $p_F : E(U) \rightarrow F(U)$ zwei $C^\infty(U)$ -lineare Abbildungen mit der Eigenschaft $p_F \circ i_F(\eta) = \eta$ für alle $\eta \in F(U)$. Dann ist die Zusammensetzung $\nabla_F : F(U) \rightarrow (T^* \otimes F)(U)$

$$\nabla_F = (id_{T^*} \otimes p_F) \circ \nabla \circ i_F$$

eine \mathbb{R} -lineare Abbildung, und erfüllt $\nabla_F(f\eta) = df \otimes \eta + f\nabla_F(\eta)$. Also definiert ∇_F ein Zusammenhang auf F .

1.6 Vektorfelder als Differentialoperatoren

Ein Vektorfeld $X = \sum X^i(x)\partial_i$ auf U kann in natürlicher Weise als Differentialoperator vom Grad 1 auf $C^\infty(U)$ aufgefasst werden. Dabei soll $X = \sum X^i(x)\partial_i$ in der naheliegenden Weise durch $f \mapsto X(f) = \sum_i X^i(x)\partial_i(f)(x)$ operieren. Der so definierte Operator

$$X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$$

$$f \mapsto X(f)$$

ist eine Derivation, d.h. er ist \mathbb{R} -linear $X(f + g) = X(f) + X(g)$ und erfüllt $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ für alle $f, g \in C^\infty(U)$.

Bemerkung: Wegen $X(1) = X(1 \cdot 1) = 1 \cdot X(1) + 1X(1) = 2X(1)$ gilt $X(1) = 0$ und dann auch allgemeiner $X(c)$ für alle $c \in \mathbb{R}$. Das heisst jede solche Derivation annulliert automatisch die konstanten Funktionen.

Man zeigt leicht³

Behauptung: Die Derivationen $X : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ entsprechen eineindeutig den Vektorfeldern $X = \sum_{i=1}^N X^i(x)\partial_i$ auf U . Die Zuordnung wird gegeben durch $X \mapsto X^i = X(x^i) \in C^\infty(U)$ (Komponenten des Vektorfelds).

Der Kommutator zweier Derivationen X und Y

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

ist \mathbb{R} -bilinear in X und Y , und definiert wieder eine Derivation. Das zugehörige Vektorfeld $[X, Y]$ ist

$$[X, Y] = \sum_j [X^j(\partial_j Y^i) - Y^j(\partial_j X^i)] \cdot \partial_i.$$

Beweis: Übungsaufgabe.

³Beweis: Für $f(x) = (x^i - \zeta^i)g(x)$ verschwindet $(x^i - \zeta^i)X(g)|_{x=\zeta}$. Aus der Derivationseigenschaft folgt daher $X(f)|_{x=\zeta} = X(x^i)g(\zeta)$. Taylorentwicklung $f(x) = f(\zeta) + (x^i - \zeta^i) \cdot (\partial_i f)(\zeta) + O((x - \zeta)^2)$ liefert $X(f)(\zeta) = \sum_i X^i(\zeta)\partial_i(f)(\zeta)$ für beliebiges $f \in C^\infty(U, E)$.

Allgemeiner: Ist $\nabla = \partial + \Gamma$ ein Zusammenhang auf E , dann definiert man analog den Differentialoperator

$$\nabla_X : E(U) \rightarrow E(U)$$

durch die Formel $\nabla_X = \sum_i X^i(x) \cdot (\partial_i + \Gamma_i(x))$ oder intrinsisch durch die Formel $\nabla_X(\eta) = \langle X, \nabla(\eta) \rangle$.

Beispiel: Im Spezialfall $X = \partial_i$ liefert dies die Operatoren $\nabla_X = \nabla_i = \partial_i + \Gamma_i$. Die Kenntnis aller ∇_X bestimmt daher den Zusammenhang ∇ .

Im Gegensatz zum Zusammenhang ∇ sind die ∇_X Differentialoperatoren, welche $E(U)$ in sich überführen. Man kann also die Operatoren hinter einander ausführen, wovon wir in den nächsten Abschnitten Gebrauch machen werden. Man erhält dadurch Differentialoperatoren höherer Ordnung. Geeignete Bildungen dieser Art liefern dann wieder Differentialoperatoren vom Grad 1 oder 0.

Diagramm: Für $X \in T(U)$

$$\begin{array}{ccc} E(U) & \xrightarrow{\nabla} & (T^* \otimes E)(U) \\ & \searrow \nabla_X & \downarrow \langle X, \cdot \rangle \\ & & E(U) \end{array}$$

Offensichtlich gelten für $f \in C^\infty(U)$, $\eta \in E(U)$ und $X, Y \in T(U)$ die Formeln

- $\nabla_{X+Y}(\eta) = \nabla_X(\eta) + \nabla_Y(\eta)$.
- $\nabla_{fX}(\eta) = f \nabla_X(\eta)$.
- $\nabla_X(f \cdot \eta) = X(f) \cdot \eta + f \cdot \nabla_X(\eta)$.

Der duale Zusammenhang: Sei $\nabla_E : E(U) \rightarrow (T^* \otimes E)(U)$ ein Zusammenhang auf E . Bezüglich einer Basis e_1, \dots, e_n von E gilt ${}^E\Gamma_i = ({}^E\Gamma_{ij}^k)$. Sei E^* der Dualraum von E . Bezüglich der Dualbasis e^1, \dots, e^n von E^* definiert ${}^{E^*}\Gamma_i = ({}^{E^*}\Gamma_{ij}^k)$ mittels

$${}^{E^*}\Gamma_{ij}^k = -{}^E\Gamma_{ik}^j$$

die Christoffelsymbole eines Zusammenhangs $\nabla_{E^*} : E^*(U) \rightarrow (T^* \otimes E^*)(U)$. Man nennt dies den zu ∇_E dualen Zusammenhang. Die Definition ist so gemacht, dass für alle $\omega \in E^*(U)$ und alle $\eta \in E(U)$ gilt

$$\boxed{X \langle \omega, \eta \rangle = \langle (\nabla_{E^*})_X(\omega), \eta \rangle + \langle \omega, (\nabla_E)_X(\eta) \rangle}.$$

1.7 Die Krümmung

Für einen Zusammenhang $\nabla : E(U) \rightarrow (T^* \otimes E)(U)$ und Vektorfelder X haben wir im letzten Abschnitt Differentialoperatoren erklärt

$$\nabla_X : E(U) \rightarrow E(U).$$

Im Fall $E = \mathbb{R}$ und $\nabla = d$ gilt per Definition $\nabla_X = X$, also per Definition $\nabla_{[X,Y]} = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X$. Für allgemeines (E, ∇) gilt dies jedoch in der Regel nicht.

Definition: Die Abweichung $R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$ oder ausführlicher

$$R(X, Y) = \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

nennt man die Krümmung des Zusammenhangs ∇ . Es gilt $R(X, Y) \in \text{End}(E)(U)$ oder

$$R \in (T^* \otimes T^* \otimes \text{End}(E))(U).$$

Mit anderen Worten: Die Krümmung $R(X, Y)$ des Zusammenhangs ∇ , aufgefasst als ein Differentialoperator auf $E(U)$, ist von nullter Ordnung (d.h. $C^\infty(U)$ -linear) und daher nach Lemma 1 eine glatte $\text{End}(E)$ -wertige Funktion auf U .

Beweis: In Termen der Christoffelsymbole berechnet man $T(\partial_i, \partial_j)$ als den Ausdruck $(\partial_i + \Gamma_i)(\partial_j + \Gamma_j) - (\partial_j + \Gamma_j)(\partial_i + \Gamma_i)$. Aus der Symmetrie der Hessematrix und $\partial_i \Gamma_j = (\partial_i \Gamma_j) + \Gamma_j \partial_i$ (Produktregel) folgt sofort $R_{ij}(x) = R(\partial_i, \partial_j)(x)$

$$R_{ij} = \partial_i(\Gamma_j) - \partial_j(\Gamma_i) + \Gamma_i \Gamma_j - \Gamma_j \Gamma_i$$

in $\text{End}(E)(U)$. Für die Behauptung verbleibt als Übungsaufgabe zu zeigen:

Lemma 3. Die Krümmung $R(X, Y)$ ist antisymmetrisch und $C^\infty(U)$ -bilinear in den Feldern X und Y . Somit ist die Krümmung R eine alternierende 2-Form mit Werten in $\text{End}(E)$, d.h. ein Element $R \in C^\infty(U, \Lambda^2(T^*) \otimes \text{End}(E))$.

Bemerkung: Per Definition gilt für $R_{ij}(x) \in \text{End}(E)(U)$ die Gleichung

$$\nabla_i \nabla_j = \nabla_j \nabla_i + R_{ij}(x),$$

aufgefasst als Identität zwischen Differentialoperatoren auf $E(U)$.

1.8 Lineare Differentialgleichungen

Eine Lösung $f \in C^\infty(U, E)$ des linearen Differentialgleichungssystems

$$\partial_i f(x) = -\Gamma_i(x) \cdot f(x) \quad , \quad i = 1, \dots, N$$

nennt man flach bezüglich ∇ . Äquivalent sind die Gleichungen $\nabla_i(f) = 0$, oder der Gleichung $\nabla(f) = 0$.

Zum Namen: Sind alle $\Gamma_i(x)$ Null, dann ist eine flache Lösung f nichts anderes als eine konstante Funktion auf U mit Werten in E , aufgefasst als Graph

$$U \rightarrow U \times E \quad , \quad x \mapsto (x, f(x))$$

oder Schnitt ist sie also ‘flach’.

Obstruktion: Lösungen müssen nicht notwendig existieren. Gibt es immer eine Lösung zu vorgegebenen Anfangswerten, heisst der Zusammenhang ∇ flach. Durchläuft in diesem Fall $f(0) = e_i$ eine Basis von E (obdA $0 \in U$), kann man die Lösungen zu den Anfangswerten $f_i(0) = e_i$ zu einer Matrixlösung $F \in C^\infty(U, \text{End}(E))$ zusammenfassen mit dem Anfangswert $F(0) = id_E$. F heisst dann Fundamentallösung.

Existiert eine Fundamentallösung F , so folgt aus $\nabla F = 0$ auch $\nabla_i \nabla_j F(x) = 0$, also insbesondere $R_{ij}(x) \cdot F(x) = (\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i)F(x) = 0$. In einer Umgebung von 0 ist $F(0)$ invertierbar, so dass dort folgt $R_{ij}(x) = 0$. Das Verschwinden der Krümmung ist also eine notwendige Voraussetzung für die Existenz einer Fundamentallösung.

Satz 1. *Sei obdA $U = I^N$ für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ um Null. Das Verschwinden der Krümmung auf U ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer Fundamentallösung F der Gleichung $\nabla(F) = 0$ auf U . Für verschwindende Krümmung ist die Fundamentallösung eindeutig bestimmt. Für eine glatte Familie von Zusammenhängen mit verschwindender Krümmung hängt die Fundamentallösung glatt von den Parametern $p \in P$ ab.*

Beweis: Induktion nach der Dimension N . Per Induktion existiert eine Lösung der Gleichung $\partial_1 F(x_1, 0, \dots, 0) = -\Gamma_1 F(x_1, 0, \dots, 0)$ mit $F(0) = id_E$, und dann wieder nach Induktion eine Lösung $F(x) = F(x_1, \dots, x_N)$ mit $\partial_i F = -\Gamma_i \cdot F$ für

alle $i = 2, \dots, N$ zum Anfangswert $F(x_1, 0, \dots, 0)$. Die Funktion $F(x)$ ist glatt auf U . Es bleibt zu zeigen $\partial_1 F(x) = -\Gamma_1(x) \cdot F(x)$ oder $\nabla_1 F = 0$. Aber

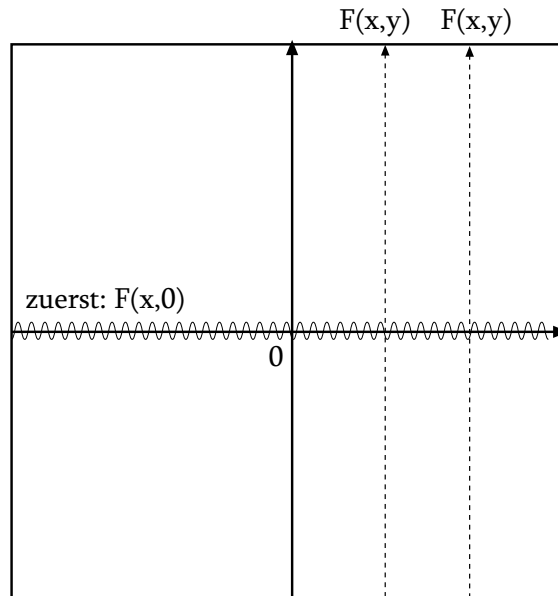
$$\nabla_i \nabla_1 F = \nabla_1 \nabla_i F = \nabla_1(0) = 0 \quad , \quad i \geq 2 .$$

(Verschwinden der Krümmung!) Also ist $\nabla_1 F(x_1, \dots, x_N)$ flach als Funktion in x_2, \dots, x_N zum Anfangswert $\nabla_1 F(x_1, 0, \dots, 0) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung (Induktionsannahme) folgt daraus $\nabla_1 F(x) = 0$. Qed.

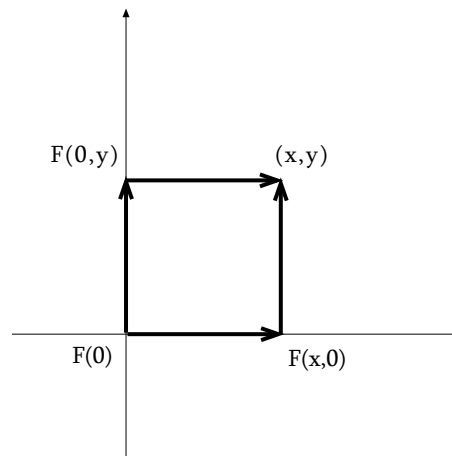
Es bleibt also der Induktionsanfang

Satz 2. Sei $U = I$ ein reelles Intervall und $\nabla : C^\infty(I, E) \rightarrow C^\infty(I, T^* \otimes E)$ ein Zusammenhang. Für jeden Anfangswert $f(0) \in E$ existiert dann eine eindeutige bestimmte flache glatte Lösung f auf I (und die Lösung hängt glatt von eventuellen Parametern $p \in P$ ab).

Beweis: (wohlbekannt!) Die Abbildung $f(x) \mapsto f(0) + \int_0^x \Gamma(t) \cdot f(t) dt$ ist kontraktiv auf $C(I_0, E)$, falls $|I_0| \cdot \max_{(x,p) \in I \times P} |\Gamma(x, p)| < 1$ ($I_0 \subseteq I$ Teilintervall). Daraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit auf I_0 als stetige Funktion (Banachscher Fixpunktsatz). Wegen der Eindeutigkeit verheften sich nämlich die Lösungen auf den Teilintervallen I_0 zu einer Lösung auf I . Die Glattheitsaussagen erhält man im Prinzip ähnlich mit Hilfe der Sobolevtheorie. Siehe alternativ aber auch [].



Bemerkung: Versteckt im letzten Satz ist die Tatsache, dass im eindimensionalen die Krümmung immer verschwindet!



Zwei Wege (xy versus yx): Auch für nicht verschwindende Krümmung kann man die Gleichung $\nabla(F) = 0$ auf Teilgeraden lösen. Beispielsweise im \mathbb{R}^2 etwa zuerst in x -Richtung und dann in y -Richtung: Taylorentwicklung mod $O(x^2)$ und $O(y^2)$ liefert

$$\begin{aligned} F(x, y) &\equiv F(x, 0) - y\Gamma_2(x, 0)F(x, 0) \\ &\equiv [F(0) - x\Gamma_1(0)F(0)] - y\Gamma_2(x, 0)[F(0) - x\Gamma_1(0)F(0)] \\ &\equiv (id_E - x\Gamma_1(0) - y\Gamma_2(0))F(0) - xy(\partial_1\Gamma_2(0) - xy\Gamma_2(0)\Gamma_1(0))F(0) . \end{aligned}$$

Der lineare Term ist symmetrisch in x und y . Der xy -Term $-\partial_1\Gamma_2(0) + \Gamma_2(0)\Gamma_1(0)$ ist es dagegen nicht. Löst man die Gleichung zuerst in die y und danach in x -Richtung, ergibt sich als Unterschied gerade

$$xy \cdot \left(R_{12}(0) + O(x, y) \right)$$

für die Krümmung

$$R_{12}(0) = \partial_1\Gamma_2(0) - \Gamma_2(0)\Gamma_1(0) - \partial_2\Gamma_1(0) + \Gamma_1(0)\Gamma_2(0) .$$

1.9 Zusammenhänge auf dem Tangentialbündel

Ein Zusammenhang ∇ auf dem Tangentialraum $E = T$ definiert für Vektorfelder $X \in T(U)$ die Differentialoperatoren

$$\nabla_X : T(U) \rightarrow T(U).$$

Insbesondere ist $\nabla_X Y - \nabla_Y X$ erklärt.

Definition. Ein Tangential-Zusammenhang $\nabla : C^\infty(U, T) \rightarrow C^\infty(U, T^* \otimes T)$ heisst torsionsfrei, wenn für alle Vektorfelder $X, Y \in T(U)$ gilt

$$\boxed{\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]}.$$

Sei $\nabla = \sum_i dx_i \otimes \nabla_i$ und $\nabla_i = \partial_i + \Gamma_i$. Bezüglich den Basisvektoren ∂_i des Tangentialraums kann man die Endomorphismen Γ_i als Matrizen schreiben, d.h. $\Gamma_i = ((\Gamma_i^k_j))$ mit den Christoffelsymbolen $(\Gamma_i^k_j) = \Gamma_{ij}^k$. In der Notation von Abschnitt §1.5 ist dann gerade

$$\nabla_i(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k(x) \partial_k.$$

Bemerkung: ∇ ist torsionsfrei genau dann wenn für alle i, j, k gilt

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k(x) = \Gamma_{ji}^k(x)}.$$

Beweis: Für die Basisfelder $X = \partial_i$ und $Y = \partial_j$ gilt $[\partial_i, \partial_j] = 0$. Also $T(\partial_i, \partial_j) = \nabla_i(\partial_j) - \nabla_j(\partial_i) - 0 = \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k$. Die Behauptung folgt daher wegen:

Lemma 4. *Der Torsionstensor $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ ist antisymmetrisch und $C^\infty(U)$ -bilinear in X und Y .*

Beweis: $T(fX, Y) - fT(X, Y) = \nabla_{fX} Y - \nabla_Y fX - [fX, Y] - f(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$ ist wegen $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ gleich $Y(fX) - fYX - \nabla_Y(fX) + f\nabla_Y X$. Wegen den Rechenregeln $Y(fX) = (Yf)X + fYX$ und $\nabla_Y(fX) = Y(f) \cdot X + f\nabla_Y X$ ist dies dann aber Null.

1.10 Metrische Zusammenhänge

Eine Pseudometrik auf $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ist eine symmetrische $N \times N$ -Matrix $g(x)$ mit glatten Koeffizienten $g_{ij}(x)$

$$g(x) = (g_{ij}(x)) .$$

Ist $g(x)$ in jedem Punkt $x \in U$ nichtausgeartet, nennt man $g(x)$ eine Metrik. Ist $g(x)$ in jedem Punkt definit, spricht man von einer Riemannschen Metrik. Der Metrik kann man den symmetrischen Tensor

$$g = \sum_{ij} g_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j \in C^\infty(U, T^* \otimes T^*)$$

zuordnen.

Alternativ kann man $g(x)$ als Bilinearform auf dem Tangentialraum T_x von U im Punkt x auffassen. Die Basisvektoren des Tangentialraums identifiziert man mit den ‘Symbolen’ ∂_i . In diesem Sinn wird für Vektorfelder $X = X^i(x)\partial_i$ und $Y = Y^j(x)\partial_j$ eine Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle_g$ definiert durch

$$\langle X, Y \rangle_g = \sum_{ij} X^i(x) g_{ij}(x) Y^j(x) \quad \text{in } C^\infty(U) .$$

Die Paarung stiftet einen Isomorphismus ν_g zwischen Vektorfeldern und Differentialformen

$$\nu_g : T(U) \cong T^*(U) ,$$

definiert durch der Formel $\langle \nu_g(Y), Z \rangle = \langle Y, Z \rangle_g$ (für Vektorfelder $Y, Z \in T(U)$). Links steht die kanonische Paarung zwischen Feldern und Formen, rechts die durch die Metrik induzierte Paarung. In Koordinaten: $\nu_g(X^i \partial_i) = X_i dx^i$ für

$$X_i(x) = \sum_j g_{ij}(x) X^j(x) .$$

Ableiten der Gleichung $\langle \nu_g(Y), Z \rangle = \langle Y, Z \rangle_g$ nach dem Vektorfeld $X \in T(U)$ liefert uns $X \langle Y, Z \rangle_g = X \langle \nu_g(Y), Z \rangle = \langle \nabla_X \nu_g(Y), Z \rangle + \langle \nu_g(Y), \nabla_X Z \rangle = \langle \nabla_X \nu_g(Y), Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g$. Es folgt

Lemma 5. Bezeichne ∇ einen tangentiellen Zusammenhang und ∇^* den auf den Differentialformen induzierten dualen Zusammenhang. Der von einer Metrik g induzierte Isomorphismus $\nu_g : T(U) \rightarrow T^*(U)$ kommutiert genau dann mit ∇

$$\begin{array}{ccc} T(U) & \xrightarrow{\nu_g} & T^*(U) \\ \nabla_X \downarrow & & \downarrow \nabla_X^* \\ T(U) & \xrightarrow{\nu_g} & T^*(U) \end{array} ,$$

wenn für alle Vektorfelder X, Y und Z gilt

$$\boxed{X \langle Y, Z \rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g} .$$

In diesem Fall nennt man ∇ metrisch⁴ bezüglich g ist.

Metriken für allgemeines E : Obwohl wir das Konzept einer Metrik bisher nur im Fall $E = T$ eingeführt haben, lässt sich dieser Begriff für beliebiges E analog einführen. Eine Metrik h auf E definiert analog einen Isomorphismus $\nu_h : E(U) \cong E^*(U)$. Ein Zusammenhang ∇ auf E vertauscht mit ν_h wiederum genau dann, wenn er metrisch ist: $X \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_h = \langle \nabla_X \eta_1, \eta_2 \rangle_h + \langle \eta_1, \nabla_X \eta_2 \rangle_h$. Die Beweise bleiben gleich.

Metrische Retraktion: Sei h eine Metrik auf E und $i_F : F(U) \hookrightarrow E(U)$ eine $C^\infty(U)$ -lineare Inklusion. Es folgt $i_F \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(F, E)(U)$, und $i_F(x)$ ist definiert für $x \in U$. Die orthogonale Projektion auf das Bild $i_F(x)$ (bezüglich $h(x)$ im Punkt $x \in U$) zusammengesetzt mit der Umkehrabbildung $i_F(x)(F) \rightarrow F$ definiert eine lineare Retraktion $p_F(x) : E \rightarrow F$, welche glatt als Funktion von $x \in U$ ist d.h es gilt

$$p_F \circ i_F = id_F .$$

$p_I(\eta)(x)$ ist eine $C^\infty(U)$ -lineare Retraktion $p_F \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)(U)$.

Retrakte: Sei $p_F \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)(U)$ ein beliebiger Retrakt – d.h. es gelte $p_F \circ i_F = id_F$. Dann definiert ein Zusammenhang ∇ von E einen Zusammenhang $\nabla_F = p_F \circ \nabla \circ i_F$ von F . Ist (im metrischen) Fall die Einschränkung der Metrik $h(x)$ auf $i_F(x)(F)$ nichtausgeartet, liefert die Einschränkung von h eine induzierte Metrik auf F . Ist ∇ metrisch bezüglich h , dann ist ∇_F metrisch bezüglich der Einschränkung von h .

⁴Dies ist auch erklärt für Pseudometriken

1.11 Der Levi-Civita Zusammenhang

Das nachfolgende Lemma ist von fundamentaler Bedeutung. Es ordnet einer Metrik g auf U einen eindeutig bestimmten tangentiellen Zusammenhang ∇ zu. Diesen eindeutig durch g bestimmten Zusammenhang nennt man Levi-Civita Zusammenhang.

Lemma 6. *Es gibt einen eindeutig bestimmten torsionsfreien tangentiellen Zusammenhang ∇ , welcher metrisch ist bezüglich einer gegebenen Metrik g auf U .*

Beweis: Zum Nachweis der Existenz macht man folgenden Ansatz

(Kostant-Formel):

$$2 \cdot \langle \nabla_X Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle .$$

Die Kostantformel legt die Christoffelsymbole $\nabla_i(\partial_j) = \Gamma_{ij}^l \partial_l$ von ∇ eindeutig fest: Beachte $2\Gamma_{ij}^l g_{lk} = 2\langle \nabla_i(\partial_j), \partial_k \rangle$ ist dann gleich $\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}$ (denn die letzten drei Terme mit den Kommutatoren verschwinden wegen $[\partial_i, \partial_j] = 0$). Bezeichne g^{kl} die zu g inverse Matrix, d.h. $g^{kl} g_{lj} = \delta_j^k$, so erhalten wir

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{2} g^{kl}(x) [\partial_i g_{jl}(x) + \partial_j g_{il}(x) - \partial_l g_{ij}(x)]} .$$

Dies bestimmt natürlich ∇ . Offensichtlich sind andererseits die so definierten $\Gamma_{i,j}^k$ symmetrisch in den Indizes i, j , also ist durch diese Christoffelsymbole definierte Zusammenhang torsionsfrei. Symmetrisiert man die rechte Seite der Kostantformel in den Variablen Y und Z , so heben sich alle Terme weg bis auf den ersten Term auf der rechten Seite. Daraus folgt unmittelbar, dass das durch die Kostantformel definierte ∇ metrisch bezüglich g ist.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit zeigen wir, dass ein metrischer torsionsfreier Zusammenhang notwendiger Weise die Kostantformel erfüllt.

Nachweis der Kostant-Formel: Für metrische Zusammenhänge gilt

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle$$

Zieht man die dritte Zeile von der Summe der beiden ersten ab, erhält man rechts

$$\langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Y X + \nabla_X Y, Z \rangle .$$

Benutzt man Torsionsfreiheit, ist dies gleich

$$\langle [Y, Z], X \rangle - \langle [Z, X], Y \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle .$$

Daraus folgt sofort die Kostantformel.

Beispiel: Sei U die obere Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ versehen mit der Metrik $g(x, y) = y^{-2} \cdot 1$.

Beachte $R_{11} = R_{22} = 0$ für die Krümmung wegen $R_{ij} = -R_{ji}$. Der zugehörige Levi-Civita Zusammenhang ∇ hat folgende Christoffelsymbole resp. Krümmung

$$\Gamma_1 = y^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \Gamma_2 = -y^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad R_{12} = y^{-2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Also etwa $R_{121}^2 = y^{-2}$.

Für das Vektorfeld $Y = y\partial_y$ gilt die Gleichung $\nabla_Y Y = y\nabla_2(Y) = 0$ wegen $\nabla_2(Y) = \nabla_2(y\partial_y) = \partial_y + y \cdot \Gamma_2(\partial_y) = \partial_y - \partial_y = 0$. Dies zeigt uns später, dass Y parallel zu sich selbst ist, und dass die vertikalen Kurven für festes $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = (x_0, e^t)$$

wegen $\dot{\gamma} = e^t\partial_y = y\partial_y|_{\gamma(t)} = Y|_{\gamma(t)}$ Geodäten sind. Siehe §5.3 und §7.4.

1.12 Tensorprodukte

Für Zusammenhänge $\nabla_i = E_i(U) \rightarrow (T^* \otimes E_i)(U)$ definiert

$$\nabla_X = (\nabla_1)_X \otimes id_{E_2} + id_{E_1} \otimes (\nabla_2)_X$$

einen Zusammenhang $\nabla : E(U) \rightarrow (T^* \otimes E)(U)$ auf dem Tensorprodukt $E = E_1 \otimes E_2$. Die Christoffelsymbole $\Gamma_i^{E_1}$ und $\Gamma_i^{E_2}$ bestimmen Γ_i^E durch die Formel

$$\Gamma_i^E = \Gamma_i^{E_1} \otimes id_{E_2} + id_{E_1} \otimes \Gamma_i^{E_2} .$$

Anwendung auf Tensoren: Ein Tangential-Zusammenhang ∇ induziert einen dualen Zusammenhang auf den 1-Formen. Der Einfachheit halber nennen wir ihn auch ∇ . Zur Erinnerung

$$\nabla_j(\partial_i) = \Gamma_{ji}^k \partial_k \quad , \quad \nabla_j(dx^i) = -\Gamma_{jk}^i dx^k .$$

Mit obiger Konstruktion kann daher ein beliebiger Tangentialzusammenhang kanonisch zu einem Zusammenhang für beliebige Tensoren fortgesetzt werden. Für $r = 0$ wird dabei per Definition grundsätzlich $\nabla = d$ angenommen. Dies erklärt die induzierten kovarianten Ableitungen

$$\nabla : E(U) \rightarrow (T^* \otimes E)(U)$$

für beliebige Tensorprodukte

$$E = T_s^r = (T^*)^{\otimes r} \otimes T^{\otimes s}$$

(oder allgemeiner auch gemischte Tensoren in beliebiger anderer Reihenfolge). Für die gemischten Tensoren in $T_s^r(U)$ gilt also

$$\nabla : T_s^r(U) \rightarrow T_s^{r+1}(U) .$$

Tensorprodukte: Mittels einer geeigneten Umordnung $V : (T^*)^{\otimes r} \otimes T^{\otimes s} \otimes (T^*)^{\otimes u} \otimes T^{\otimes v} = (T^*)^{\otimes(r+u)} \otimes T^{\otimes(s+v)}$ kann man für Tensoren $T \in T_s^r(U)$ und $S \in T_v^u(U)$ ein Produkt $T * S = V(T \otimes S) \in T_{s+v}^{r+u}(U)$ erklären. Dann gilt

$$\nabla_X(S * T) = \nabla_X(S) * T + S * \nabla_X(T) .$$

1.13 Die Hessematrix

Wir schreiben $T^r(U) = T_0^r(U)$. Für eine Funktion $f \in C^\infty(U) = T^0(U)$ ist die Hessematrix als Tensor in $T^2(U)$ erklärt durch doppelte kovariante Ableitung

$$\nabla^2 f = \nabla \nabla(f) \in T^2(U).$$

Also $\nabla^2(f) = \nabla(df) = dx^j \otimes dx^i \cdot [\partial_j \partial_i(f) - \Gamma_{ji}^k(x) \partial_k(f)]$. Wählt man für $f(x)$ die Koordinatenfunktionen $f(x) = x^\nu$, so folgt

Lemma 7. Die Hessematrix $\nabla^2(f)$ ist für alle Funktionen $f \in C^\infty(U)$ ein symmetrischer Tensor in $T^2(U)$ genau dann, wenn ∇ torsionsfrei ist.

Alternierende Tensoren: Wir erwähnen zum Abschluss eine Verallgemeinerung der letzten Aussage auf alternierende Differentialformen. Eine alternierende Differentialform vom Grad i kann als Tensor im Raum $T^i(U)$ aufgefasst werden, der alternierend ist in allen i Variablen. Sei $\Omega^i(U) \cong \Lambda^i T^1(U) \subseteq T^i(U)$ der Raum der alternierenden i -Formen. Ein solcher alternierender Tensor schreibt⁵ sich in der Form $\eta = f_I dx^I$, wobei $dx^I = |I|! \cdot \text{Alt}_{1..i}(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r})$ ist für $i_1 < \dots < i_r$ und $I = \{i_1, \dots, i_r\}$.

Behauptung: Ist ∇ torsionsfrei, dann kommutiert ∇

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^i T^1(U) & \xrightarrow{d} & \Lambda^{i+1} T^1(U) \\ \uparrow i! \cdot \text{Alt}_{1..i} & & \uparrow (i+1)! \cdot \text{Alt}_{1..,i+1} \\ T^i(U) & \xrightarrow{\nabla} & T^{i+1}(U) \end{array}$$

mit der Cartanableitung $d(\sum_I f_I \cdot dx^I) = \sum_I \partial_i(f_I) \cdot dx^i \wedge dx^I$.

Zur Bezeichnung: $j! dx^J \wedge i! dx^I := (i+j)! \text{Alt}_{1..,i+j}(dx^J \otimes dx^I)$ für $i = |I|$ und $j = |J|$. Also ist $dx^{\{i,j\}}$ im Fall $i < j$ gleich

$$dx_i \wedge dx_j = dx_i \otimes dx_j - dx_j \otimes dx_i.$$

Beweis: Übungsaufgabe. Man reduziert dies leicht auf den Fall $i = 1$ und damit auf Lemma 7.

⁵Zur Bedeutung der Faktoren $|I|!$ siehe auch Paragraph 3.6

1.14 Krümmung und kovariante Ableitung

Sei ∇ ein torsionsfreier Zusammenhang auf T und ∇_E ein beliebiger Zusammenhang auf E , und sei $\nabla_{T^* \otimes E}$ das Tensorprodukt. Sei

$$R(E) = 2 \cdot \text{Alt}_{12}[(\nabla \otimes id_E + id_{T^*} \otimes \nabla_E)\nabla_E]$$

oder

$$\begin{array}{ccccc} E(U) & \xrightarrow{\nabla_E} & T^* \otimes E(U) & \xrightarrow{\nabla_{T^* \otimes E}} & T^* \otimes T^* \otimes E(U) \quad . \\ & & & & \downarrow 2 \cdot \text{Alt}_{12} \\ & & & & \Lambda^2(T^*) \otimes E(U) \end{array}$$

$R(E)$ (arrow from $E(U)$ to $\Lambda^2(T^*) \otimes E(U)$)

Lemma 8. Bezeichne $R_{ij}(E) = R(\partial_i, \partial_j)$ die Krümmung des Zusammenhangs E , dann gilt

$$\boxed{R(E) = \sum_{i,j} dx^i \otimes dx^j R_{ij}(E) = \sum_{i < j} dx^{\{i,j\}} R_{ij}(E)} .$$

Beweis: Der Term $\text{Alt}_{12}[(\nabla \otimes id_E)\nabla_E(\eta)]$ verschwindet, wenn ∇ torsionsfrei ist

$$R(E) = 2 \cdot \text{Alt}_{12}[(id_{T^*} \otimes \nabla_E)\nabla_E] .$$

Also $R(E)\eta = 2\text{Alt}_{12}[dx^i \otimes dx^j (\partial_i + {}^E\Gamma_i)(\partial_j + {}^E\Gamma_j)(\eta)]$. Ein Vergleich mit §1.7 zeigt, dass dies mit der Krümmung $R_{ij}(E) = 2\text{Alt}_{12}(\partial_i({}^E\Gamma_j) + {}^E\Gamma_i \circ {}^E\Gamma_j) = \partial_i({}^E\Gamma_j) - \partial_j({}^E\Gamma_i) + {}^E\Gamma_i \circ {}^E\Gamma_j - {}^E\Gamma_j \circ {}^E\Gamma_i$ des Zusammenhangs ∇_E übereinstimmt.

Korollar 2. Für Vektorfelder X, Y hat die Krümmung die Derivationseigenschaft

$$\boxed{R(E_1 \otimes E_2)(X, Y) = R(E_1)(X, Y) \otimes id_{E_2} + id_{E_1} \otimes R(E_2)(X, Y)} .$$

Beweis: Wegen $\nabla_X = \nabla'_X \otimes id + id \otimes \nabla''_X$ gilt $\nabla_Y \nabla_X = \nabla_Y(\nabla'_X \otimes id + id \otimes \nabla''_X) = \nabla'_Y \nabla'_X \otimes id + \nabla'_X \otimes \nabla''_Y + \nabla'_Y \otimes \nabla''_X + id \otimes \nabla''_Y \nabla''_X$. Alterniert man jetzt in X und Y , folgt die Behauptung im Fall $[X, Y] = 0$. Da dies den Fall $X = \partial_i, Y = \partial_j$ umfasst, folgt die Behauptung.

1.15 Pullback von Tensoren

Für eine glatte Abbildung $f : V \rightarrow U$ zwischen offenen Mengen $V \subseteq \mathbb{R}^M$ und $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ist der Pullback⁶ von vektorwertigen Funktionen

$$f^* : E(U) \rightarrow f^*(E)(V)$$

für E -wertige Funktionen $\eta : U \rightarrow E$ erklärt durch

$$\eta(y) \mapsto \eta(f(x)) .$$

Pullback von Formen: Im Fall, dass E der Kotangententialraum ist, gibt es zusätzlich eine natürliche Abbildung

$$J^* : f^*(T^*)(V) \rightarrow T^*(V)$$

welche durch die Jacobimatrix der Abbildung f induziert wird. Ist dy_1, \dots, dy_N die kanonische Basis von $f^*(T^*)$ und dx_1, \dots, dx_M die kanonische Basis von T^* , dann ist die genannte Abbildung gegeben durch $dy_i \mapsto \sum_{j=1}^M \frac{dy^i(x)}{dx^j} \cdot dx^j$. Die zugehörige Matrix ist die transponierte Matrix J^* von der Jacobimatrix $J = (J_j^i) = (\partial_j f^i)$

$$J = \begin{pmatrix} \partial_1 f^1 & \cdots & \partial_M f^1 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \partial_1 f^N & \cdots & \partial_M f^N \end{pmatrix}$$

Dies erlaubt es uns einen Pullback von Differentialformen durch Komposition der obigen Abbildungen

$$T^*(U) \rightarrow f^*(T^*)(V) \rightarrow T^*(V)$$

zu definieren. Das heisst

$$\sum_{i=1}^N \omega_i(y) dy^i \mapsto \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{df^i(x)}{dx^j} \cdot \omega_i(f(x)) \cdot dx^j .$$

⁶Später im globalen Fall ist $f^*(E)$ verschieden von E . Hier im Moment besteht kein Unterschied und wir könnten E schreiben an Stelle von $f^*(E)$.

Dieser Pullback ist verschieden vom oben erklärten Pullback vektorwertiger Funktionen, wird aber mit dem selben Symbol f^* bezeichnet. Häufig ist aus dem Kontext klar, welche Art von Pullback gerade gemeint ist.

Pullback von Tensoren: Der Pullback für Tensoren vom Typ $T^r = (T^*)^{\otimes r}$ verallgemeinert den Fall T^1 der Differentialformen und ist erklärt durch Komposition

$$T^r(U) \rightarrow f^*(T^r)(V) = f^*(T^*)^{\otimes r}(V) \rightarrow (T^*)^{\otimes r}(V) = T^r(V).$$

Die zweite Abbildung ist dabei das Tensorprodukt $\otimes^r(J^*)$. Man erhält durch die zusammengesetzte Abbildung einen Pullback von Tensoren

$$\boxed{f^* : T^r(U) \rightarrow T^r(V)},$$

welcher im Spezialfall $r = 1$ den Pullback von Differentialformen umfasst.

Bemerkung 1: Der Pullback von Tensoren erfüllt $f^*(T_1 + T_2) = f^*(T_1) + f^*(T_2)$, sowie $f^*(T_1 * T_2) = f^*(T_1) * f^*(T_2)$, ist also ein \mathbb{R} -Algebrenhomomorphismus.

Bemerkung 2: Aus der Kettenregel⁷ folgt auch die Kontravarianz $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ für den Pullback.

Bemerkung 3: Man definiert auf offensichtliche Weise einen Pullback für E -wertige Tensoren $f^* : T^i \otimes E(U) \rightarrow T^i \otimes f^*(E)(V)$.

Pullback von Metriken: Wir bemerken, dass eine Metrik g auf U durch einen Tensor $g \in T^2(U)$ beschrieben werden kann. Ist $f : V \rightarrow U$ eine glatte Abbildung, dann liefert Pullback den Tensor $f^*(g) \in T^2(V)$. Die zugehörige Matrix ist $J^*(x) \cdot g(f(x)) \cdot J(x)$, somit wieder symmetrisch. Es ist allgemein aber nicht richtig, dass der Pullback wieder eine Metrik auf V definiert. Das Problem ist, dass die Form $f^*(g)$ ausgeartet sein kann. Ist aber g definit, und ist f eine Immersion (d.h. die Jacobimatrix sei injektiv in jedem Punkt) dann ist auch der Pullback wieder definit, und definiert daher eine Riemannsche Metrik, denn die Einschränkung einer definiten symmetrischen Bilinearform auf einen Teilraum ist wieder definit und damit nicht ausgeartet.

⁷ $f^*(g^*(dw^i)) = f^*(J(g)_j^i dv^j) = J(f)_k^j J(g)_j^i du^k = (J(g)J(f))_k^i dx^k = J(g \circ f)_k^i dx^k = (g \circ f)^*(dw^i)$.

1.16 Pullback von Zusammenhängen

Für einen Zusammenhang (E, ∇) auf U ist der Pullback $f^*(\nabla)$ erklärt als Zusammenhang $(f^*(E), f^*(\nabla))$ auf V . Der Zusammenhang $f^*(\nabla)$ ist hierbei definiert durch seine Christoffelsymbole (noch gilt $f^*(E) = E$)

$$f^{*(E)}\Gamma_j(x) = \sum_i \frac{dy^i}{dx^j} \cdot {}^E\Gamma_i(f(x)).$$

Ist ∇ metrisch bzgl h , dann ist $f^*(\nabla)$ metrisch bzgl $f^*(h)$.

Die Krümmung $R(f^*(\nabla), f^*(E))$ von $f^*(\nabla)$ ist der Pullback $f^*(R(\nabla, E))$ (Pullback eines 2-Tensors mit Werten in $End(E)$), d.h.

$$f^*(\nabla)_X f^*(\nabla)_Y - f^*(\nabla)_Y f^*(\nabla)_X - f^*(\nabla)_{[X, Y]} = f^*(R(E))(X, Y)$$

Beweis Übungsaufgabe: ObdA $X = \partial_i$ und $Y = \partial_j$, da die linke Seite C^∞ -bilinear in X, Y ist. Benutze dann $\partial_i(J_j^k) = \partial_j(J_i^k)$.

Lemma 9. *Das folgende Diagramm ist kommutativ*⁸

$$\begin{array}{ccc} E(U) & \xrightarrow{\nabla} & (T_U^* \otimes E)(U) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \otimes f^* \\ f^*(E)(V) & \xrightarrow{f^*(\nabla)} & (T_V^* \otimes f^*(E))(V) \end{array}$$

Bemerkung: Der Pullback auf der linken Seite des Diagramms ist der von E -wertigen Funktionen. Auf der rechten Seite ist es der Pullback von E -wertigen Tensoren. Das heisst in der ersten Tensorvariable der Pullback als Form, in der zweiten der Pullback als Funktion.

Beweis: $f^*(\nabla)f^*(\eta(y)e) = dx^j \otimes (\partial_j + f^{*(E)}\Gamma_j)\eta(f(x))e = dx^j \otimes (\partial_j + \frac{df^i}{dx^j} \cdot {}^E\Gamma_i(f(x))\eta(f(x))e = \frac{df^i}{dx^j} dx^j \otimes (\partial_i + {}^E\Gamma_i(y))\eta(y)|_{y=f(x)}$ wegen der Kettenregel! Letzteres ist $f^*(\nabla(\eta e))$ im obigen Sinn.

Warnung: Für eine Metrik g auf U sei ∇ der Levi-Civita Zusammenhang. Dann ist der Levi-Civita Zusammenhang der Metrik $f^*(g)$ auf V im allgemeinen nicht $f^*(\nabla)$! Siehe Abschnitt § 7.5 und § 7.6 für weitere Details.

⁸Dies gilt i.a. nicht für den Pullback von Formen, deshalb gibt es keine solche Formel für $\nabla \circ \nabla$.

1.17 Pushforward

Es gibt im allgemeinen keine kovariante Funktorialität in der Differentialgeometrie, obwohl die Jacobimatrix eine kovariante Abbildung zwischen den Tangentialräumen definiert! Für eine glatte Abbildung

$$f : V \rightarrow U$$

ist beispielsweise nicht erklärt, was $f_*(X) \in T(U)$ ist für Vektorfelder X auf V .

Man hat nur eine kanonische Pushforward Abbildung

$$\boxed{f_* : T_V(V) \rightarrow f^*T_U(V)}$$

erklärt durch $\sum_j X^j(x)\partial_j \mapsto \sum_j X^j(x)f_*(\partial_j)$ und

$$f_*(\partial_j) := \sum_{i=1}^M (\partial_j f^i)(x) \cdot \partial_i.$$

Beachte $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j} \in T(V)$ und $\partial_i = \frac{\partial}{\partial y^i} \in f^*(T)(V)$.

1) Für $f_*(X) = f_*(X^\nu \partial_\nu) = X^\nu J_\nu^\alpha \partial_\alpha$ und $f_*(Y) = f_*(Y^\nu \partial_\nu) = Y^\nu J_\nu^\alpha \partial_\alpha$ gilt $f_*(X)f_*(Y) - f_*(Y)f_*(X) = Z^i \partial_i$ mit $Z^i = (X^\nu J_\nu^\alpha) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} (Y^\mu J_\mu^i) - (Y^\nu J_\nu^\alpha) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} (X^\mu J_\mu^i)$. Wegen $J_\nu^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$ ist $Z^i = X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (Y^\mu J_\mu^i) - Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (X^\mu J_\mu^i) = (X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} Y^\mu - Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} X^\mu) J_\mu^i$, denn $X^\nu Y^\mu \partial_\nu (J_\mu^i) - Y^\nu X^\mu \partial_\nu (J_\mu^i)$ verschwindet, da $\partial_\nu (J_\mu^i) = \partial_\nu \partial_\mu f^i$ symmetrisch in ν und μ ist.

Also

$$\boxed{f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]}.$$

2) Wir zeigen weiterhin für $(f^*(\nabla), f^*(T_V))$ eines torsionsfreien ∇ auf T_U

$$\boxed{f^*(\nabla)_X f_*Y - f^*(\nabla)_Y f_*X = f_*[X, Y]}.$$

Beweis: $f_*Y = Y^\nu J_\nu^\alpha \partial_\alpha$ und $(f^*\nabla)_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} + J_\nu^\beta \Gamma_\beta^\gamma (f(x))$. Also $f^*(\nabla)_X f_*Y = X^\nu (\frac{\partial}{\partial x^\nu} + J_\nu^\alpha \Gamma_\alpha^\beta) (Y^\mu J_\mu^\beta \partial_\beta)$, und dies ist $X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (Y^\mu J_\mu^\beta) \partial_\beta + X^\nu Y^\mu J_\nu^\alpha J_\mu^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma$. Da $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ symmetrisch in $\alpha\beta$ ist, folgt durch Alternierung $f^*(\nabla)_X f_*Y - f^*(\nabla)_Y f_*X = Z^i \partial_i$ für $Z^i = X^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (Y^\mu J_\mu^i) - Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (X^\mu J_\mu^i)$ wie oben. Daraus folgt die Behauptung.

1.18 Diffeomorphismen

Diffeomorphismen: Ist $f : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus, also bijektiv glatt mit glatter Umkehrfunktion, dann gilt $f^*(T)(V) = T(U)$, und die Abbildung f_* induziert einen Isomorphismus

$$f_* : T(V) \cong T(U) .$$

Die Umkehrabbildung

$$f^* \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^N \end{pmatrix} = J(f, x)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X^1 \\ \vdots \\ X^N \end{pmatrix} (f(x)) \quad , \quad X(y) = X^i(y) \partial_i$$

bezeichnet man als Pullback

$$f^* : T(U) \cong T(V) .$$

Warnung: Dieser Pullback für Vektorfelder ist nur für Diffeomorphismen f erklärt.

Sei $f : U \rightarrow U'$ ein Diffeomorphismus. $f_* : T(U) \cong T(U')$ definiert $f^* := (f_*)^{-1}$. $f^* : C^\infty(U') \cong C^\infty(U)$ definiert $f_* := (f^*)^{-1}$ mit $f_*(X(h)) = f_*X(f_*h)$ (Kettenregel!).

Jeder tangentielle Zusammenhang ∇' auf U' definiert vermöge

$$\nabla_X Y := (f_*)^{-1}(\nabla'_{f_*X} f_*Y) \iff f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*X} f_*Y$$

einen tangentiellen Zusammenhang ∇ auf U .

In Koordinaten: Für die Christoffelsymbole Γ_i resp Γ'_i ergibt diese Definition

$$J \cdot \Gamma_i \cdot J^{-1} = J_i^\beta [\Gamma'_\beta + (\partial_\beta J) J^{-1}]$$

oder $f^*(dy^\beta \otimes (\Gamma'_\beta + (\partial_\beta J) J^{-1})) = dx^i \otimes J \Gamma_i J^{-1}$ bezüglich der Jacobimatrix $J = J(f)$. Explizit geschrieben also

$$J_\alpha^k(x) \cdot \Gamma_{ij}^\alpha(x) = J_i^\beta(x) \cdot (\Gamma')_{\beta\gamma}^k(f(x)) \cdot J_j^\gamma(x) + J_i^\beta(x) \cdot (\partial_\beta J_j^k)(x) .$$

Torsion: Ist ∇' torsionsfrei, dann auch ∇ .

Beweis: Denn wendet man f_* auf beide Seiten von $\nabla_X Y - \nabla_Y X \stackrel{?}{=} [X, Y]$ an, ergibt sich $\nabla'_{f_*X} f_*Y - \nabla'_{f_*Y} f_*X = [f_*X, f_*Y]$ wegen $f_*(\nabla_X Y) = \nabla'_{f_*X} f_*Y$ und wegen $f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y]$ (siehe §1.17).

Isometrien: Sei f eine Isometrie $f_*g(X, Y) = g'(f_*X, f_*Y)$ für Metriken g und g' auf U resp. U' . Ist ∇' metrisch für g' , dann ist ∇ metrisch für g .

Beweis: Denn f_* angewandt auf beide Seiten von $Xg(Y, Z) \stackrel{?}{=} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ gibt die äquivalente Aussage $f_*Xg'(f_*Y, f_*Z) \stackrel{!}{=} g'(\nabla'_{f_*X} f_*Y, f_*Z) + g'(f_*Y, \nabla'_{f_*X} f_*Z)$.

Aus der Eindeutigkeit des Levi-Civita Zusammenhangs folgt

Lemma 10. Sei $f : U \rightarrow U'$ ein bezüglich der Metriken g resp. g' isometrischer Diffeomorphismus, und ∇' der Levi-Civita Zusammenhang von g' . Dann ist ∇ der Levi-Civita Zusammenhang von $g = f^*(g')$, und für ∇ und ∇' kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 T(U) & \xrightarrow{\nabla} & (T^* \otimes T)(U) \\
 \downarrow f_* & & \downarrow f_* \otimes f_* \\
 T(U') & \xrightarrow{\nabla'} & (T^* \otimes T)(U')
 \end{array}$$

1.19 Mannigfaltigkeiten

1) Eine N -dimensionale Mannigfaltigkeit M ist ein parakompakter separierter topologischer Raum (zusammenhängend falls nicht anders formuliert) mit einem Atlas, d.h. einer Überdeckung $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ durch offene Teilmenge M_i versehen mit Homöomorphismen

$$\psi_i : M_i \cong U_i \subseteq \mathbb{R}^N$$

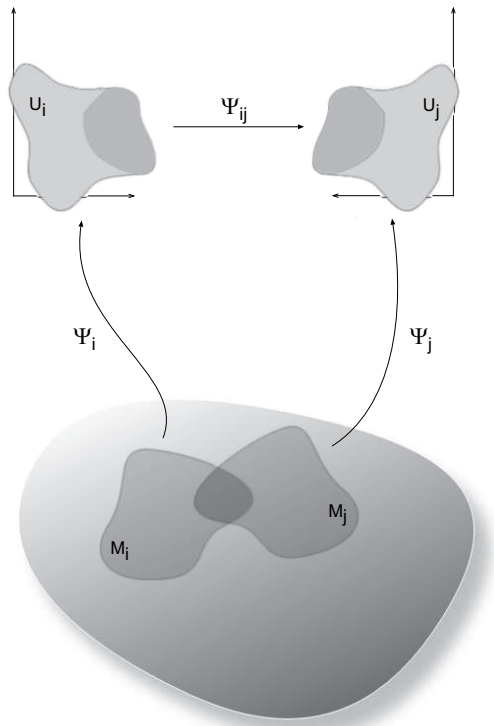
auf offene Teilmengen U_i im Euklidischen Raum \mathbb{R}^N , so dass die Kartenwechsel $\psi_{ij} : U_{ij} = \psi_i(M_i \cap M_j) \rightarrow \psi_j(M_i \cap M_j) = U_{ji}$ glatt sind

$$\psi_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1} : U_{ij} \cong U_{ji} .$$

Per Definition gilt $\psi_{ik} = \psi_{jk} \circ \psi_{ij}$ auf $U_{ij} \cap U_{ik}$ und somit

$$\psi_{ik}^* = \psi_{ij}^* \circ \psi_{jk}^* .$$

Die Mannigfaltigkeit heisst orientiert, wenn $\det(J(\psi_{ij})(x)) > 0$ gilt für alle i, j und alle $x \in U_{ij}$.



Beispiel: Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^N$ ist eine N -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit (bezüglich der Standardkartenabbildung $\psi = id$).

Beispiel: Reelle projektive Räume $\mathbb{R}P^n = S^n/\pm$ sind nicht orientiert, aber die Sphären S^n sind orientiert.

Beispiel: $M = S^3/\mu_n$. Beachte $S^3 = \{x \in \mathbf{H}^* \mid x\bar{x} = 1\}$ (Hamilton Quaternionen). Wegen $\mathbf{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C} \cdot j$ operieren die n -ten Einheitswurzeln μ_n durch Multiplikation auf M von Links oder Rechts.

2) Eine Funktion f auf M heisst glatt, wenn alle $f \circ \psi_i^{-1}$ glatt sind. Sei $C^\infty(M)$ der Ring der glatten Funktionen auf M . Also gilt

$$C^\infty(M) = \{f_i \in C^\infty(U_i), i \in I \mid \psi_{ij}^*(f_j) = f_i \forall i, j\}$$

vermöge $f \mapsto (f_i)_{i \in I}$ mit $f_i = f \circ \psi_i^{-1}$.

3) Ist M eine Mannigfaltigkeit, dann ist jede offene Teilmenge wieder eine Mannigfaltigkeit durch Einschränkung des Atlas von M auf U . Die Einschränkung glatter Funktion auf U ist wieder glatt, d.h. die Restriktionen $res : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(U)$ definieren eine Ringgarbe.

4) Eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten heisst glatt, wenn gilt $f^*(C^\infty(U)) \subseteq C^\infty(V)$ für $V = f^{-1}(U)$ und alle offenen Teilmengen $U \subseteq N$. Zusammensetzungen glatter Abbildungen sind wieder glatt.

Zwei Mannigfaltigkeiten M und N heissen isomorph, wenn es eine glatte Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow M$ gibt, deren Zusammensetzung $f \circ g$ resp. $g \circ f$ die Identität ist. Solche Abbildungen heissen Diffeomorphismen. Beispiel: $\psi_i : M_i \rightarrow U_i$ ist ein Diffeomorphismus.

5) Ein Tensor $T \in T_s^r(M)$ ist per Definition eine Kollektion von Tensoren $T_i \in T_s^r(U_i)$ auf den offenen Mengen $U_i \subseteq \mathbb{R}^N, i \in I$ mit der Eigenschaft

$$\psi_{ij}^*(T_j) = T_i$$

für alle $i, j \in I$. Dies ist wohldefiniert, da die ψ_{ij} Diffeomorphismen sind. Summe von Tensoren oder Produkte von Tensoren werden dann auf naheliegende Weise erklärt unter Benutzung von §1.15, Bemerkung 1.

Ist $M = U$ eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^N , dann bleibt zu zeigen, dass die obige Definition den ursprünglich definierten Raum $T_s^r(U)$ liefert. Man reduziert den Nachweis leicht auf den Fall $M_i = U_i$ und $\psi_{ij} = id_{U_i}$. In diesem Fall ist dies aber unmittelbar klar.

6) Für glatte Abbildungen $f : M \rightarrow N$ ist der Pullback von Tensoren erklärt

$$f^* : T^r(N) \rightarrow T^r(M)$$

und respektiert Summen und Produkte von Tensoren.

Begründung: Man reduziert auf den Fall, dass für alle i ein j existiert mit $f(M_i) \subseteq N_j$ für die zugrundeliegenden Überdeckungen $M = \bigcup_i M_i$ und $N = \bigcup_j N_j$. Mit Hilfe der Kartenabbildungen $\varphi_i : M_i \cong V_i$ und $\psi_j : N_j \cong U_j$ setzt man $f^*(T) = (S_i)_{i \in I}$ mit $S_i = (\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})^*(T_j) \in T^r(M_i)$, und zeigt dass dies wohldefiniert ist!

7) Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit mit einem Tensor $g \in T^2(M)$, so dass g in allen Karten eine definite symmetrische Bilinearform definiert. Auf einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit verheften sich die Formen

$$\sqrt{\det(g)(x)} dx$$

(definiert auf den einzelnen Karten) zu einer globalen Volumenform

$$d\mu_g \in \Lambda^N(T^*)(M).$$

Wegen Lemma 10 ist auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit der Levi-Civita Zusammenhang global definiert als Zusammenhang auf dem Tangentialbündel $T(M)$.

1.20 Vektorbündel

Ein Vektorbündel vom Rang n auf einer Mannigfaltigkeit M wird gegeben durch: Eine trivialisierende Überdeckung $M = \bigcup_{i \in I} V_i$ durch offene Mengen $V_i \subseteq M$ und glatte matrixwertige Übergangsfunktionen $\phi_{ij}(x) \in Gl(n, \mathbb{R})$ auf $V_i \cap V_j$, welche die Kozykelrelation

$$\phi_{ik}(x) = \phi_{ij}(x) \circ \phi_{jk}(x) \quad , \quad \forall i, h, k \in I \forall x \in V_i \cap V_j \cap V_k$$

erfüllen.

1.Beispiel: Das konstante Bündel für $\phi_{ij}(x) = id$.

Definition: Der Raum der globalen Schnitte $E(M)$ eines Vektorbündels E ist

$$E(M) = \left\{ \eta_i \in C^\infty(V_i, \mathbb{R}^n), i \in I \mid \phi_{ij}(x)\eta_j(x) = \eta_i(x), \forall i, j \in I, \forall x \in V_i \cap V_j \right\}.$$

Wegen $f \cdot \eta \in E(M)$ für $f \in C^\infty(M)$ und $\eta \in E(M)$ mit $f\eta := (f|_{V_i} \cdot \eta_i)_{i \in I}$ ist $E(M)$ ein $C^\infty(M)$ -Modul. Ein Homomorphismus zwischen Vektorbündeln E nach F auf M ist eine $C^\infty(M)$ -lineare Abbildung $\varphi : E(M) \rightarrow F(M)$. Ist φ bijektiv, nennt man E und F isomorph.

Variante in Karten: Gilt $V_i = M_i \cong U_i \subseteq \mathbb{R}^N$ und $V_j = M_j \cong U_j \subseteq \mathbb{R}^N$, können wir mittels der Kartenabbildung V_i mit $U_i = \psi_i(V_i)$ identifizieren. Auf diese Weise kann man obige Bedingungen in den Karten formulieren, nämlich jetzt

$$\phi_{ik}(x) = \phi_{ij}(x) \circ \phi_{jk}(\psi_{ij}(x)) \quad , \quad \forall i, h, k \in I \forall x \in U_i \cap \psi_{ij}^{-1}(U_j) \cap \psi_{ik}^{-1}(U_k)$$

Die Verheftungsbedingungen, welche $E(M)$ definieren lauten nun in Karten

$$\phi_{ij}(x)\psi_{ij}^*(\eta_j)(x) = \eta_i(x)$$

für den naiven Pullback $\psi_{ij}^*(\eta_j)(x) = \eta_j(\psi_{ij}(x))$ von E -wertigen Funktionen.

Beispiel: Das Tangentialbündel TM mit $\phi_{ij}(x) = J(\psi_{ij})^{-1}(\psi_i(x))$.

Beispiel: Das Kotangentialbündel T^*M mit $\phi_{ij}(x) = J(\psi_{ij})^*(\psi_i(x))$.

Restriktionen: Für offenes $U \subseteq M$ definieren die Einschränkungen der ϕ_{ij} auf $(U \cap V_i) \cap (U \cap V_j)$ ein Vektorbündel auf U . Bezeichnung: $E|_U$ oder wieder E . Dies ist ein Spezialfall des

Pullback von Vektorbündeln: Sei $f : N \rightarrow M$ glatt und E ein Vektorbündel auf M . Die offenen Mengen $f^{-1}(V_i)$ überdecken N . Die Übergangsfunktionen

$$f^*(\phi_{ij}) = \phi_{ij}(f(x)) \in Gl(n, \mathbb{R})$$

auf $f^{-1}(V_i) \cap f^{-1}(V_j)$ definieren daher ein Vektorbündel vom Rang n auf N , welches mit $f^*(E)$ bezeichnet wird.

Duales Bündel: Ersetzt man ϕ_{ij} durch $(\phi_{ij}^{-1})^*$, erhält man das duale Bündel E^* von E .

Für Vektorbündel E, F ist (bis auf Isomorphie eindeutig) ein Tensorprodukt $E \otimes_{\mathbb{R}} F$ und die direkte Summe $E \oplus F$ erklärt. Hinweis: Ersetze E und F durch isomorphe Bündel, welche die gleiche trivialisierende Überdeckung besitzen!

2.Beispiel: Sei $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ die universelle Überlagerung. Sei $V = \mathbb{R}^N$ ein Vektorraum mit Metrik g_{st} und θ_0 eine orthogonale Matrix.

Dann definieren die glatten Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow V$ mit

$$f(t+1) = \theta_0 \cdot f(t)$$

ein Vektorbündel E auf S^1 (Verheftung an den Enden erfolgt mit θ_0). g_{st} definiert eine Metrik auf E . Ausserdem definiert $\nabla_{d/dt} = d/dt$ einen metrischen Zusammenhang auf E . Für $\theta_0 = id$ erhält man das triviale Bündel.

Übungsaufgabe: Jedes Vektorbündel (E, h) mit metrischem Zusammenhang auf S^1 entsteht auf diese Weise. Dazu betrachtet man den Pullback $\pi^*(E, h, \nabla)$ auf \mathbb{R} und benutzt, dass dieses Bündel trivial ist (Lemma 11).

1.21 Zusammenhänge auf Vektorbündeln

Um Zusammenhänge für globale Vektorbündel zu definieren, müssen die Verheftungsbedingungen beim Kartenwechsel erklärt werden. Dazu genügt es einen Diffeomorphismus $f : U \rightarrow U'$ zwischen offenen Teilen U, U' des \mathbb{R}^N zu betrachten. ObdA $E(U) = C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ und analog $E(U') = C^\infty(U', \mathbb{R}^n)$. Wann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} s \in E(U) & \xrightarrow{\nabla} & (T^* \otimes E)(U) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow f_* \otimes \Phi \\ s' \in E(U') & \xrightarrow{\nabla'} & (T^* \otimes E)(U') \end{array}$$

(Verallgemeinerung des Diagramms von Lemma 10) oder dual dazu

$$\begin{array}{ccc} s \in E(U) & \xrightarrow{\nabla} & (T^* \otimes E)(U) \\ \Phi^* \uparrow & & \uparrow f^* \otimes \Phi^* \\ s' \in E(U') & \xrightarrow{\nabla'} & (T^* \otimes E)(U') \end{array}$$

Die Verheftung $\Phi^* : s' \mapsto s$ im letzten Diagramm ist durch Matrixmultiplikation der \mathbb{R}^n -wertigen Funktion $s'(f(x))$ mit einer invertierbaren $n \times n$ -Matrix $\phi(x)$ gegeben, die glatt von $x \in U$ abhängt

$$s(x) = \phi(x) \cdot s'(f(x)) .$$

Im Fall des Tangentialbündels $E = TM$ ist $\phi(x)$ durch die inverse Jacobimatrix gegeben.

Für die Standardbasis $e_i \in \mathbb{R}^n$ muss folgendes Diagramm kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \phi \cdot e_i & \xrightarrow{\nabla} & dx^\alpha \otimes \left((\partial_\alpha \phi) \cdot e_i + \Gamma_\alpha \circ \phi \cdot e_i \right) \\ \uparrow & & \uparrow \text{---} \\ e_i & \xrightarrow{\nabla'} & dy^\beta \otimes \Gamma'_\beta(e^i) \end{array}$$

Die rechte gepunktete vertikale Abbildung ist definiert durch den Pullback als Tensor in der linken T^* -Tensorvariable und als naiver Pullback in der rechten E -Variable

$$(f^* \otimes \Phi^*)(dy^\beta \otimes \Gamma'_\beta(e^i)(y)) = \frac{dy^\beta}{dx^\alpha} dx^\alpha \otimes \phi(x) \circ \Gamma'_\beta(f(x))(e_i) .$$

Wegen $f^*(dy^\beta) = \frac{dy^\beta}{dx^\alpha} dx^\alpha$ bedeutet die Kommutativität des Diagramms für die Christoffelsymbole Γ von ∇ und Γ' von ∇' die Verheftungsbedingung

$$(\partial_\alpha \phi)(x) + \Gamma_\alpha \circ \phi(x) = \frac{dy^\beta}{dx^\alpha}(x) \cdot \phi(x) \circ \Gamma'_\beta(f(x))$$

oder $(\phi^{-1} \circ \partial_\alpha \phi)(x) + \Gamma_\alpha(x) = \frac{dx^\beta}{dy^\alpha}(y) \cdot \Gamma'_\beta(f(x))$. In Worten: Der naive Pullback von ∇' (siehe §1.16) muss sich von ∇ um die $End(E)$ -wertige 1-Form $\omega = dx^\alpha \otimes (\partial_\alpha \phi \circ \phi^{-1})(x)$ unterscheiden

$$\boxed{\nabla_\alpha + (\partial_\alpha \phi \circ \phi^{-1})(x) = \phi(x) \circ f^*(\nabla')_\alpha \circ \phi^{-1}(x)}.$$

In §1.18 wurde im Fall des Levi-Civita Zusammenhangs dieses Transformationsverhalten für $\phi(x) = J(f, x)^{-1}$ verifiziert. Beachte $(\partial J^{-1})J = -J^{-1}\partial J$.

Bemerkung: Wäre der Störterm $(\partial_\alpha \phi \circ \phi^{-1})(x)$ nicht vorhanden, würde sich das Christoffelsymbol wie ein Schnitt des Bündels $T^* \otimes End(E)$ transformieren!

Pullback von Zusammenhängen: Ist $f : N \rightarrow M$ eine glatte Abbildung, E ein Vektorbündel auf M und ∇ ein Zusammenhang auf E . Bei Kartenwechsel auf M erfüllen die Christoffelsymbole obige Relation $\Gamma + (\partial\phi)\phi^{-1} = \phi^M \psi_{ij}^* (\Gamma') \phi^{-1}$. Wendet man darauf den Pullback f^* folgt unter Berücksichtigung von

- $f^*((\partial\phi)\phi) = f^*(\partial\phi)f^*(\phi^{-1}) = (\partial f^*(\phi))f^*(\phi)^{-1}$ wegen Lemma 9
- $f^*(\phi^M \psi_{ij}^* (\Gamma') \phi^{-1}) = f^*(\phi)^N \psi_{ij}^* f^*(\Gamma') f^*(\phi)^{-1}$ wegen $f^{*M} \psi_{ij}^* = {}^N \psi_{ij}^* f^*$

die entsprechende Relation $f^*(\Gamma) + (\partial f^*(\phi))f^*(\phi)^{-1} = f^*(\phi)^N \psi_{ij}^* f^*(\Gamma') f^*(\phi)^{-1}$. Also definiert der naive Pullback in den Karten einen Zusammenhang $f^*(\nabla)$ von $f^*(E)$ auf N .

1.22 *Vektorbündel auf \mathbb{R}

Lemma 11. *Jedes Vektorbündel E mit Zusammenhang ∇ auf einem reellen Intervall⁹ $I \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich durch flache Schnitte trivialisieren.*

Beweis: Für ein $P \in I$ existiert nach Satz 2 eine Fundamentallösung F zum Anfangswert $F(P) = id_E$. In Matrixsprache – für eine feste Basis e_1, \dots, e_n von E – heisst das: Die Spalten f_i von F sind flach $\nabla f_i = 0$ mit $f_i(P) = e_i$.

Sei $\sum_i \lambda_i f_i(Q) = 0$ im Punkt $Q \in I$ für $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann verschwindet $f(x) = \sum_i \lambda_i f_i(x)$ auf ganz I (Eindeutigkeit der Lösung)

$$\nabla f = 0 \text{ und } f(Q) = 0 \implies f = 0.$$

Auswerten in P liefert $\lambda_i e_i = 0$, also $\lambda_i = 0$ für alle i . Die f_i bilden daher eine Basis von E in jedem Punkt Q von I .

Lemma 12. *Ein Vektorbündel E vom Rang n auf einer Mannigfaltigkeit M sind äquivalent:*

- E ist trivial, d.h. $E(M) = \bigoplus_{\alpha=1}^n C^\infty(M) \cdot \eta_\alpha(x)$ ist frei.
- Es gibt Schnitte $\eta_1, \dots, \eta_n \in E(M)$ so, dass $(\eta_\alpha)_i(x) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind für alle $i \in I, x \in V_i$.

Beweis der Richtung (2) \implies (1): Gegeben sei $\eta \in E(M)$. Für jedes $x \in V_i$ existieren dann eindeutig bestimmte reelle Zahlen $f_i^\alpha(x)$ mit $\eta(x) = f_i^\alpha(x) \eta_\alpha(x)$. Aus Cramers Regel folgt, dass die $f_i^\alpha(x)$ auf V_i glatt sind. Wegen der Eindeutigkeit verheften sich die $f_i^\alpha(x)$ zu einer glatten Funktion $f^\alpha \in C^\infty(M)$. Also $\eta = f^\alpha(x) \eta_\alpha(x)$, und die $\eta_\alpha(x)$ sind ein Erzeugendensystem von $E(M)$. Andererseits sind die η_α offensichtlich $C^\infty(M)$ -linear unabhängig. Sie definieren also eine Basis des Moduls $E(M)$.

⁹Mit Hilfe einer Partition der 1 kann man zeigen, dass auf jeder glatten Mannigfaltigkeit M eine Riemannsche Metrik existiert. Also existiert auf dem Tangentialbündel von M ein Zusammenhang. Für ein beliebiges glattes Vektorbündel E auf M betrachtet man das Tangentialbündel TE von E . Auf TE existiert eine Metrik, und damit auf TTE ein Zusammenhang. Daraus kann man durch metrische Retraktion auf das Unterbündel $p^*(E) \hookrightarrow TTE$ folgern, dass auch auf $p^*(E)$ (über dem Raum TE) ein Zusammenhang existiert. Pullback auf den Nullschnitt liefert einen Zusammenhang auf E (über M). Somit besitzt jedes glatte Vektorbündel einen Zusammenhang. Also ist jedes Vektorbündel auf einem Intervall trivial.

Kapitel 2

Die lineare Gruppe

2.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel klassifizieren wir die endlich dimensionalen algebraischen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe $Gl(V)$ eines endlich dimensionalen reellen Vektorraums V . Jede solche Darstellung zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen, welche durch ihre jeweiligen Höchstgewichte eindeutig beschrieben werden.

Der aufmerksame Leser wird sich leicht davon überzeugen können, dass die gegebenen Argumente ebenso zur Klassifikation aller endlich dimensional differenzierbaren Darstellungen der $Gl(N, \mathbb{R})^+ = \{g \in Gl(N, \mathbb{R}) \mid \det(g) > 0\}$ führen. In den Argumenten muss dazu lediglich die Gruppe D durch ihre topologische Zusammenhangskomponente ersetzt werden.

Ein Teil der Betrachtungen dieses Kapitels wird später in allgemeinere Sätze einmünden, welche für beliebige Liegruppen gelten.

2.2 Die Exponentialabbildung

Sei V ein reeller Vektorraum. Sei $G = Gl(V)$ die lineare Gruppe von V . Fixiert man eine Basis e_1, \dots, e_N , so ist die Untergruppe D der Diagonalmatrizen erklärt. V zerfällt in Eigenräume $V = \bigoplus_i V_i$ unter D , welche von der Basis aufgespannt werden. Die Eigenwerte sind $\chi_i(t) = t_i$ für $t = \text{diag}(t_1, \dots, t_N)$. D.h. $t \cdot e_i = t_i e_i$.

Exponentialabbildung: Auf dem Vektorraum $Lie(G) = End(V)$ der $N \times N$ -Matrizen definiert man

$$\exp : Lie(G) \rightarrow G ,$$

durch die absolut und lokal gleichmässig konvergente Matrixtaylorreihe

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} .$$

Es gilt $\exp((t + t_0)X) = \exp(tX) \cdot \exp(t_0X)$ sowie

$$g \cdot \exp(X) \cdot g^{-1} = \exp(gXg^{-1}) .$$

G ist eine offene Teilmenge von $M_{N \times N}(\mathbb{R})$. Also $T_e(G) = Lie(G)$. Die Jacobimatrix der Exponentialabbildung $J(\exp, 0) : Lie(G) \rightarrow T_e(G) = Lie(G)$ ist offensichtlich die Identität

$$J(\exp, 0) = id_{Lie(G)} .$$

Da der Logarithmusreihe nicht überall konvergiert ist, ist nicht sofort klar was das Bild von \exp ist (benutze Jordanzerlegung).

Sei B die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen, $N \subseteq B$ die normale Untergruppe der unipotenten oberen Matrizen, sowie \bar{N} die Gruppe der unipotenten unteren Dreiecksmatrizen. Auf den nilpotenten oberen Dreiecksmatrizen $Lie(N)$ bricht die Logarithmusreihe ab und konvergiert, und definiert die Umkehrfunktion der Exponentialabbildung \exp . Es folgt

$$\exp : Lie(N) \cong N ,$$

und analog $\exp : Lie(\bar{N}) \cong \bar{N}$ für die Gruppe \bar{N} .

2.3 Darstellungen und Gewichte

Eine Darstellung ρ einer Gruppe G auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum W ist ein Homomorphismus $\rho : G \rightarrow Gl(W)$. Das Tensorprodukt $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$ zweier Darstellungen (ρ_i, W_i) ist eine Darstellung auf $W_1 \otimes W_2$, die direkte Summe $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) = \rho_1(g) \oplus \rho_2(g)$ ist eine Darstellung auf $W_1 \oplus W_2$. Die duale Darstellung (W^*, ρ^\vee) von $Gl(V)$ auf dem Dualraum W^* ist erklärt durch $\langle \rho^\vee(g)w^*, \rho(g)w \rangle = \langle w^*, w \rangle$ für $w \in W, w^* \in W^*$.

Ein G -invarianter Unterraum $W_1 \subseteq W$ einer Darstellung (ρ, W) führt zu Darstellungen von G auf W_1 und $W_2 = W/W_1$. Sind $W_1 = 0$ und $W_1 = W$ die einzigen G -invarianten Unterräume von W , nennt man die Darstellung (ρ, W) irreduzibel.

Eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $T : W_1 \rightarrow W_2$ mit $T \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ T$ für alle $g \in G$ heisst G -linear. Zwei Darstellungen (ρ_i, W_i) heissen isomorph, wenn es einen G -linearen Isomorphismus $T : W_1 \rightarrow W_2$ gibt.

Sei nun $G = Gl(V)$. Wir nennen dann ρ algebraisch, wenn ρ differenzierbar ist und W unter D in Eigenräume $W = \bigoplus_\chi W_\chi$ zerfällt, d.h. $\rho(t)w = \chi(t)w$ für $w \in W_\chi, t \in D$, zu Eigencharakteren

$$\chi(t) = t_1^{n_1} \dots t_N^{n_N}$$

mit ganzzahligen Exponenten $\alpha = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}^N$.

Elemente in \mathbb{Z}^N nennen wir Gewichte. Die Gewichte $\alpha = (n_1, \dots, n_N)$ einer algebraischen Darstellung (ρ, W) sind die Exponenten der Charaktere $\chi(t) = t^\alpha$ der endlich vielen Eigenräume $W_\chi \neq 0$ von W . Ist W algebraisch, dann auch die duale Darstellung sowie auch die Darstellung auf jedem Subquotient einer $Gl(V)$ -invarianten Filtration. Tensorprodukte algebraischer Darstellungen sind algebraisch. Ein Gewicht (n_1, \dots, n_N) heisst dominant, wenn gilt

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_N .$$

Die Gruppe S_N der Permutationsmatrizen (Weylgruppe) operiert auf D durch Konjugation und permutiert die Eigenräume W_χ . Ist (n_1, \dots, n_N) ein Gewicht von W , dann auch jede Permutation $(n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(N)})$. Unter den permutierten Gewichten gibt es ein eindeutig bestimmtes dominantes Gewicht.

2.4 Die Liealgebra

Sei $\rho : Gl(V) \rightarrow Gl(W)$ ein differenzierbarer Gruppenhomomorphismus. Die Ableitung $J(\rho)$ von ρ (Jacobimatrix) im Punkt $g = id_V$ definiert eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $J(\rho) : End(V) \rightarrow End(W)$. Wegen $J(\exp)(0) = id$ gilt auch

$$J(\rho)(X) \cdot w = \frac{d}{dt} \rho(\exp(tX))(w)|_{t=0} \quad , \quad X \in Lie(G), w \in W .$$

Wir schreiben oft $\rho(X)w$ oder nur $X \cdot w$ anstelle von $J(\rho)(X) \cdot w$.

Lemma 13. *Das folgende Diagramm ist kommutativ*

$$\begin{array}{ccc} End(V) & \xrightarrow{J(\rho)} & End(W) \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ Gl(V) & \xrightarrow{\rho} & Gl(W) \end{array}$$

Korollar 3. *Ein Untervektorraum $W_0 \subseteq W$ (oder ein Vektor $w \in W$) einer algebraischen Darstellung W ist invariant unter G genau dann, wenn W_0 invariant ist unter (w annulliert wird von) allen $X \in Lie(G)$. Ditto für die Gruppen N, \bar{N} oder D anstelle von G .*

Der Fall N (resp. \bar{N}) ist klar¹ wegen $\exp(Lie(N)) = N$ und Lemma 13. Da G von Elementarmatrizen aus N, \bar{N} und D erzeugt wird, gilt wegen $Lie(G) = Lie(\bar{N}) \oplus Lie(D) \oplus Lie(N)$ die Aussage dann auch für die Gruppe $G = Gl(V)$.

Beweis (Lemma 13): Zu zeigen ist $\rho(\exp(tX)) = \exp(\rho(tX)) = \sum_n \frac{t^n \rho(X)^n}{n!}$. Die linke Seite erfüllt $\frac{d}{dt} \rho(\exp(tX))|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} \rho(\exp(tX))|_{t=0} \cdot \rho(\exp(t_0 X)) = \rho(X) \exp(t_0 X)$, also dieselbe Differentialgleichung $\frac{d}{dt} f(t) = \rho(X) f(t)$ wie die rechte Seite. Beide Seiten sind daher gleich, da sie für $t = 0$ gleich sind.

Seien $X, Y \in Lie(G)$ und sei $[X, Y] = XY - YX \in Lie(G)$ der Kommutator.

Lemma 14. *Es gilt $\rho(g)\rho(X)\rho(g)^{-1} = \rho(gXg^{-1})$ sowie*

$$\boxed{[\rho(X), \rho(Y)] := \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X) = \rho([X, Y])} .$$

Beweis: Folgt, wegen der Kettenregel, durch Ableiten $\frac{d^2}{dt ds}$ bei $t = s = 0$ von

$$\rho\left(\exp(Xt)\exp(Ys)\exp(-Xt)\right) = \rho\left(\exp(Xt)\right)\rho\left(\exp(Ys)\right)\rho\left(\exp(-Xt)\right) .$$

¹Im Fall D sind beide Aussagen äquivalent zu $W_0 = \bigoplus_{\chi} (W_{\chi} \cap W_0)$, da ρ algebraisch ist.

2.5 Die Algebra U

Betrachte die adjungierte Darstellung $\rho_{ad}(g)X = gXg^{-1}$ von $Gl(V)$ auf $End(V)$.

Behauptung: ρ_{ad} ist algebraisch.

Beweis: Sei $E_{ij} \in End(V)$ die Matrix mit 1 ist an der Stelle (i, j) und 0 an den anderen Stellen. Die E_{ij} bilden eine Basis des Endomorphismenrings $End(V)$ bestehend aus D -Eigenvektoren. Es gilt $tE_{ij}t^{-1} = \frac{t_i}{t_j} \cdot E_{ij}$ für alle $t \in D$. Das zugehörige Gewicht ist ganzzahlig.

Bemerkung: $Lie(N)$ wird von den $X = E_{ij}$ mit $i < j$ aufgespannt, $Lie(\bar{N})$ von den $X = E_{ij}$ mit $i > j$.

Die einhüllende Algebra: Wir betrachten den nichtkommutativen Polynomring $\mathbb{R} \langle X_{ij} \rangle$ über \mathbb{R} aufgespannt von den Variablen X_{ij} für $1 \leq i, j \leq N$ und das von den Kommutator-Relationen $X_{ij}X_{kl} - X_{kl}X_{ij} = \delta_{jk}X_{il} - \delta_{li}X_{kj}$ aufgespannte beidseitige Ideal. Der Quotientenring U ist eine nichtkommutative \mathbb{R} -Algebra. Der Grad eines einzelnen Monoms in U ist dabei wohldefiniert. Der Einsetzung $X_{ij} \mapsto E_{ij}$ definiert einen Ringhomomorphismus $U \rightarrow End(V)$. V ist daher ein U -Modul.

Sei (ρ, W) eine Darstellung von $Gl(V)$. Die zugeordnete \mathbb{R} -lineare Abbildung $\rho : End(V) \rightarrow End(W)$ respektiert die Kommutatorrelationen (Lemma 14). Somit induziert $X_{ij} \mapsto \rho(E_{ij})$ einen Ringhomomorphismus $U \rightarrow End(W)$

$$\begin{array}{ccc}
 & U & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 End(V) & \xrightarrow{\rho} & End(W)
 \end{array}$$

Auf diese Weise wird W zu einem U -Modul.

Normalordnung: Wegen den Kommutator-Relationen können Elemente von U , welche ja durch Polynome in den X_{ij} repräsentiert werden, durch Umordnen der Monome (benutze absteigende Induktion nach dem Grad) in Normalordnung gebracht werden. Damit ist gemeint, dass in allen auftretenden Monomen jeweils die Variablen X_{ij} mit $i > j$ links von den Variablen X_{kl} mit $i \leq j$ stehen.

2.6 Höchstgewichte

Sei (ρ, W) eine algebraische Darstellung von $G = Gl(V)$ und $W^N \subseteq W$ der Unterraum der N -invarianten Vektoren. Wegen Korollar 3 gilt

$$W^N = \{w \in W \mid X(w) = 0, \quad \forall X \in Lie(N)\}.$$

Alle $X \in Lie(N)$ sind nilpotent. Daher folgt aus $W \neq 0$ auch

$$\boxed{W^N \neq 0}.$$

(Dies wäre offensichtlich für kommutierende nilpotente Matrizen wegen Existenz eines simultanen Eigenwerts Null. Benutze daher induktiv $W^{N_{i+1}} \subseteq W^{N_i}$ und die Normalteilerkette $N_i \triangleleft N_{i+1}$ oberer Dreiecksmatrizen mit abelschen Quotienten $N_{i+1}/N_i \cong \mathbb{R}^i$.)

Definition: Wegen $\rho(t)(W^N) \subseteq W^N$ für $t \in D$ zerfällt W^N in D -Eigenräume (beachte $\rho(n)\rho(t)w = \rho(t)\rho(t^{-1}nt)w = \rho(t)w$ für $w \in W^N$ und $n \in N$ wegen $t^{-1}Nt \subseteq N$). Die Gewichte der Eigenraumzerlegung von W^N nennt man **Höchstgewichte** von W .

Der Raum $U(w)$: Sei $0 \neq w \in W$ und $U(w) \subseteq W$ der von $P(w)$ aufgespannte Unterraum für die Operatoren $P \in U$. Der Unterraum $U(w) \subseteq W$ ist invariant unter allen $X \in Lie(G)$. Aus Korollar 3 folgt

Lemma 15. 1) $U(w) \subseteq W$ ist ein G -invarianter Unterraum von W . 2) Ist $w \in W^N$ ein Höchstgewichtvektor zum Gewicht χ , dann ist der χ -Eigenraum von $U(w)$ eindimensional. 3) Alle vom Höchstgewicht $\chi(t) = t^\alpha$ verschiedenen Gewichte $\chi'(t) = t^{\alpha'}$ von $U(w)$ sind von der Gestalt $\alpha' = \alpha - \sum_{i < j} n_{ij}(e_i - e_j)$ für Zahlen $n_{ij} \in \mathbb{N}$. Man schreibt

$$\alpha' \preceq \alpha.$$

Insbesondere ist das Höchstgewicht α lexikographisch maximal unter allen in $U(w)$ vorkommenden Gewichten. Da alle Permutationen des Gewichts α als Gewicht in $U(w)$ vorkommen, folgt

Korollar 4. *Höchstgewichte sind dominant.*

Beweis von Lemma 15: $U(w)$ ist der Aufspann aller $P(w)$, $P \in U$. Hierbei ist P obdA in Normalordnung. Dann verschwinden aber alle Beiträge ausser denjenigen Monomen, welche nur die Variablen $X_{ij} \in \text{Lie}(\overline{N})$ enthalten. Wende nun Lemma 16 an.

Lemma 16. Sei $w \in W$ ein Eigenvektor von D vom Gewicht (n_1, \dots, n_N) und sei $E_{ij} \in \text{Lie}(\overline{N})$, also $i > j$. Dann ist $X_{ij} \cdot w \in W$ ein Eigenvektor zum Gewicht $(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_N)$.

Beweis: Es gilt $\rho(t)\rho(X_{ij})w = \rho(tX_{ij}t^{-1})\rho(t)w = \frac{t_i}{t_j}\chi(t)\rho(X_{ij})w$ für $t \in D$.

Verschärfung: Sei $w \in W^N$ ein Höchstgewichtvektor in W . Dann zeigen wir im nächsten Abschnitt die schärfere Aussage, dass ganz $U(w)^N$ eindimensional ist, also aus $\mathbb{R} \cdot w$ besteht (Lemma 17). Zusammen mit den bisherigen Resultaten folgt daraus

Theorem 1. Jede algebraische Darstellung zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen algebraischen Darstellungen. Für irreduzible algebraische Darstellungen W ist der Raum W^N eindimensional. Das zugehörige Höchstgewicht α ist dominant und bestimmt die irreduzible algebraische Darstellung (W, ρ) bis auf Isomorphie.

Zur letzten Behauptung². Man hat eine natürliche U -lineare Surjektion

$$\pi : V(\alpha) = U \otimes_{U(B)} (\chi, \mathbb{R}) \rightarrow W .$$

Es gilt³: $\text{Kern}(\pi)$ ist der eindeutig bestimmte U -Untermodule K von $V(\alpha)$ mit endlich dimensionalem Quotient. Somit legt α den U -Modul W und damit ρ eindeutig bis auf Isomorphie fest (letzteres wie in Korollar 3).

Übungsaufgabe: 1) Ist $W = W(\alpha)$ irreduzibel mit Höchstgewicht $\alpha = (n_1, \dots, n_N)$, dann ist die duale Darstellung irreduzibel mit Höchstgewicht $\alpha^\vee = (-n_N, \dots, -n_1)$.

²Siehe [5] für weitere Details, $U(B) \subseteq U$ die von X_{ij} mit $i \leq j$ aufgespannte Unter algebra.

³Der Vermamodul $V(\alpha)$ ist algebraisch mit Höchstgewicht α , aber ist unendlich dimensional! Es folgt $\dim_{\mathbb{R}}(Q^N) = 1$ für endlich dimensionalen Quotienten U -Modul Q von $V(\alpha)$ (Lemma 17). Gäbe es verschiedene U -Untermodule K_1, K_2 mit endlich dimensionalem Quotient, dann ist obdA $K_1 \subseteq K_2$, indem man K_2 durch $K_1 \cap K_2$ ersetzt. Der Darstellung auf dem Kern $Q_1 \rightarrow Q_2$ hätte dann keinen Höchstgewichtvektor. Ein Widerspruch!

2.7 Der Casimir Operator

Der Casimiroperator C in der Algebra U ist definiert durch

$$C = \sum_{i,j} X_{ij} X_{ji} .$$

Die Kommutatorrelationen zeigen für alle $X \in Lie(G)$ und damit für alle $X \in U$ $\sum_{i,j} X_{\alpha\beta} X_{ij} X_{ji} = \sum_{i,j} X_{ij} X_{\alpha\beta} X_{ji} + \sum_j X_{\alpha j} X_{j\beta} - \sum_i X_{i\beta} X_{\alpha i} = \sum_{i,j} X_{ij} X_{ji} X_{\alpha\beta}$. Also

$$\boxed{X \cdot C = C \cdot X} .$$

Eigenvektoren von C : Wegen $X_{ij} X_{ji} = X_{ji} X_{ij} + X_{ii} - X_{jj}$ ist C in Normalordnung gegeben durch

$$C = \sum_i (X_{ii})^2 + \sum_{j>i} (X_{ii} - X_{jj}) + 2 \sum_{j<i} X_{ij} X_{ji} .$$

Angewendet auf einen Höchstgewichtvektor w vom Gewicht $\alpha = (n_1, \dots, n_N)$ folgt wegen $X_{ji} w = 0$ für $j < i$ und $X_{ii} w = n_i \cdot w$

$$C \cdot w = \lambda(\alpha) \cdot w$$

für die ganze Zahl

$$\lambda(\alpha) = \sum_i [(n_i)^2 + (N + 1 - 2i)n_i] .$$

Da C mit U vertauscht, ist dann sogar der ganze von w aufgespannte Untermodul $U(w) \subseteq W$ im Eigenraum von C zum Eigenwert $\lambda(\alpha)$. Ist α' eine Höchstgewicht in $U(w)$, gilt daher $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha')$. Andererseits $\alpha' \preceq \alpha$ für alle Gewichte α' von $U(w)$ (Lemma 15). Aus dem übernächsten Lemma 51 folgt daher $\alpha = \alpha'$, und wegen Lemma 15 folgt

Lemma 17. Sei Q eine endlichdimensionale algebraische Darstellung $Q = U(w)$ erzeugt von einem Höchstgewichtvektor w . Dann gilt

$$\boxed{Q^N = \mathbb{R} \cdot w} .$$

Lemma 18. Seien $\alpha', \alpha \in \mathbb{Z}^N$ dominant mit $\alpha' \preccurlyeq \alpha$. Dann existiert eine Folge dominanter $\alpha_\nu \in \mathbb{Z}^N$ mit $\alpha_{\nu+1} \preccurlyeq \alpha_\nu$, welche $\alpha = \alpha_0$ in α' überführen durch Modifikationen des Typs: $\alpha_{\nu+1}$ entsteht aus α_ν durch Modifikation an genau zwei Stellen i, j mit $1 \leq i < j \leq N$ (welche von ν abhängen)

$$\alpha_\nu = (n_1, \dots, n_N) \mapsto \alpha_{\nu+1} = (n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_N).$$

Zusatz: Gilt ausserdem $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha')$, dann ist $\alpha = \alpha'$.

Beweis: $\alpha' \preccurlyeq \alpha$ bedeutet $\alpha' = \alpha - \sum_{i < j} n_{ij}(e_i - e_j)$ mit ganzen $n_{ij} \geq 0$, oder alternativ $\alpha - \alpha' = \sum_{\nu=1}^{N-1} m_\nu(e_\nu - e_{\nu+1})$ für ganze Zahlen $m_\nu \geq 0$. Insbesondere $\alpha_\nu - \alpha'_\nu = m_\nu - m_{\nu-1}$. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach $\sum_{\nu=1}^{N-1} m_\nu$.

Konstruktion von α_1 : Sei $\alpha' \neq \alpha$. Dann existiert ein eindeutiges j mit $n'_j > n_j$ und $n_k \geq n'_k$ für $k < j$! Wähle danach $i < j$ maximal mit $n_i > n'_i$. Dann ist $\alpha_1 = \alpha - e_i + e_j \preccurlyeq \alpha$ dominant!

Andererseits gilt $\alpha' \preccurlyeq \alpha_1$, denn $\alpha' = \alpha_1 - \sum_\nu \tilde{m}_\nu(e_\nu - e_{\nu+1})$ mit $\tilde{m}_\nu = m_\nu - 1$ für $i \leq \nu < j$ und $\tilde{m}_\nu = m_\nu$ sonst. Wegen $m_i > m_{i-1} \geq 0$ und $m_j < m_{j-1}$ (und $m_k = m_{k-1}$ für $i < k < j$) gilt $\tilde{m}_\nu \geq 0$.

Beachte $\sum \tilde{m}_\nu < \sum m_\nu$. Benutze dann Induktion.

Beweis des Zusatzes: Es gilt $\lambda(\alpha_{\nu+1}) = \lambda(\alpha_\nu) + 2(1 + i - j + n_j - n_i)$. Weil α_ν dominant ist, und wegen $i < j$ ist dieser Wert < 0 (ausser im Fall $j = i + 1$ und $n_i = n_j$, der aber nicht berücksichtigt werden muss, da dann $\alpha_{\nu+1}$ nicht dominant wäre). Es folgt daher $\lambda(\alpha_{\nu+1}) < \lambda(\alpha_\nu)$ für alle ν . Somit $\lambda(\alpha') < \lambda(\alpha)$ im Widerspruch zur ersten Annahme $\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha')$.

2.8 Die Höhengraduierung

Sei (ρ, W) eine irreduzible Darstellung von $Gl(V)$ mit Höchstgewichtsvektor w_χ . Wir definieren dann

$$G^\nu(W) \subseteq W$$

als den linearen Unterraum von W erzeugt von allen $u(w_\chi)$ für alle Monome u vom Grad ν in den Variablen X_{-i} (in beliebiger Anordnung). Hierbei sei

$$X_{-i} := X_{i+1,i} \in Lie(\overline{N}) \quad , \quad 1 \leq i \leq N-1 .$$

Analog sei $X_i := X_{i,i+1} \in Lie(N)$.

Die Gewichte $e_i - e_{i+1}$ ($1 \leq i < N$) der X_{-i} (siehe Lemma 16) sind offensichtlich linear unabhängig in \mathbb{Z}^N . Eine Zerlegung in D -Eigenräume zeigt daher die lineare Unabhängigkeit $\bigoplus_{\nu=0}^{\infty} G^\nu(W) \hookrightarrow W$. Wegen $W = U(w_\chi)$ gilt sogar Gleichheit

$$\boxed{\bigoplus_{\nu=0}^{\infty} G^\nu(W) = W \quad , \quad G^0(W) = \mathbb{R} \cdot w_\chi} ,$$

denn Polynome in den $X_{ij} \in Lie(\overline{N})$ können in U ausgedrückt werden durch Polynome allein in den Variablen X_{-i} .

Benutze dazu die Kommutator Relationen von U

1. $X_i X_{i+1} - X_{i+1} X_i = X_{i,i+2}$
2. $X_{i,i+2} X_{i+2} - X_{i+2} X_{i,i+2} = X_{i,i+3}$, etc..
3. Analog für X_{-i}
4. $X_i X_{-j} - X_{-j} X_i = \delta_{ij} \cdot (X_{i,i} - X_{i+1,i+1})$.

Auf Grund der letzten Relation (!) gilt ausserdem für $i = 1, \dots, N-1$

$$\boxed{X_i(G^\nu(W)) \subseteq G^{\nu-1}(W)} .$$

Bemerkung: Eigenvektoren von D liegen in einem der Räume $G^\nu(W)$.

2.9 Gewichtsyoga

Wir zeigen

Lemma 19. Seien $W(\alpha)$ und $W(\beta)$ irreduzible Darstellungen von $Gl(V)$ vom Höchstgewicht α resp. β . Sei $W = W(\alpha) \otimes W(\beta)$ und $\gamma = \alpha + \beta$. Dann gilt

- $W^N \hookrightarrow W(\alpha)^N \otimes W(\beta)$ und vice versa $W^N \hookrightarrow W(\alpha) \otimes W(\beta)^N$.
- $W(\gamma) \hookrightarrow W$ mit Multiplizität 1.

Beweis: Für die Höhenfiltration gilt

$$W = \bigoplus G^k(W) = \bigoplus_{i+j=k} G^i(W(\alpha)) \otimes G^j(W(\beta)).$$

D -Eigenvektoren w in W haben die Gestalt $w = \sum_{i+j=k} u_i \otimes v_j \in G^k(W)$ für geeignetes k . Für $X \in \langle X_{-\nu} \rangle$ liegt $Xw = \sum_{i+j=k} Xu_i \otimes v_j + u_i \otimes Xv_j$ in $G^{k-1}(W)$. Koeffizientenvergleich liefert daher im Fall $Xw = 0$

$$Xu_i \otimes v_{k-i} + u_{i-1} \otimes Xv_{k-i+1} = 0.$$

Ist $i = i_0$ minimal mit $u_i \neq 0$ und $v_{k-i} \neq 0$, folgt

$$Xu_{i_0} \otimes v_{k-i_0} = 0, \text{ also } Xu_{i_0} = 0.$$

Für Höchstgewichtvektoren w gilt daher $u_{i_0} \in W(\alpha)^N$. Das heisst $i_0 = 0$. Somit ist nachfolgend definierte Projektion p auf dem Teilraum W^N injektiv

$$\begin{array}{ccc} W^N = G^0(W) & \hookrightarrow & \bigoplus_{i+j=k} G^i(W(\alpha)) \otimes G^j(W(\beta)) \\ & \searrow p & \downarrow \bigoplus_j \text{pr}_{0,j} \\ & & W(\alpha)^N \otimes W(\beta) = G^0(W(\alpha)) \otimes W(\beta) \end{array}$$

Daraus folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung ist eine unmittelbare Folge der ersten.

2.10 *Sprungstellen

Lemma 20. Sei die Situation wie im letzten Lemma. Besitzen α und β eine gemeinsame Sprungstelle bei i , d.h. gilt $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ und $\beta_i > \beta_{i+1}$, dann ist

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_i - 1, \gamma_{i+1} + 1, \gamma_{i+2}, \dots, \gamma_N)$$

ein Höchstgewicht von W mit Multiplizität 1.

Beweis⁴: $G^1(W(\alpha)) \subseteq W(\alpha)$ wird aufgespannt von $\sum_{\nu} \mathbb{R} \cdot X_{-\nu} w_{\alpha}$, und zerfällt in die $N - 1$ potentiellen Eigenräume $G^1(W)_{i\alpha} = \mathbb{R} \cdot X_{-i} w_{\alpha}$ zu den Gewichten

$${}_i\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i - 1, \alpha_{i+1} + 1, \dots, \alpha_N).$$

Nach Lemma 21 ist $G^1(W)_{i\alpha} = 0$ äquivalent zu $\alpha_i = \alpha_{i+1}$. Ist i daher eine Sprungstelle von α (d.h. $\alpha_i > \alpha_{i+1}$), so kommt das Gewicht ${}_i\alpha$ in $G^1(W_{\alpha})$ mit Dimension 1 vor.

Ist i eine gemeinsame Sprungstelle von α und β , dann kommt das dominante Gewicht ${}_i\gamma$ mit der Dimension 2 in $G^1(W)$ vor, in Form des Teilraums

$$G^1(W(\alpha))_{i\alpha} \otimes w_{\beta} \bigoplus w_{\alpha} \otimes G^1(W(\beta))_{i\beta}.$$

Aus Dimensionsgründen ist deshalb ${}_i\gamma$ das Gewicht einer Unterdarstellung von W zu einem Höchstgewicht $\gamma' \neq \gamma$ (beachte $\gamma' \preceq \gamma$, da alle Gewichte $\neq \gamma$ von W diese Eigenschaft haben). Insbesondere also ${}_i\gamma \preceq \gamma'$. Aber ${}_i\gamma$ ist dominant, und ist maximal unter allen dominanten γ' mit ${}_i\gamma \preceq \gamma' \preceq \gamma$. Daraus folgt $\gamma' = {}_i\gamma$. Somit ist ${}_i\gamma$ das Höchstgewicht einer Multiplizität 1 Darstellung in $W(\alpha) \otimes W(\beta)$.

Der Raum $G^1(W)$: Sei $\chi = t^{\alpha}$. Für den Höchstgewichtsvektor schreiben wir $w_{\chi} = w_{\alpha}$ etc. Äquivalent zu $G^1(W)_{\nu\alpha} = 0$ ist $X_{-\nu} w_{\alpha} = 0$. Wegen $X_{\nu} w_{\alpha} = 0$ folgt aus der §2.8, Relation 4 dann $n_{\nu} = n_{\nu+1}$ für die Koordinaten des Gewichts α .

Die Umkehrung gilt auch. Aus $n_{\nu} = n_{\nu+1}$ folgt $X_{\nu} X_{-\nu} w_{\alpha} = 0$ (§ 2.8, Relation 4). Aber $X_{\mu} X_{-\nu} w_{\alpha} \in G^0(W)$ ist Null für $\mu \neq \nu$ aus Gewichtsgründen: $G^0(W) = \mathbb{R} \cdot w_{\alpha}$. Also $X_{-\nu} w_{\alpha} \in W^N$, und ist somit wegen Satz 1 gleich Null.

Lemma 21. Ist (W, ρ) irreduzibel vom Höchstgewicht α , dann ist $G^1(W)_{i\alpha} = 0$ genau dann wenn gilt $n_i = n_{i+1}$.

⁴Wird später nicht substantiell benutzt

Kapitel 3

Tensoren

3.1 Vorbemerkungen

In diesem Kapitel studieren wir Tensoren im Kontext der linearen Algebra. Für einen endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V sind Tensoren in $V^* \otimes V^*$ nichts anderes als \mathbb{R} -Bilinearformen auf V . Man hat bekanntlich eine kanonische Zerlegung des Raums aller \mathbb{R} -Bilinearformen $V^* \otimes V^* = S^2(V^*) \oplus \Lambda^2(V^*)$ in die zwei Teilräume der symmetrischen \mathbb{R} -Bilinearformen bzw. antisymmetrischen \mathbb{R} -Bilinearformen. Verallgemeinerungen dieser Zerlegung auf die höheren Tensorprodukte $(V^*)^{\otimes i}$, dies sind die Bestandteile der Tensoralgebra, werden in diesem Kapitel untersucht.

Die Tensoralgebra $T(V)$ eines Vektorraums V ist eine nichtkommutative Algebra, deren Struktur stark durch kombinatorische Daten beeinflusst wird. Die symmetrische Gruppe, welche auf Tensoren fester Stufe operiert, zerlegt die Tensoralgebra in fundamentale Bestandteile. Dies verallgemeinert den oben beschriebenen Spezialfall. Die genaue Beschreibung der Bestandteile erfolgt durch einen Satz von Hermann Weyl.

Wir geben einen Beweis dieses Satzes. Benötigt wird der Satz von Weyl allerdings nur in rudimentärer Form. Unser spezielles Interesse gilt Tensoren vom Typ $R^{r,2}(V)$, welche in der Riemannschen Geometrie eine Rolle spielen. Einfache Spezialfälle des Satzes von Weyl, welche wir mit unabhängigen Beweisen leicht verifizieren können, genügen für viele Anwendungen. Die meisten Abschnitte, insbesondere 3.8-3.10, können also beim Lesen erst einmal übersprungen werden.

3.2 Multilineare Algebra

Sei V ein K -Vektorraum der Dimension $N < \infty$ und $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum aller K -linearen Abbildungen von V nach K . Allgemeiner kann man den Vektorraum $\text{Mult}_K(V, \dots, V, K)$ der K -multilinearen Abbildungen T betrachten in k Variablen $v_i \in V_i = V$

$$T : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \rightarrow K .$$

Man nennt T einen Tensor (kontravarianten Tensor) der Stufe k .

Allgemein gilt für das Tensorprodukt $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_k$

$$\text{Mult}_K(V_1, \dots, V_k, K) = \text{Hom}_K(V_1 \otimes_K V_2 \otimes_K \dots \otimes_K V_k, K) .$$

Eine entsprechende universelle Eigenschaft bestimmt $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_k$ eindeutig bis auf Isomorphie.

Der Einfachheit beschränken wir auf den Fall $V_i = V$. Es sei dann e_1, \dots, e_N eine Basis von V . Für Vektoren $v_i = \sum x_i^j e_j$ gilt daher

$$T(v_1, \dots, v_N) = \sum_{j_1=1}^N \dots \sum_{j_k=1}^N \left(\prod_{i=1}^k x_i^{j_i} \right) \cdot T(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) .$$

Somit ist T durch seine Werte $T_{j_1, \dots, j_k} = T(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ eindeutig festgelegt. Umgekehrt definiert jede Vorgabe dieser Werte einen Tensor. Ist dieser Wert Null für alle (j_1, \dots, j_k) mit Ausnahme von $(j_1, \dots, j_N) = (i_1, \dots, i_N)$ und $T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 1$, dann entspricht der Tensor $T \in \text{Mult}_K(V, \dots, V, K)$ der Linearform auf $V^{\otimes k} = V \otimes_K \dots \otimes_K V$, welche $e_{j_1} \otimes_K \dots \otimes_K e_{j_k}$ annulliert mit aus Ausnahme von $e_{i_1} \otimes_K \dots \otimes_K e_{i_k}$, und diesen auf 1 abbildet.

Andererseits definiert $\langle v_1 \otimes_K \dots \otimes_K v_k, v_1^* \otimes_K \dots \otimes_K v_k^* \rangle = \prod_{i=1}^k v_i^*(v_i)$ bei gleicher Stufe eine nicht ausgearte Paarung $(V \otimes_K \dots \otimes_K V) \times (V^* \otimes_K \dots \otimes_K V^*) \rightarrow K$. Dies identifiziert auf kanonische Weise

$$\text{Hom}_K(V \otimes \dots \otimes_K V, K) \cong V^* \otimes_K \dots \otimes_K V^* .$$

Analog: Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine (definite) symmetrische Bilinearform auf V , denn definiert $\langle v_1 \otimes_K \dots \otimes_K v_k, w_1 \otimes_K \dots \otimes_K w_k \rangle = \prod_{i=1}^k \langle v_i, w_i \rangle$ eine (definite) symmetrische Bilinearform auf $V^{\otimes k}$.

3.3 Die Tensoralgebra $T(V)$

Tensoren kann man mit Hilfe des (assoziativen) Tensorprodukts multiplizieren via

$$(T_1 \otimes T_2)(v \otimes w) = T_1(v_1) \cdot T_2(v_2) \quad , \quad v_1 \in V^{\otimes k}, v_2 \in V^{\otimes l} .$$

Dies induziert eine nichtkommutative Algebrenstruktur auf

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$

respektive auf $T(V^*) = T(V)^*$

$$T(V)^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \text{Hom}_K(V^{\otimes k}, K) .$$

Funktorialität: K -lineare Abbildungen $f : V \rightarrow W$ induzieren Algebrenhomomorphismen

$$T(f) : T(V) \rightarrow T(W) \quad , \quad T(f)^* : T(W)^* \rightarrow T(V)^* .$$

Speziell $Gl(V)$ operiert auf der Algebra $T(V)$ und ebenso auf $T(V^*)$. Beachte $gv = T(g)(v)$ und $gv^* := (T(g)^*)^{-1}(v^*)$ für $g \in Gl(V)$ und $v \in V$ resp. $v^* \in V^*$. Betrachtet man allgemeiner gemischte Tensoren in $V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes l} = T_k^l(V)$, geht die Funktorialität (ausser für Isomorphismen) verloren.

Die symmetrische Gruppe S_k : Auf den Tensoren der Stufe k operiert die Gruppe S_k durch Vertauschen der Variablen. Diese Operationen kommutiert offensichtlich mit der durch

$$(gT)(v_1, \dots, v_k) = T(g^{-1}v_1, \dots, g^{-1}v_k)$$

definierten Operation der Gruppe $Gl(V)$. Das heisst, die Permutationen in S_r definieren $Gl(V)$ -lineare Abbildungen. Dies erlaubt es $T^k(V)$ in $Gl(V)$ invariante Teilräume zu zerlegen (Lemma 25 oder genauer Satz 4).

Beispiel: Die Zerlegung $T^2(V^*) = \Lambda^2(V^*) \oplus S^2(V^*)$ in alternierende und symmetrische Bilinearformen.

3.4 Symmetrische Tensoren

Ein Tensor $T \in T^k(V)$ heisst symmetrisch, wenn gilt

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = T(v_1, \dots, v_k)$$

für alle $\sigma \in S_k$ und alle $v_i \in V$. Sei $S^k(V^*)$ der Raum der symmetrischen Koten-
soren in $T^k(V)$. Ist $T \in T^k$, dann ist

$$Sym(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

ein symmetrischer Tensor. Wir schreiben auch $Sym = Sym_{1, \dots, k}$. Die symmetri-
sche Algebra ist erklärt durch

$$S(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} S^k(V^*).$$

Erklärt man das Produkt durch $T_1 \overset{s}{\otimes} T_2 = Sym(T_1 \otimes T_2)$, erhält man eine kom-
mutative Algebra, die symmetrische Algebra von V^* .

Lemma 22. *Es gibt einen funktoriellen Isomorphismus zwischen $S(V^*)$ und der
Polynomialgebra $\mathcal{P}(V)$. $S^k(V^*)$ entspricht den homogenen Polynomen $\mathcal{P}^k(V)$ auf
 V vom Grad k .*

Beweis: Der Isomorphismus wird gestiftet durch

1) Polarisierung $Pol_k : \mathcal{P}^k(V) \rightarrow S^k(V^*)$

$$P(v) \mapsto T(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_I (-1)^{k-|I|} P(v_I)$$

(hierbei durchläuft I die Teilmengen von $\{1, \dots, k\}$ mit $v_I = \sum_{i \in I} v_i$) sowie
2) die dazu inverse diagonale Restriktion von $diag_k : S^k(V^*) \rightarrow \mathcal{P}^k(V)$

$$T(v_1, \dots, v_k) \mapsto P(v) = T(v, v, \dots, v).$$

Der Nachweis ist eine leichte Übungsaufgabe. Um $P \mapsto T \mapsto P$ zu zeigen,
benutze $x^k - \binom{k}{1}(x-1)^k + \binom{k}{2}(x-2)^k \mp \dots = \Delta^k(x^k) = k!$ (Differenzenquotient)
für $x = k$. Dies genügt, da beide Räume dieselbe Dimension besitzen.

3.5 *Multipolynome

Betrachte in diesem Paragraphen für $M \leq N = \dim(V)$ Tensoren

$$T \in S^{r_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{r_M}(V)$$

T kann als Polynom auf den Matrizen $Mat_{N,M}(\mathbb{R})$ aufgefasst werden.

Sei $V' \subseteq V$ der von den ersten M Basisvektoren e_1, \dots, e_M aufgespannten Unterraum.

Behauptung: Für jeden Tensor T wie oben gibt es ein $g \in Gl(V)$ derart dass die Einschränkung von gT auf V' nichttrivial ist.

Beweis (Induktion nach M): Wir fassen T als Element in $\mathcal{P}^{r_1}(V^*) \otimes S^{r_2}(V) \otimes \cdots \otimes S^{r_M}(V)$ auf. Der Polynomfall $M = 1$ ist klar. allgemein können wir durch Anwenden einer geeigneten Scherung $g_1 \in Gl(V)$ annehmen $T = (x_1)^{r_1} \cdot T_1 +$ Terme kleineren x_1 -Grades mit $T_1 \neq 0$ in $S^{r_2}(V) \otimes \cdots \otimes S^{r_M}(V)$ (benutze etwa Induktion nach der Variablenzahl N). Daher obdA

$$T = x_1^{r_1} \otimes x_1^{d_2} c_2(x_2, \dots, x_N) \otimes \cdots \otimes x_1^{d_M} c_M(x_2, \dots, x_M) + \dots \text{niedrigere Terme in } x_1$$

mit homogenen Polynomen $c_\nu(x_2, \dots, x_M) \neq 0$ vom Grad $\tilde{r}_\nu = r_\nu - d_\nu$. Sei $\tilde{V} = \langle v_2, \dots, v_N \rangle \subseteq V$ und $\tilde{T} = c_2 \otimes \cdots \otimes c_M \in S^{\tilde{r}_2}(\tilde{V}) \otimes \cdots \otimes S^{\tilde{r}_M}(\tilde{V})$. Per Induktion gibt es $\tilde{g} \in Gl(\tilde{V})$ so dass die Einschränkung von $\tilde{g}\tilde{T}$ auf V' nicht verschwindet. $g = \tilde{g}g_1$ ist das gesuchte Element.

Bemerkung: Der Beweis der obigen Behauptung zeigt, dass in jedem $Gl(V)$ -invarianten Unterraum $W(\alpha) \subseteq S^{r_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{r_M}(V)$ ein nichttrivialer Eigenraum $W(\alpha)_\chi$ existiert zu einem Gewicht $\chi \succcurlyeq (r_1 + d_1 + \cdots + d_M, r_2 - d_2, \dots, r_M - d_M, 0, \dots, 0) \succcurlyeq r$. Aber $\alpha \succcurlyeq \chi$. Aus der Behauptung und Lemma 26 folgt

Lemma 23. Sei $M \leq N$. Dann gilt $\alpha_\nu = 0$ für $\nu > M$ für Höchstgewichte $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ von $S^{r_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{r_M}(V)$ gilt $\deg(\alpha) = \deg(r)$ sowie

$$\boxed{\alpha \succcurlyeq r = (r_1, \dots, r_M, 0, \dots, 0)}.$$

Korollar 5. $S^r(V)$ ist irreduzibel mit dem Höchstgewichtvektor $e_1^{\otimes r}$ vom Gewicht $(r, 0, \dots, 0)$.

Bemerkung: In $S^r(V)$ bzw. $\mathcal{P}^r(V^*)$ kommt jedes Gewicht ('Monom') mit Multiplizität ≤ 1 vor.

3.6 Alternierende Tensoren

Ein Tensor $T \in T^k(V)$ heisst alternierend, wenn für $\varepsilon = \text{sign}$ gilt

$$T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)T(v_1, \dots, v_k)$$

für alle $\sigma \in S_k$ und alle $v_i \in V$. Sei $\Lambda^k(V^*)$ der Raum der alternierenden Tensoren in $T^k(V)$. Ist $T \in T^k$, dann ist

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma)T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

ein antisymmetrischer Tensor. Wir schreiben auch $\text{Alt} = \text{Alt}_{1, \dots, k}$.

Die Grassmann-Algebra ist erklärt durch

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^N \Lambda^k(V)$$

mit dem Produkt $\eta \overset{a}{\otimes} \omega = \text{Alt}(\eta \otimes \omega)$.

Sei e_1, \dots, e_N eine Basis von V . Für $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, N\}$ definieren wir $e_I = \text{Alt}(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$, wobei wir annehmen $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Das Produkt $e_I \overset{a}{\otimes} e_J$ ist $\pm e_{I \cup J}$ im Fall $I \cap J = \emptyset$, und ist Null sonst. Die Vektoren e_I bilden eine Basis der Grassmann-Algebra $\Lambda(V)$ aus Eigenvektoren von D . Die Gewichte sind also die Zahlen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ mit $\alpha_\nu = 1$ für $\nu \in I$ und $\alpha_\nu = 0$ für $\nu \notin I$. Darunter sind nur die $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ dominant. Es folgt

Lemma 24. $\Lambda^i(V)$ ist eine irreduzible Darstellung von $Gl(V)$ vom Höchstgewicht $(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ mit i Einsern. V ist irreduzibel vom Höchstgewicht $(1, 0, \dots, 0)$.

Bemerkung: Eine definite Metrik auf V induziert eine Metrik auf $V^{\otimes k}$ und damit auf $\Lambda^k(V)$. Ist e_i eine Orthogonalbasis von V , so gilt $\|e_I\|^2 = \frac{1}{k!}$ für $|I| = k$. Die duale Basis ist also $e^I = k! \cdot e_I$. Das heisst $\tau = \bigoplus_k k! \cdot \text{id}_{\Lambda^k(V)}$ beschreibt den Übergang zur dualen Basis: $\tau(e_I) = e^I$.

Definiert man das Dachprodukt durch $\eta \wedge \omega := \tau(\tau^{-1}(\eta) \overset{a}{\otimes} \tau^{-1}(\omega))$, dann gilt wieder: $e^I \wedge e^J$ ist $\pm e^{I \cup J}$ im Fall $I \cap J = \emptyset$, und ist Null sonst.

3.7 Die Zerlegung des Tensorprodukts

V hat Gewichte in \mathbb{N}^N , somit auch $V^{\otimes k}$. Höchstgewichte $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ von $V^{\otimes k}$ erfüllen also $\alpha_N \geq 0$ sowie $\deg(\alpha) = \sum_{\nu} \alpha_{\nu} = k$. Jedes solche dominante Gewicht ist eine Summe von Höchstgewichte $\alpha(\Lambda^{k_{\nu}}(V))$ mit $k = \sum_{\nu} k_{\nu}$. ObdA $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_N \geq 0$. Mit dieser zusätzlichen Annahme ist k eindeutig durch α bestimmt!

Aus Lemma 19 folgt, dass die irreduzible Höchstgewicht-Darstellung $W(\alpha)$ in

$$\bigotimes_{\nu} \Lambda^{k_{\nu}}(V) \subseteq \bigotimes_{\nu} V^{\otimes k_{\nu}} = V^{\otimes k}$$

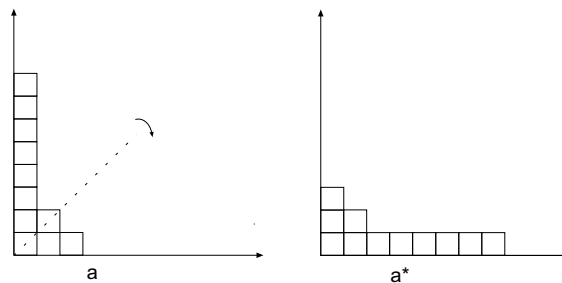
als Summand vorkommt $W(\alpha) \hookrightarrow \bigotimes_{\nu} \Lambda^{k_{\nu}}(V)$. Es folgt

Lemma 25. Die Darstellung von $Gl(V) \times S_k$ auf $V^{\otimes k}$ zerfällt in Summanden

$$V^{\otimes k} = \bigoplus_{\alpha} \left(W(\alpha) \boxtimes \sigma_{\alpha} \right),$$

mit irreduziblen Höchstgewichtdarstellungen $W(\alpha)$ und Darstellungen σ_{α} der Gruppe S_k , auf denen $Gl(V)$ trivial operiert. Die Summe durchläuft alle Gewichte α mit $\deg(\alpha) = k$ und $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N \geq 0$. Insbesondere kommt $W(\alpha)$ mit der Vielfachheit $\dim(\sigma_{\alpha})$ vor.

Beweis: Die Operation von S_k ist $Gl(V)$ -linear, respektiert also den Unterraum $(V^{\otimes k})^N = \bigoplus_{\alpha} (V^{\otimes r})_{\alpha}^N$ und dessen Gewichtszerlegung. Dies definiert die Darstellungen $\sigma_{\alpha} : S_r \rightarrow Gl(V^{\otimes r})_{\alpha}^N$. Die Behauptung folgt dann unmittelbar.



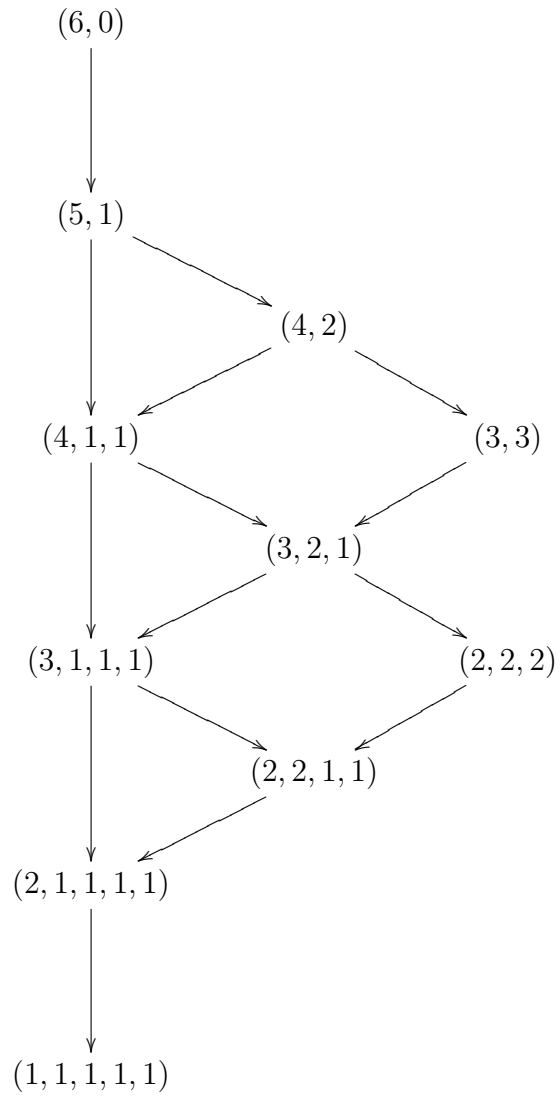
Bemerkung: Im Fall $N = \dim(V) \geq k$ ist $\alpha^* = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ wieder ein dominantes Höchstgewicht. α^* nennen wir das zu α duale Höchstgewicht.

Beispiel: $(k, 0, \dots, 0)^* = (1, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ mit k Einsern. Man sieht an dem Beispiel die Bedeutung der Forderung $k \leq N$.

Achtung: α^* ist aber nicht das Höchstgewicht der dualen Darstellung von $W(\alpha)$.

Es gilt $(\alpha^*)^* = \alpha$. Sind α, β beide dominant (mit $\dim(V) \geq \max(\deg(\alpha), \deg(\beta))$), dann gilt $\alpha \preceq \beta \iff \beta^* \preceq \alpha^*$ (benutze Lemma 51). Dies gilt auch für die lexikographische Ordnung \leq anstelle von \preceq .

Bemerkung: Für $k \leq 5$ stimmt die lexikographische Ordnung auf den Höchstgewichten mit der Ordnung \preceq überein. Für $k \geq 6$ ist dies nicht mehr der Fall. Dann ist \preceq dann im Gegensatz zur lexikographischen Ordnung \leq keine totale Ordnung mehr.



Das Diagramm zeigt den Ordnungsverband der Relation \preceq .

3.8 *Die symmetrische Gruppe

Wir skizzieren folgende wohlbekanntete Aussage über die Darstellungen der symmetrischen Gruppe

Satz 3. (Frobenius 1903) *Jede Darstellung der symmetrischen Gruppe $G = S_r$ über \mathbb{C} zerfällt in eine direkte Summe von irreduziblen Darstellungen. Es gibt eine Parametrisierung der irreduziblen Darstellungen σ_α durch absteigend geordnete Partitionen $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ der Zahl r , d.h.*

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r \geq 0 \quad \text{mit} \quad \sum \alpha_\nu = r$$

so dass für

$$G_\alpha = S_{\alpha_1} \times S_{\alpha_2} \times \dots \times S_{\alpha_r} \subseteq S_r$$

gilt

- Teil a): $\text{Hom}_{G_\alpha}(1, \sigma_\alpha) \cong \mathbb{C}$
- Teil b): $\text{Hom}_{G_\alpha}(1, \sigma_\beta) = 0$ für $\beta < \alpha$ (lexikographische Ordnung).

Beweis: Hat man irreduzible Darstellungen σ_α mit den Eigenschaften a) und b) gefunden, folgt sofort $\sigma_\alpha \cong \sigma_\beta \iff \alpha = \beta$ (denn für $\alpha \neq \beta$ gilt bzgl. der lexikographischen Ordnung $\beta < \alpha$ oder $\alpha < \beta$).

Die Zahl der geordneten Partitionen α von r ist die Klassenzahl der Gruppe S_r (Zahl der Konjugationsklassen = Zykeltypen der Gruppe S_r). Die Zahl der Klassen irreduzibler Darstellungen einer endlichen Gruppe ist immer (kleiner) gleich der Klassenzahl der Gruppe G (siehe unten). Somit durchlaufen die σ_α bereits alle Klassen irreduzibler Darstellungen von S_r .

[Es gibt höchstens so viele Klassen irreduzibler Darstellungen π wie Konjugationsklassen, denn für endlich dimensionale komplexe Darstellungen endlicher Gruppen G ist $\chi_\pi(g) = \text{Tr}(\pi(g))$ eine konjugationsinvariante Funktion auf G für die gilt

Orthogonalitätsrelation: $\int_G \chi_\pi(g) \overline{\chi_{\pi'}} dg = \int_G \chi_{\pi' \otimes \pi^*}(g) dg = \dim \text{Hom}_G(\pi, \pi')$.
Hierbei sei $\int_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G}$.

Die vollständige Reduzibilität von endlich dimensionalen komplexen Darstellungen einer endlichen Gruppe G – also das Zerfallen in eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen – zeigt man mit Hilfe von G -invarianten definiten Bilinearformen. Diese verschafft man sich durch eine Mittelung über G .

Konstruktion von σ_α : Sei α^* die zu α duale Partition (siehe Paragraph 3.4). Wir betrachten die induzierte Darstellung

$$I(\alpha) = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(hg) = \varepsilon_{G_{\alpha^*}}(h)f(g) \text{ für alle } h \in G_{\alpha^*}\} .$$

Auf dem \mathbb{C} -Vektorraum $I(\alpha)$ operiert die Gruppe durch Rechtstranslation¹. Hierbei sei für $\alpha^* = (k_1, \dots, k_N)$

$$\varepsilon_{G_{\alpha^*}} = \varepsilon_{k_1} \times \dots \times \varepsilon_{k_N} : S_{k_1} \times \dots \times S_{k_N} \rightarrow \{\pm 1\} .$$

Fakt (kombinatorischer Hilfssatz [10] Seite 98 unten): Sei $\beta \leq \alpha$ und $G_{\alpha^*} s G_\beta$ eine Doppelnebenklasse in S_r . Dann ist mit Ausnahme einer einzigen Doppelnebenklasse $G_{\alpha^*} s_\alpha G_\alpha$ (insbesondere also im Fall $\beta < \alpha$) die Einschränkung des Charakters $\varepsilon_{G_{\alpha^*}}$ auf die Untergruppe $G_{\alpha^*} \cap s G_\beta s^{-1} \subseteq G_{\alpha^*}$ nichttrivial. Dagegen gilt $G_\alpha \cap s G_{\alpha^*} s^{-1} = \{1\}$ im Fall $s = s_\alpha$.

Daraus folgt sofort

$$\dim \text{Hom}_{G_\beta}(1, I(\alpha)) = \delta_{\beta, \alpha}$$

für alle $\beta \leq \alpha$. Insbesondere ist der Fixraum $I(\alpha)^{G_\alpha} \subseteq I(\alpha)$ von G_α ein eindimensionaler Unterraum.

Definition: $\sigma_\alpha := \text{G-Aufspann in } I(\alpha) \text{ von } I(\alpha)^{G_\alpha}$.

σ_α ist irreduzibel! Und nach Konstruktion erfüllt σ_α die Eigenschaften a) und b) des Satzes von Frobenius.

Beweis: $\sigma_\alpha = \pi_1 \oplus \pi_2$ impliziert aus Dimensionsgründen $\pi_i^{G_\alpha} = 0$ obdA für $i = 2$. Da π_i von $(\pi_i)^{G_\alpha}$ erzeugt wird, folgt dann $\pi_2 = 0$.

¹Eine irreduzible Darstellung π kommt genau dann in $I(\alpha)$ als Summand vor, wenn gilt $\text{Hom}_{G_{\alpha^*}}(\pi, \varepsilon_{G_{\alpha^*}}) \neq 0$. Beachte, $f \mapsto f(1)$ ist nichttrivial auf π .

3.9 *Der Satz von Weyl

Behauptung: Mit den Bezeichnungen von Lemma 25 sei

$$W(\alpha) \boxtimes \pi \subseteq W(\alpha) \boxtimes \sigma_\alpha$$

ein $Gl(V) \times S_r$ -Unterraum. Dann gilt $\pi \cong \sigma_\alpha$.

Beweis: Sei $v_\alpha \in W(\alpha) \boxtimes \pi$ Höchstgewichtsvektor. Dann gibt es eine Permutation $\sigma \in S_r$ und eine Konstante $c \neq 0$ mit

$$\begin{aligned} \sigma(v_\alpha) &= c \cdot (e_1 \otimes \cdots \otimes e_1) \otimes (e_2 \otimes \cdots \otimes e_2) \otimes \cdots \\ &\quad + \text{anders angeordnete Terme} . \end{aligned}$$

Hierbei tritt e_i genau α_i mal auf. Somit hat

$$\sigma(v_\alpha) \in W(\alpha) \boxtimes \pi$$

unter der $Gl(V) \times G_\alpha$ -linearen Symmetrisierung

$$V^{\otimes r} \rightarrow S^{\alpha_1}(V) \otimes S^{\alpha_2}(V) \otimes \cdots \otimes S^{\alpha_r}(V)$$

ein nichttriviales Bild! Hierbei operiert $G_\alpha \subseteq S_r$ auf der rechten Seite trivial. Es folgt $\text{Hom}_{G_\alpha}(\pi, 1) \neq 0$. Ist $\pi = \sigma_\beta$ irreduzibel, folgt $\text{dim Hom}_{G_\alpha}(1, \pi) = \text{dim Hom}_{G_\alpha}(\pi, 1) \neq 0$ aus der vollständigen Reduzibilität. Wegen Satz 3 Teil b) gilt also

$$\beta \geq \alpha .$$

Wegen Satz 3 Teil a) ist dann $V(\alpha)$ ein Summand von $S^{\beta_1}(V) \otimes \cdots \otimes S^{\beta_r}(V)$. Aus Lemma 23 folgt, zumindestens im Fall $N = \text{dim}(V) \geq r$,

$$\alpha \geq \beta .$$

Somit $\alpha = \beta$.

Verschärfung: Das Bild von $(e_1 \otimes \cdots \otimes e_1) \otimes (e_2 \otimes \cdots \otimes e_2) \otimes \cdots$ unter der Projektion $V^{\otimes r} \rightarrow W(\alpha) \boxtimes \sigma_\alpha$ ist ein S_r -‘zyklischer’ Vektor. Also ist σ_α multiplizitätenfrei. Es folgt

$$\sigma_\alpha \cong \pi .$$

Damit ist den Satz von Weyl unter der Annahme $\text{dim}(V) \geq r$ gezeigt. Der allgemeine Fall folgt daraus aber sofort mit der Technik der Dimensionsreduktion (siehe §3.10). Man erhält daher ganz allgemein

Satz 4. (Weyl) $V^{\otimes r} = \bigoplus_{\alpha} W(\alpha) \boxtimes \sigma_{\alpha}$.

Die Summe durchläuft alle $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ mit $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_r \geq 0$ und $\sum \alpha_{\nu} = r$, d.h. alle irreduziblen Darstellungen σ_{α} der symmetrischen Gruppe S_r . Per Definition sei hierbei $W(\alpha) = 0$, falls α kein dominantes Gewicht von $Gl(V)$ definiert, d.h. falls gilt $\alpha_{N+1} > 0$. Daher die

Konvention: Eine irreduzible Darstellung zum ‘Höchstgewicht’ $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ mit $\alpha_i > 0$ für $i > N$ sei per Definition die Nulldarstellung.

Bemerkung zu σ_{α} : Nach Paragraph 3.6 besitzt im Fall $N = \dim(V) \geq r$ jedes Höchstgewicht α (im Satz von Weyl) ein duales Höchstgewicht α^* . Die Konstruktion von Paragraph 3.6 zeigt ausserdem für $\pi = \sigma_{\alpha}$

$$\boxed{Hom_{G_{\alpha^*}}(\pi, \varepsilon_{\alpha^*}) \neq 0}.$$

Hierbei ist $\varepsilon_{G_{\alpha^*}}$ das Produkt der Signumcharaktere.

Tatsächlich ist $\pi = \sigma_{\alpha}$ bis auf Isomorphie die einzigste irreduzible Darstellung von S_r mit dieser Eigenschaft und der zusätzlichen Eigenschaft

$$\boxed{Hom_{G_{\alpha}}(1, \pi) \neq 0}.$$

Dies folgt aus der Definition von σ_{α} in §3.8.

Korollar 6. Es gilt $\sigma_{\alpha^*} = \sigma_{\alpha} \otimes \varepsilon_G$ für den Signumcharakter ε_G von S_r .

Beispiel: Die eindimensionalen Darstellungen der Gruppe S_r liefern die ausgezeichneten Summanden $S^r(V) \boxtimes 1$ beziehungsweise $\Lambda^r(V) \boxtimes \varepsilon$.

Bemerkung: Sei $\dim(V) > N$. Dann ist α das kleinste in $S^{\alpha_1}(V) \otimes \dots \otimes S^{\alpha_N}(V)$ vorkommene Höchstgewicht, und es hat Multiplizität 1. Analog ist α das grösste in $\Lambda^{\alpha_1}(V) \otimes \dots \otimes \Lambda^{\alpha_N}(V)$ vorkommende Höchstgewicht (wieder mit Multiplizität 1). Also ist $V(\alpha)$ der einzige gemeinsame Konstituent von $S^{\alpha_1}(V) \otimes \dots \otimes S^{\alpha_N}(V)$ und $\Lambda^{\alpha_1}(V) \otimes \dots \otimes \Lambda^{\alpha_N}(V)$.

Bemerkung: Die Multiplizität $m(\gamma; \alpha, \beta)$ von $V(\gamma)$ in $V(\alpha) \otimes V(\beta)$ ist gleich der Multiplizität der Darstellung $\sigma_{\alpha} \boxtimes \sigma_{\beta}$ in $\sigma_{\gamma} | S_{deg(\alpha)} \times S_{deg(\beta)}$ wegen dem Satz von Weyl. Aus Korollar 6 folgt für $N \gg 0$

Korollar 7. $m(\gamma; \alpha, \beta) = m(\gamma^*, \alpha^*, \beta^*)$.

Aufgabe: Gebe eine kombinatorische Beschreibung für $m(\gamma; \alpha, \beta)$.

3.10 *Dimensionswechsel

Sei $i : V' \hookrightarrow V$ der von den ersten $M < N$ Basisvektoren e_1, \dots, e_M aufgespannte Unterraum. Sei $\pi : V \rightarrow V'$ die Projektion

$$\pi(x^1, \dots, x^N) = (x^1, \dots, x^M).$$

Die Abbildungen i und π sind P_M -linear für

$$P_M = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\} \supseteq Q_M = \left\{ \begin{pmatrix} E & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \right\}$$

(Blockdreiecksmatrizen in $Gl(V)$ mit $A \in Gl(V')$). Die Gruppe P_M operiert auf V' über der Projektion $P_M \rightarrow Gl(V') \cong P_M/Q_M$. Die Restriktion

$$res = T(i)^* : T^k(V^*) \rightarrow T^k((V')^*)$$

auf den Unterraum V' ist P_M -linear. Wegen $\pi \circ i = id_{V'}$ gilt $T(i)^* \circ T(\pi)^* = id$. Insbesondere ist $T(i)^*$ surjektiv und $T(\pi)^*$ ist injektiv.

Lemma 26. Sei $M < N$ und $W(\alpha)$ eine Höchstgewichtdarstellung von $Gl(V)$. Dann gilt $W(\alpha)^{Q_M} = 0$, ausser im Fall $\alpha = (\alpha_M, 0, \dots, 0)$ mit $\alpha_M = (\alpha_1, \dots, \alpha_M)$. In diesem Fall ist $W^{Q_M} = 0$ eine irreduzible Darstellung der Gruppe $Gl(V')$ zum Höchstgewicht α_M bezüglich der Gruppe $Gl(V') \subseteq P_M \subseteq Gl(V)$.

Beweis: Offensichtlich $(W(\alpha)^{Q_M})^{N'} = (W(\alpha)^{N'})^{Gl(V')} \subseteq (W(\alpha)^{N'}) = \mathbb{R} \cdot w_\alpha$. Somit ist $(W(\alpha)^{Q_M})^{N'} = 0$ und $W(\alpha)^{Q_M} = 0$, falls $(\alpha_{M+1}, \dots, \alpha_N) \neq 0$; und $(W(\alpha)^{Q_M})^{N'} = \mathbb{R} \cdot w_\alpha$ und damit $W(\alpha)^{Q_M} \cong W(\alpha_M)$, falls $\alpha = (\alpha_M, 0, \dots, 0)$.

Lemma 27. Es gibt einen Isomorphismus $T(V^*)^{Q_M} \cong T((V')^*)$

$$\begin{array}{ccc}
 T^k(V^*)^{Q_M} & \xrightarrow[T(\pi)^*]{T(i)^*} & T^k((V')^*) \\
 \downarrow & \nearrow res & \\
 T^k(V^*) & &
 \end{array}$$

Beweis: Das Bild von $T(\pi)^*$ besteht aus den Tensoren, welche nur von $v_i \in V \bmod \text{Kern}(\pi)$ abhängen, somit Q_M -invariant sind. Zu zeigen ist, dass dies genau die Q_M -invarianten Tensoren sind. Dazu sei obdA $M = N - 1$, d.h. $\text{Kern}(\pi) = \mathbb{R} \cdot v_N$. Sei T Q_M -invariant. Wir schreiben $v_i = v'_i + \lambda_i \cdot v_N$ und entwickeln $T(v_1, \dots, v_k) = \sum_i T_i(\lambda_1, \dots, \lambda_k; v'_1, \dots, v'_k)$. Die T_i sind Polynome vom Grad i in $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Ersetzt man e_N durch $\lambda \cdot e_N$ (eine Substitution in Q_M), reskaliert sich T_i zu $\lambda^i T_i$. Die Q_M -Invarianz impliziert also $T_i = 0$ für $i > 0$. Somit hängt T nur von $\pi(v_1), \dots, \pi(v_k)$ ab.

Beispiel: Für $V = \mathbb{R}^N$ auf $V' = \mathbb{R}^{N-1}$ gilt $\mathcal{P}^k(V) \cong \bigoplus_{r \leq k} \mathcal{P}^r(V')$. Daraus folgt $\dim(S^k(V^*)) = \binom{N+k-1}{k}$ durch Induktion in Analogie zu $\dim(\Lambda^k(V^*)) = \binom{N}{k}$.

3.11 *Tensorideale

In der Tensoralgebra $T(V)$ hat man die beidseitigen Ideale

$$T_{\geq s}(V) = \bigoplus_{\alpha, \alpha_s > 0} W(\alpha) \boxtimes \sigma_\alpha,$$

denn nach Lemma 19 enthält das Tensorprodukt der Darstellungen $W(\beta) \otimes W(\alpha)$ nur irreduzible Summanden mit Höchstgewichten γ der Gestalt $\gamma = \alpha + \chi$, wobei $\chi = (n_1, \dots, n_N)$ eines der Gewichte von $W(\beta)$ ist. Wegen $n_i \geq 0$ folgt die Idealeigenschaft.

Sei $T_{\leq s}(V)$ die direkte Summe aller $W(\alpha) \boxtimes \sigma_\alpha$ für alle Höchstgewichte α mit $\alpha_{s+1} = \dots = \alpha_N = 0$. Es gilt

$$T(V) = T_{\leq s}(V) \oplus T_{\geq s+1}(V).$$

Wir bemerken (hier ohne Beweis)

$$T_{\leq s}(V) \otimes T_{\leq t}(V) \subseteq T_{\leq s+t}(V).$$

In der Tat zeigt der Satz von Weyl zusammen mit Lemma 23 die Aussage $T^\alpha(V) \subseteq T_{\leq s}(V) \iff T^\alpha(V) \cap (S^\bullet(V))^{\otimes s} \neq 0$. Man benutzt dann Lemma 23.

$T_{\leq s}(V)$ kann als Vektorraum mit der Quotientenalgebra $T(V)/T_{\geq s+1}(V)$ identifiziert werden. Wir zeigen im nächsten Abschnitt, dass $T(V)/T_{\geq 2}(V)$ zur kommutativen Polynomalgebra auf V^* isomorph ist. Der Ring $T(V)/T_{\geq 3}(V)$ besitzt das beidseitige Ideal $I_0 = T_{\geq 2}(V)/T_{\geq 3}(V)$. Die Unterräume

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

für

$$I_\nu = \bigoplus_{\alpha_2 \geq \nu, \alpha_3 = 0} W(\alpha) \boxtimes \sigma_\alpha$$

definieren eine absteigende Kette von Idealen in $T(V)/T_{\geq 3}(V)$. Man sieht leicht

$$I_\nu \cdot I_\mu \subseteq I_{\nu+\mu}.$$

3.12 *Appendix (Kovariante Ableitungen)

Sei (M, g) eine metrisierte Mannigfaltigkeit. Der Levi-Civita Zusammenhang ∇ auf der Tensoralgebra $T(M)$ von M definiert eine Ableitung

$$\nabla : T^k(M) \rightarrow T(M) \otimes T^k(M) .$$

∇ induziert Derivationen $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = \nabla_X(T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \nabla_X(T_2)$ und vertauscht mit den Permutationen aus S_k , welche auf $T^k(M)$ operieren. D.h. für $\sigma \in S_k$ gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T^k(M) & \xrightarrow{\nabla} & T(M) \otimes T^k(M) \\ \sigma \downarrow & & \downarrow id_{T(M)} \times \sigma \\ T^k(M) & \xrightarrow{\nabla} & T(M) \otimes T^k(M) \end{array}$$

Nach dem Satz von Hermann Weyl zerfällt die Tensoralgebra

$$T^k(M) = \bigoplus_{deg(\alpha)=k} T^\alpha(M) \boxtimes \sigma_\alpha .$$

Die Komponenten $T^\alpha(M) = Hom_{S_k}(\sigma_\alpha, T^r(M))$ sind die isotypischen Komponenten der Operation von S_k .

Da ∇ mit S_k vertauscht, respektiert der Zusammenhang die Zerlegung und definiert Zusammenhänge

$$\boxed{\nabla^\alpha : T^\alpha(M) \rightarrow T(M) \otimes T^\alpha(M)} .$$

Es gilt $\nabla = \bigoplus_\alpha \nabla^\alpha$. Wir schreiben oft wieder $\nabla^\alpha = \nabla$. Die Ideale $T_{\geq r}(M)$ von $T(M)$ sowie die Ideale $I_\nu(M)$ von $T(M)/T_{\geq 3}(M)$ werden von ∇ respektiert.

Kapitel 4

Formale Normalkoordinaten

4.1 Vorbemerkungen

In diesem kurzen Kapitel werden für eine lokal gegebene Metrik ausgezeichnete Koordinatensystem betrachtet, in welchen die Metrik besonders einfache Gestalt besitzt. In der Tat handelt es sich dabei nur um infinitesimale Koordinatentransformationen, weshalb wir von formalen Koordinaten sprechen. Die Schlussweisen sind rein algebraisch und entsprechen dem ursprünglichen Ansatz von Riemann.

Im nächsten Kapitel werden wir auf eine unabhängige globale Weise die selben Koordinaten konstruieren mit Hilfe von Geodäten. Dass man zwei verschiedene Charakterisierung dieser sogenannten Normalkoordinaten besitzt, eine algebraische und eine geometrische, ist bemerkenswert.

4.2 Koordinatentransformationen

Wir betrachten eine formale Metrik $g(x)$ im Nullpunkt des Vektorraums \mathbb{R}^N , d.h. eine formale Taylorentwicklung

$$g(x) = g(0) + g^{(1)}(x) + \dots \in S^2(V) \otimes \bigoplus_{r=0}^{\infty} \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N),$$

deren r -ter Taylorkoeffizient $g^{(r)}(x)$ ein homogenes Polynom vom Grad r mit Werten in den symmetrischen $N \times N$ -Matrizen ist. Hierbei sei $V = T^* = (\mathbb{R}^N)^*$. Wir nehmen an $g(0)$ sei invertierbar, aber nicht notwendig definit.

Ein Koordinatensystem heisst formales Normalkoordinatensystem der formalen Metrik g um Null, wenn gilt

$$\boxed{\sum_{j=1}^N x^j g_{ji}(x) = x_i}.$$

Hierbei sei $x_i = \sum_{j=1}^N x^j g_{ji}(0)$. Äquivalent ist $\sum_j x^j g_{ji}^{(r)}(x) = 0$ für alle $r \geq 1$.

Satz 5. *Für jede Metrik gibt es ein formales¹ Normalkoordinatensystem. Dieses ist eindeutig bestimmt bis auf eine lineare Koordinatentransformation.*

Folgerung 1. *Bleibt $g(0)$ invertierbar, dann ist die Einschränkung von g auf einen linearen Teilraum eines Normalkoordinatensystems wieder ein Normalkoordinatensystem.*

Die im Zusatz formulierte Bedingung schränkt im Fall kleiner Dimensionen die Gestalt von $g(x)$ stark ein:

Der Fall $N = 1$: Normalkoordinatenbedingung $\iff g(x) = g(0)$.

Der Fall $N = 2$: Die Normalkoordinatenbedingung im Fall $g(0) = 1$ ist äquivalent zur Existenz einer formalen Funktion $\eta(x)$ (eine nicht notwendig konvergente Taylorreihe) mit

$$g(x) = 1 + \eta(x) \begin{pmatrix} (x_2)^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & (x_1)^2 \end{pmatrix}.$$

¹Für eine glatte Version benutze geodätische Normalkoordinaten. Siehe §5.6

Der Pullback von $g(x)$ auf eindimensionale resp. zweidimensionale lineare Teilräume hat daher die angegebene Gestalt.

Beispiel: Wir illustrieren den Einfluss der Metrik in Normalkoordinaten auf die Winkel. Sei etwa im Punkt $Q = (t, 0)$ auf der x -Achse $\xi = (u, v)$ ein Tangentialvektor.

Sei α der Winkel zur x -Achse bezüglich der Metrik $g_{(t,0)}$ und sei alternativ α_{st} der entsprechende euklidische Winkel für die Standardmetrik $g_{st} = 1$ im Punkt Q .

Dann gilt

$$\tan^2(\alpha) = \cos(\alpha)^{-2} - 1 = \frac{t^2 \cdot (u^2 + v^2 + \eta(Q)t^2v^2)}{(tu)^2} - 1 = (v/u)^2 \cdot (1 + \eta(Q)t^2)$$

modulo $O(t^3)$ und $\tan^2(\alpha_{st}) = (v/u)^2$. Also $\tan(\alpha) = \tan(\alpha_{st}) \cdot \sqrt{1 + \eta(Q) \cdot t^2}$ mod $O(t^3)$. Dies gibt für $\alpha_{st} \in (-\pi/2, \pi/2)$ und kleine t durch Taylorentwicklung des Tangens die asymptotische Winkelmodifikation

$$\boxed{\alpha = \alpha_{st} + \frac{1}{4} \cdot \sin(2\alpha_{st}) \cdot \eta(0) \cdot t^2 + O(t^3)}.$$

Der allgemeine Fall (findet sich so bei Riemann in kryptischer Form):

$$g(x) = g(0) + \eta_{ijkl}(x)(x^i dx^j - x^j dx^i) \overset{s}{\otimes} (x^k dx^l - x^l dx^k)$$

für η_{ijkl} alternierend in (ij) , (kl) und symmetrisch unter $(ik)(jl)$. Hierbei bezeichnen $dx^a \overset{s}{\otimes} dx^b = \frac{1}{2}(dx^a \otimes dx^b + dx^b \otimes dx^a)$ das symmetrische Tensorprodukt.

Für $N = 2$ bleibt im Prinzip nur der Koeffizient $\eta(x) = \eta_{1212}(x)$

$$g(x) = 1 + \eta(x, y) \cdot (xdy - ydx) \otimes (xdy - ydx).$$

4.3 Beweis von Satz 5

Wir fixieren $g(0)$. Sei $R^{r,2}(V) \subseteq S^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N)$ der Raum aller $g^{(r)}(x)$ mit $x^j g_{ji}^{(r)}(x) = 0$. Gegeben seien Normalkoordinaten der Ordnung $r - 1$ für $g(x)$

$$g^{(\nu)}(0) \in R^{\nu,2}(V) \quad , \quad \nu \leq r - 1 .$$

Behauptung: Es gibt einen lokalen Koordinatenwechsel $x = \varphi(\zeta)$ so, dass die neuen Koordinaten Normalkoordinaten der Ordnung r sind

$$g^{(\nu)}(0) \in R^{\nu,2}(V) \quad , \quad \nu \leq r .$$

Koordinatenwechsel: Wir betrachten $x = \varphi(\zeta)$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \zeta^N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P^1(\zeta) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P^N(\zeta) \end{pmatrix} .$$

$P^\nu(\zeta)$ seien homogene Polynome vom Grad $r + 1$ in $(\zeta^1, \dots, \zeta^N)$. Die Jacobimatrix $J = (J_{\nu\mu})$ ist

$$J = id + X \quad , \quad X = \left(\frac{\partial P^\nu}{\partial \zeta^\mu}(0) \right) .$$

Wegen $g(\varphi(\zeta)) \equiv g(\zeta)$ modulo $O(\zeta^{r+1})$ gilt $\varphi^*(g)(\zeta) \equiv (J'gJ)(\zeta)$ modulo $O(\zeta^{r+1})$. Also, da X homogen vom Grad r ist,

$$\begin{aligned} \varphi^*(g)(\zeta) &\equiv (1 + X)' \cdot \left[g(0) + \sum_{\nu \geq 1} g^{(\nu)}(0) \right] \cdot (1 + X) \\ &\equiv \sum_{\nu \geq 0} g^{(\nu)}(0) + (X'g(0) + g(0)X) \quad \text{mod } O(\zeta^{r+1}) . \end{aligned}$$

$g^{(r)}(0)$ kann also um Terme $D(\varphi)$ vom Grad r abgeändert werden der Gestalt

$$\left(X'g(0) + g(0)X \right)_{ij} = \sum_{\alpha} \left(g_{i\alpha}(0) \frac{\partial P^\alpha}{d\zeta^j} + g_{j\alpha}(0) \frac{\partial P^\alpha}{d\zeta^i} \right) .$$

Setzt man $P_i = g_{ij}(0)P^j$ nennt die neuen Koordinaten der Einfachheit halber wieder x anstelle von ζ , wird man auf folgende Abbildung geführt (Einsteinkonvention)

$$\begin{array}{ccc} V \otimes \mathcal{P}^{r+1}(\mathbb{R}^N) & \ni & e^\nu \otimes P_\nu(x) \\ \downarrow D & \curvearrowright M & \downarrow \\ S^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N) & \ni & e^\nu \otimes e^\mu \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} P_\nu(x) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} P_\mu(x) \right) \end{array}$$

Hierbei sei $e^\nu \in V$ die Standardbasis² des Dualraums V von \mathbb{R}^N . Umgekehrt hat man $M(e^\nu \otimes e^\mu \otimes g_{\nu\mu}(x)) = e^\nu \otimes x^\mu g_{\nu\mu}(x)$ mit $\boxed{R^{r,2}(V) = \text{Kern}(M)}$. Man zeigt leicht³

$$M \circ D - d \circ m = r \cdot \text{id}_{V \otimes \mathcal{P}^{r+1}},$$

für die totale Ableitung d

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}^{r+2}(\mathbb{R}^N) & \ni & P(x) \\ \downarrow d & \curvearrowright m & \downarrow \\ V \otimes \mathcal{P}^{r+1}(\mathbb{R}^N) & \ni & e^\nu \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} P(x) \end{array}$$

und die Abbildung $m(e^\nu \otimes P_\nu(x)) = x^\nu P_\nu(x)$. Es gilt $E = m \circ d = (r+2) \cdot \text{id}$ (Euleroperator), also $(d \circ m)^2 = (r+2) \cdot (d \circ m)$. Beachte auch $D \circ d = 2 \cdot \text{Hess}$.

Lemma 28. Für $r \geq 1$ ist D injektiv mit $S^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N) = \text{Bild}(D) \oplus R^{r,2}(V)$.

Existenz und Eindeutigkeit des gesuchten formalen Koordinatenwechsels, also Satz 5, folgen daraus unmittelbar.

Injektivität von D . Für $\varphi = e^\nu P_\nu \in \text{Kern}(D)$ gilt $\varphi = dF$ für $F = -\frac{1}{r} x^\mu P_\mu$. Somit ist die Hessematrix $\text{Hess}(F) = \frac{1}{2} D(\varphi) = 0$. Also $\partial_\nu F = \text{const}$, und aus Gradgründen $\text{const} = 0$. Somit $\partial_\nu F = 0$, und analog folgt $F = 0$. Dies zeigt $\varphi = dF = 0$.

Surjektivität von M . $(d \circ m + r)(d \circ m - 2r - 2) = -2r(r+1) \cdot \text{id}$ wegen $(d \circ m)^2 = (r+2) \cdot (d \circ m)$ zeugt, dass $M \circ D = d \circ m + r \cdot \text{id}$ invertierbar ist.

²Mit der Identifikation $V = \mathcal{P}^1(\mathbb{R}^N)$ entsprechen die e^ν den Koordinatenfunktionen x^ν . Alternativ $e^\nu = dx^\nu$ bei der Identifikation $V = T^*$.

³ $M \circ D(e^\nu P_\nu) = e^\nu (x^\mu \partial_\mu P_\nu + x^\mu \partial_\nu P_\mu) = (r+1)e^\nu P_\nu + e^\nu x^\mu \partial_\nu P_\mu = r e^\nu P_\nu + e^\nu \partial_\nu (x^\mu P_\mu)$

4.4 *Der Raum $R^{r,2}(V)$

Die Gruppe $Gl(V)$ operiert auf Tensoren $\eta \in T^i(\mathbb{R}^N)$ vermöge $(\rho(g)\eta)(x) = \eta(g'x)$. Beachte $\rho(g) = (g^*)^{-1}$, wobei g^* den Pullback bezeichne. Die Darstellung ρ bildet die Unterräume der Tensoren mit polynomialen Koeffizienten auf sich ab, und erhält dabei den homogenen Grad.

Die Abbildungen d und m sowie θ und S (siehe Abschnitt §4.3) sind $Gl(V)$ -linear. Aus $m \circ d = (r+2) \cdot id$ folgt für $D^{r,1}(V) := Kern(m)$

Lemma 29. Für alle $r \geq 0$ ist

$$V \otimes \mathcal{P}^{r+1}(\mathbb{R}^N) = d\mathcal{P}^{r+2}(\mathbb{R}^N) \oplus D^{r,1}(V)$$

eine Zerlegung in irreduzible Darstellungen.

Beweis: $\mathcal{P}^{r+2}(\mathbb{R}^N)$, und damit auch $d\mathcal{P}^{r+2}(\mathbb{R}^N)$, ist irreduzibel vom Höchstgewicht $(r+2, 0, \dots, 0)$ (Korollar 5). Für $N > 1$ und $r \geq 1$ ist $Kern(m)$ nicht Null, denn $m(e^\mu(x^\nu)^r - e^\nu x^\mu(x^\nu)^{r-1}) = 0$. Nach Lemma 19 hat $V \otimes \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N)$ nur die Höchstgewichte $(r+1, 0, \dots, 0)$ und $(r, 1, 0, \dots, 0)$ mit Multiplizität ≤ 1 . Für $N > 1$ ist daher $Kern(m) = D^{r,1}(V)$ irreduzibel vom Höchstgewicht $(r, 1, 0, \dots, 0)$.

$S^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N)$ enthält die Darstellung $D(V \otimes \mathcal{P}^{r+1})$ mit den irreduziblen Komponenten vom Höchstgewicht $(r+2, 0, \dots, 0)$ und $(r+1, 1, 0, \dots, 0)$ (Injektivität von D in Lemma 28). Nach Lemma 19 gibt es höchstens zwei weitere irreduzible Darstellungen, jeweils vom Höchstgewicht $(r, 2, 0, \dots)$ resp. $(r, 1, 1, 0, \dots)$ mit Multiplizität ≤ 1 . Nach Lemma 23 scheidet letztere aus. Daraus folgen

Korollar 8. $R^{r,2}(V) = Kern(M)$ ist irreduzibel vom Höchstgewicht $(r, 2, 0, \dots, 0)$.

Lemma 30. Für $r \geq 2$ hat man folgende Zerlegung in irreduzible Faktoren

$$\boxed{S^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N) = Hesse(\mathcal{P}^{r+2}(\mathbb{R}^N)) \oplus D(D^{r+1,1}(V)) \oplus R^{r,2}(V)}$$

mit den Höchstgewichten $(r+2, 0, \dots, 0)$ resp. $(r+1, 1, 0, \dots, 0)$ resp. $(r, 2, 0, \dots, 0)$.

Also $dim(R^{r,2}(V)) = \binom{N}{2} \binom{N+r-1}{r} - N \binom{N+r}{r+1} = \frac{1}{2}(r-1)N \binom{N+r-1}{r+1} > 0$ für $r \geq 2$.⁴ Beachte auch $R^{r,2}(V) = 0$ für $r = 1$.

⁴Insbesondere $dim(R^{2,2}(V)) = \frac{N^2(N^2-1)}{12}$.

Wir bemerken, dass man $\Lambda^i(V) \otimes \mathcal{P}^r$ mit den polynomialen i -Formen Ω_r^i vom homogenen Grad r auf \mathbb{R}^N identifizieren kann. Für die Cartanableitung $d : \Omega_{r+1}^{i-1} \rightarrow \Omega_r^i$ gilt $d \circ d = 0$. Kern und Bild definieren nichttriviale $Gl(V)$ -invariante Unterräume von Ω_r^i (für alle $1 \leq i \leq N-1$ im Fall $r \geq 1$). Alle Gewichte von $\Lambda^i(V)$ haben Dimension 1. Nach Lemma 19 zerfällt daher $\Lambda^i(V) \otimes \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N)$ mit Multiplizitäten ≤ 1 und den Höchstgewichten $(r+1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ und $(r, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (vom Grad $r+i$). Insbesondere also

Lemma 31. $\Lambda^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(\mathbb{R}^N) \cong D^{r+1,1}(V) \oplus D^{r,1,1}(V)$ mit Höchstgewichten $(r+1, 1, 0, \dots)$ resp. $(r, 1, 1, 0, \dots)$ der Multiplizität 1.

Lemma 32. Für $r \geq 2$ definiert die Alternierung $A = Alt_{123}$ eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow R^{r,2}(V) \oplus X \longrightarrow \Lambda^2(V) \otimes V \otimes S^{r-1}(V) \xrightarrow{A} \Lambda^3(V) \otimes S^{r-1}(V) \longrightarrow 0$$

mit $X = \Lambda^2(V) \otimes S^r(V)$. Also

$$R^{r,2}(V) = Kern(Alt_{123}) \cap Kern(Sym_{34\dots r+2}) .$$

Beweis: $V \otimes S^{r-1}(V) \cong S^r(V) \oplus D^{r-1,1}(V)$. Und $X = \Lambda^2(V) \otimes S^r(V) \cong D^{r+1,1}(V) \oplus D^{r,1,1}(V)$ sowie $\Lambda^2(V) \otimes D^{r-1,1}(V) \cong R^{r,2}(V) \oplus D^{r,1,1}(V) \oplus mD^{r-1,1,1,1}(V)$ mit $m \leq 1$ wegen Lemma 19 ($i=2$ ist eine Sprungstelle). Andererseits ist $\Lambda^3(V) \otimes S^{r-1}(V) \cong D^{r,1,1}(V) \oplus nD^{r-1,1,1,1}(V)$ mit $n \leq 1$. Es genügt zu zeigen $n \neq 0$ im Fall $N \geq 4, r \geq 2$ bzw $N=4, r \geq 2$. Im Fall $N=4$ ist aber $\Lambda^3(V) \cong V^* \otimes det$. Für $r=2$ ist die Aussage klar: $\Lambda^3(V) \otimes V \rightarrow D^{1,1,1,1}(V)$ ist nicht trivial. Man zeigt nun leicht $n=1$ durch Tensorieren mit $S^{r-2}(V)$.

Folgerung 2. Es gilt $\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \cong R^{2,2} \oplus D^{2,1,1}(V) \oplus \Lambda^4(V)$.

Bemerkung: Die zu $g(x)$ inverse formale Metrik $g^{-1}(x)$ ist definiert als formale Potenzreihe. Beachte $\sum_j x_j g^{ji}(0) = x^i$ wegen $\sum_j g_{ij}(0) g^{jk}(0) = \delta_{ik}$. Trivial ist folgendes

Lemma 33. Für eine formale Metrik $g(x)$ sind äquivalent: 1) $g(x) = (g_{ij}(x))$ erfüllt die Relationen $\sum_j x^j g_{ji}(x) = x_i$ und 2) Die inverse Matrix $g^{-1}(x) = (g^{ij}(x))$ erfüllt die dualen Relationen

$$\sum_j x_j g^{ji}(x) = x^i = \sum_j x_j g^{ij}(0) .$$

4.5 *Appendix

Sei $\dim(V) \geq 3$. Ein Spezialfall von Lemma 32 ist die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow R^{2,2}(V) \rightarrow \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \xrightarrow{B_{123}} \Lambda^3(V) \otimes V \rightarrow 0.$$

Fakt 1: Diese Sequenz bleibt nach Tensorieren mit $S^r(V)$ exakt.

Somit ist $R^{2,2}(V) \otimes S^r(V)$ der Kern des ersten Bianchioperators B_{123}

$$\boxed{B_{123} : \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \otimes S^r(V) \rightarrow \Lambda^3(V) \otimes V \otimes S^r(V)}.$$

Fakt 2: Für $\Lambda^3(V) \otimes V \otimes S^r(V) \cong \Lambda^3 \otimes [S^{r+1} \oplus D^{r,1}]$ gilt nach Lemma 29 und Lemma 19, modulo dem Tensorideal $T_{\geq 4}(V)$

$$\Lambda^3 \otimes V \otimes S^r \cong D^{r+1,2,1} \oplus D^{r+2,1,1} \oplus \dots$$

D.h. wir ignorieren alle Beiträge mit Höchstgewichten α , für die gilt $\alpha_4 > 0!$

Fakt 3: Beachte $\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \otimes S^r(V) \cong \Lambda^2(V) \otimes [D^{r+1,1} \oplus D^{r,1,1}]$. Modulo dem Ideal $T_{\geq 4}(V)$ gilt wegen Lemma 19

$$\Lambda^2 \otimes D^{r+1,1} \cong R^{r+2,2} \oplus D^{r+1,2,1} \oplus D^{r+2,1,1} \oplus \dots$$

$$\Lambda^2 \otimes D^{r,1,1} \cong D^{r+1,2,1} \oplus D^{r,2,2} \oplus \dots$$

Fakt 4: $R^{2,2}(V) \otimes S^r(V) \subseteq S^2(V) \otimes S^2(V) \otimes S^r(V)$ enthält nur Höchstgewichte α mit $\alpha_4 = 0$ (Lemma 23). Aus Fakt 1 bis 4 folgt

Korollar 9. $R^{2,2}(V) \otimes S^r(V) \cong R^{r+2,2} \oplus D^{r+1,2,1} \oplus D^{r,2,2}$.

Der letzte Term ist per Definition Null im Fall $r = 1$.

Wir betrachten nun den zweiten Bianchioperator B_{345}

$$\boxed{B_{345} : \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \otimes S^r(V) \rightarrow \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^3(V) \otimes S^{r-1}(V)}$$

Fakt 5: $\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^3(V) \otimes S^{r-1}(V) \cong \Lambda^3(V) \otimes [D^{r,1} \oplus D^{r-1,1,1}]$ ist nach Lemma 19 modulo dem Ideal $T_{\geq 4}(V)$ isomorph zu

$$D^{r+1,2,1} \oplus D^{r,2,2} \oplus \dots$$

Fakt 6: Die Abbildung $Alt_{345} : \Lambda^2 \otimes \Lambda^2(V) \otimes S^r(V) \rightarrow \Lambda^2 \otimes \Lambda^3(V) \otimes S^{r-1}(V)$ ist surjektiv modulo dem Ideal $T_{\geq 4}(V)$ der Tensoralgebra. Dazu genügt, dass dies vor dem Tensorieren mit dem linken Faktor $\Lambda^2(V)$ richtig ist für $Alt_{123} : D^{r+1,1} \oplus D^{r,1,1} = \Lambda^2(V) \otimes S^r(V) \rightarrow \Lambda^3(V) \otimes S^{r-1}(V) = D^{r,1,1} \oplus D^{r,1,1,1}$ richtig ist. Dies wiederum ist klar, da es sich bei Alt_{123} nicht um die Nullabbildung handelt! Also ist $D^{r+1,1}$ der Kern. Da Alt_{345} bis auf einen Faktor die Abbildung B_{345} induziert, gilt

$$Kern(B_{345}) = \Lambda^2 \otimes D^{r+1,1}.$$

Fakt 7: B_{123} ist nicht identisch Null auf $D^{r+1,2,1} \subseteq \Lambda^2 \otimes D^{r+1,1}$. Daher folgt aus Fakt 3 und Korollar 9

Der zweite Bianchioperator

$$B_{345} : \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \otimes S^r(V) \rightarrow \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^3(V) \otimes S^{r-1}(V)$$

hat eingeschränkt auf $R^{2,2}(V) \otimes S^r(V)$ nach Fakt 5 und 6 den Kern $R^{r+2,2}(V)$.

Korollar 10. $\boxed{Kern(B_{123}) \cap Kern(B_{345}) \cong R^{r+2,2}(V)}$.

Beweis von Fakt 7: Der Raum Ω_r^i von allen alternierenden i -Formen auf \mathbb{R}^N mit polynomialen Koeffizienten vom homogenen Grad r ist als $Gl(V)$ -Modul isomorph zu $\Omega_r^i \cong \Lambda^i(V) \otimes S^r(V)$, zerfällt also in die zwei irreduziblen Teilräume

$$\Omega_r^i = d\Omega_{r+1}^{i-1} \oplus Kern(d)$$

vom Typ $D^{r+1,1,\dots,1}$ resp. $D^{r,1,1,\dots,1}$ mit i resp. $i + 1$ Einträgen. In diesem Sinn berechnen wir die Abbildung von Fakt 7

$$B_{123} : \Omega_0^2 \otimes d\Omega_{r+1}^1 \hookrightarrow \Omega_0^2 \otimes \Omega_r^2 \rightarrow \Omega_0^3 \otimes \Omega_r^1.$$

Aus $B_{123}(dx^1 \wedge dx^2 \otimes d(x^3)^{r+1} dx^1) = B_{123}(dx^1 \wedge dx^2 \otimes (r+1)(x^3)^r dx^3 \wedge dx^1) = \frac{6(r+1)}{2} \cdot dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \otimes (x^3)^r dx^1 \neq 0$ folgt Fakt 7. Beachte $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^1 \otimes dx^3$ verschwindet.

Kapitel 5

Riemannsche Geometrie

5.1 Einige Konventionen

Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind in diesem Kapitel für uns stillschweigend, wenn nicht anders formuliert, zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Glatt oder differenzierbar wird dabei immer im C^∞ -Sinn verstanden. Die Metrik im Punkt P auf dem Tangentialraum sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ mit $\|X\|_P^2 = \langle X, X \rangle_P$.

Im nachfolgenden Kapitel sind wir an lokalen Eigenschaften von Riemannschen Mannigfaltigkeiten interessiert. Einige der Konzepte – etwa die Länge einer Kurve – sind nur für Riemannsche Metriken definiert. Da einige Rechnungen auch im Fall indefiniter Metriken sinnvoll sind, benutzen wir folgende Konventionen.

Wir fixieren eine Standardmetrik g_{st} auf dem \mathbb{R}^N und bezeichnen Punkte mit

$$x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^N .$$

Ist die Standardmetrik in diesen Koordinaten durch die Matrix g_{ij} gegeben, dann setzen wir

$$x_i = \sum_j g_{ij} x^j .$$

Mit diesen dualen Koordinaten gilt $\|x\|_{st}^2 = g(x, x)_{st} = \sum_i x_i x^i$. Im definiten Fall nehmen wir obdA immer an $g_{ij} = \delta_{ij}$ sei die Euklidische Standardmetrik. Dann ist natürlich $x_i = x^i$ für alle i .

5.2 Kurvenlänge

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, also g definit. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ist eine glatte Abbildung mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$. Dann ist die Länge

$$\mathbf{L}(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}\| dt$$

definiert. Ist $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s(t))$ eine Reparametrisierung der Kurve mit der Eigenschaft $\frac{ds}{dt} \geq 0$, dann gilt $\mathbf{L}(\tilde{\gamma}) = \mathbf{L}(\gamma)$ (Substitutionsformel). Für stückweise glatte Kurven ist die Länge auf die offensichtliche Weise erklärt.

Beispiel: Ist (M, g) der Euklidische Raum mit Standardmetrik und γ eine Gerade, so ist $\mathbf{L}(\gamma)$ gerade die übliche Euklidische Länge.

Für zusammenhängendes M ist

$$d(x, y) = \inf_{\gamma} \mathbf{L}(\gamma)$$

definiert als das Infimum über alle stückweise glatten ¹ Kurven γ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$. Wird das Infimum $\mathbf{L}(\gamma) = d(x, y)$ von einer Kurve γ tatsächlich angenommen, heisst γ Minimalkurve. Ziemlich offensichtlich gilt nun

Lemma 34. *Die Funktion $d(x, y)$ definiert eine Metrik auf (M, g) .*

Bemerkung: Sei γ eine Kurve in M . Ist $f : M \rightarrow N$ eine Einbettung mit $g = f^*(g_N)$. Dann gilt für die Länge der Kurve $f \circ \gamma$ in N

$$\mathbf{L}(f \circ \gamma) = \mathbf{L}(\gamma) .$$

Ist insbesondere (N, g_N) der euklidische Raum mit der Standardmetrik, ist die Länge $\mathbf{L}(\gamma)$ berechnet in M also die normale euklidische Länge der Kurve γ - aufgefasst als Kurve im euklidischen Raum.

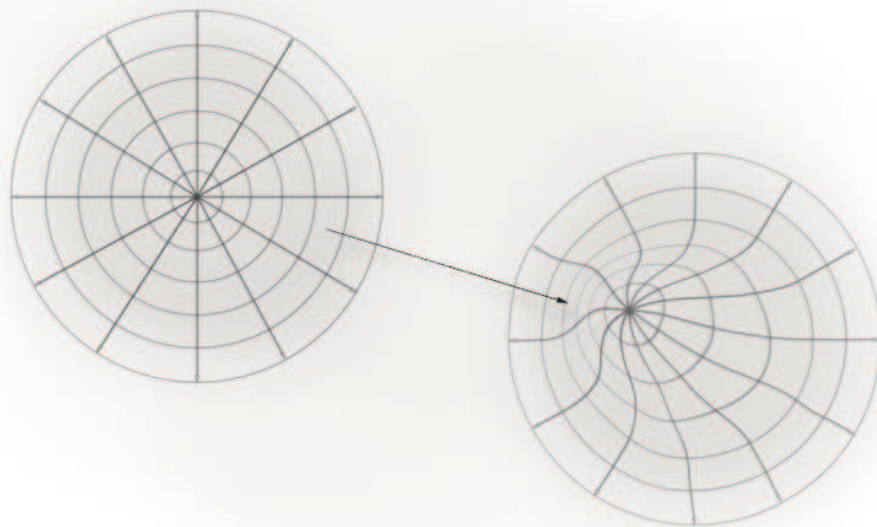
¹Es genügen glatte Kurven. Betrachte $\gamma^\varepsilon(t) = \phi(\varepsilon^{-1}t)\gamma_1(t) + (1 - \phi(\varepsilon^{-1}t))\gamma_2(t)$ für glattes reelles ϕ mit $\phi(t) = 1$ für $t < -t_1$ und $\phi(t) = 0$ für $t > t_1$ um im Punkt $t = 0$ zwei glatte Kurven $\gamma_i(t)$ glatt zusammenzufügen. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\gamma^\varepsilon) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

Bemerkung: $\frac{1}{2}\mathbf{L}(\gamma)^2 \leq (b - a) \cdot \mathbf{E}(\gamma)$ (Schwarzungleichung) für die Energie

$$\mathbf{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_b^a \|\dot{\gamma}\|^2 dt$$

(\mathbf{E} ist global wohldefiniert, aber im Gegensatz zu \mathbf{L} abhängig von der Parametrisierung von γ !).

Exponentialabbildung: (siehe Korollar 11)



5.3 Parallel Transport

Sei ∇ ein Zusammenhang auf M und seien X, Y ein Vektorfelder auf M . Man nennt X parallel entlang Y , wenn gilt $\nabla_Y X = 0$. Man nennt X parallel² entlang einer glatten Kurve γ , wenn gilt

$$\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0 .$$

Paralleltransport: Betrachte die Einschränkungen $X^k(t) := X^k(\gamma(t))$ der Komponenten X^k des Vektorfelds auf die Kurve γ . Diese sind auch global definiert, da der Pullback $\gamma^*(TM)$ als Vektorbündel auf $[0, 1]$ global trivialisiert werden kann (Lemma 11).

Wegen der Kettenregel und der linearen Unabhängigkeit der Felder ∂_j ist die Parallelität von X entlang γ daher gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\dot{X}^k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) \cdot X^j(t) = 0 .$$

Zu gegebener Kurve γ und gegebenem Anfangswert

$$X(0) \in T_P(M) \quad , \quad P = \gamma(0)$$

hat dieses lineare Differentialgleichungssystem eine eindeutige Lösung $X(t)$ im Intervall $[0, 1]$. Man nennt den eindeutig durch $(\nabla, \gamma, X(0))$ bestimmten Endwert

$$X(1) \in T_Q(M) \quad , \quad Q = \gamma(1)$$

den Paralleltransport $X(1) = \theta X(0)$ von $X(0)$ entlang γ vom Punkt P nach Q .

Beachte: Das Konzept des Paralleltransports lässt sich auf stückweise glatte Kurven verallgemeinern, und ist offensichtlich ganz allgemein für Funktionen (X^j) definiert, welche nur auf der Kurve γ definiert sind – d.h. für Schnitte von $\gamma^*(TM)$.

Der Paralleltransport

$$\theta : T(M)_P \rightarrow T(M)_Q$$

²In Koordinaten ausgeschrieben bedeutet letzteres $\sum_i \dot{\gamma}^i \nabla_i(X) = 0$, oder für $X = \sum X^k \partial_k$ genauer $\sum_i \dot{\gamma}^i \cdot \sum_k \left[\partial_i X^k(\gamma(t)) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) X^j(\gamma(t)) \right] \cdot \partial_k = 0$.

entlang γ ist durch die Lösung $X(t)$ einer linearen Differentialgleichung mit Anfangswert $X(0)$ definiert. (Lineare Differentialgleichungen sind bekanntlich immer lösbar). Daher definiert der Paralleltransport θ eine \mathbb{R} -lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen. Es gilt sogar

Lemma 35. *Der oben definierte Paralleltransport induziert einen metrischen \mathbb{R} -Algebrenhomomorphismus zwischen den Tensoralgebren von $(T(M)_P, g(P))$ und $(T(M)_Q, g(Q))$.*

Beweis: Gilt $\nabla_{\dot{\gamma}} X_i = 0$, dann auch $\nabla_{\dot{\gamma}}(X_1 \otimes X_2) = \nabla_{\dot{\gamma}} X_1 \otimes X_2 + X_1 \otimes \nabla_{\dot{\gamma}} X_2 = 0$. Ausserdem gilt

$$\langle \theta X(0), \theta Y(0) \rangle_Q = \langle X(0), Y(0) \rangle_P .$$

Letzteres beweist man indem man Felder auf der Kurve ausdehnt zu Feldern auf M . Daher gilt

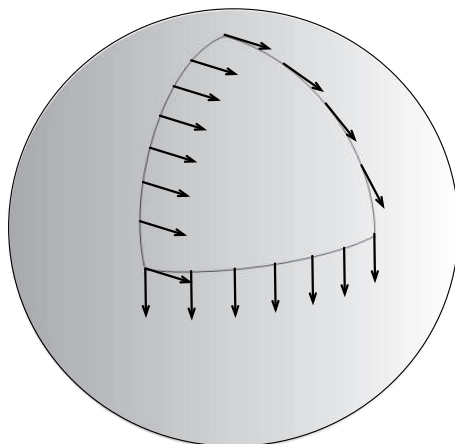
$$\frac{d}{dt} \gamma^*(\langle X(t), Y(t) \rangle)(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \langle X, Y \rangle_{\gamma(t)} = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} X, Y \rangle_{\gamma(t)} + \langle X, \nabla_{\dot{\gamma}} Y \rangle_{\gamma(t)} = 0 .$$

Beachte dabei $\frac{d}{dt} \gamma^*(F) = \langle \gamma_* \left(\frac{d}{dt} \right), \gamma^*(dF) \rangle = \dot{\gamma}^\nu \partial_\nu F = \dot{\gamma}^\nu \nabla_\nu F = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} F$ wegen $\partial_\nu F = \nabla_\nu F$ für reellwertige glatte Funktionen F , sowie

$$\nabla_\nu \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \nabla_\nu \cdot, \cdot \rangle + \langle \cdot, \nabla_\nu \cdot \rangle .$$

Ein Spezialfall: Besonders einfach ist der Fall, wenn der Paralleltransport die Tangentenrichtung erhält $\theta \dot{\gamma}(P) = \dot{\gamma}(Q)$. Dies ist der Fall, wenn γ eine Geodäte ist (siehe nächster Paragraph). Im 2-dimensionalen Fall legt dann obige Formel $\langle \theta(\xi_1), \theta \xi_2 \rangle_Q = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_P$ den Paralleltransport bereits eindeutig fest. Für Flächen im \mathbb{R}^3 , deren Metrik durch Einschränken entsteht, liefert dies eine intuitiv leicht zu handhabende Vorstellung vom Paralleltransport entlang einer Geodäte.

Da Winkel und Längen im Sinne des ambienten dreidimensionalen euklidischen Raumes erhalten bleiben, und da die Geodätenrichtung erhalten bleibt, ist optisch sofort zu sehen wie der Paralleltransport funktioniert!



Beispiel: Auf der 2-Sphäre sind die Geodäten die Großkreise. Man sieht hier bereits, wie wesentlich der Paralleltransport vom Weg γ abhängt!

Holonomie: Ist γ eine stückweise glatte geschlossene Kurve von P nach P . Dann definiert der Paralleltransport entlang γ eine orthogonale Transformation

$$\theta_0 = \theta_0(\gamma) : TM_P \rightarrow TM_P .$$

Im Bild ist dies eine Drehung um 90 Grad.

Ist γ glatt, dann beschreibt diese Matrix θ_0 das Vektorbündel $\gamma^*(TM)$ (siehe Beispiel 2 in Kapitel 1.20). Ist γ eine Geodäte, dann wird auch das Normalenbündel von γ dadurch beschrieben.

Die Menge aller $\theta_0(\gamma)$ definieren eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe, die sogenannte Holonomiegruppe.

Übungsaufgabe: Sei $\mathbb{R}P^n = S^n/\pm$ der reelle projektive Raum. Sei γ ein Großkreis auf der Sphäre S^n und γ_M sein Bild in $M = \mathbb{R}P^n$. Beschreibe das Normalenbündel von γ_M .

5.4 Geodäten

Eine glatte Kurve γ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit heisst Geodäte, wenn das Tangentialfeld $\dot{\gamma}(t)$ – aufgefasst als Schnitt von $\gamma^*(TM)$ – parallel zur Kurve γ ist

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 .$$

Gleichbedeutend dazu ist das Gleichungssystem

$$\boxed{\ddot{\gamma}^k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) = 0} .$$

Aus dem Existenzsatz für Differentialgleichungen folgt für die obige Differentialgleichung, dass für jeden Punkt $P \in M$ und jeden Tangentialvektor $\xi \in T_P(M)$ für genügend kleine Zeiten t eine eindeutige Lösung existiert. Diese hängt differenzierbar vom Richtungsvektor ξ ab.

Folgerung 3. *Zu jedem Punkt P und jedem Tangentialvektor $\xi \in T_P(M)$ existiert lokal um P eine Geodäte in Richtung von ξ .*

Der Euklidische Fall: Sind die Christoffelsymbole Null, dann folgt aus der Geodäten Gleichung die Geradengleichung $\ddot{\gamma}(t) = 0$. Für Geraden ist natürlich die Richtung $\dot{\gamma}$ ‘parallel’ zur Gerade γ .

Bogenlänge: Für eine Geodäte ist per Definition $\dot{\gamma}$ parallel entlang γ . Aus Lemma 35 folgt daher, dass

$$\|\dot{\gamma}\| = c$$

nicht von $t \in [a, b]$ abhängt.

Längenformel: Für die Geodäte $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ von $P = \gamma(0)$ nach $Q = \gamma(t)$ gilt dann

$$\mathbf{L}(\gamma) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(s)\| ds = c \cdot t$$

für alle $t \in [0, b]$. Hierbei ist $c > 0$ bestimmt durch $c^2 = \|\xi\|_{st}^2(0) = \|\xi\|^2(0)$ für $\xi = \dot{\gamma}(0)$. Insbesondere gilt für die Geodäten von P nach Q dann

$$\frac{1}{2} \mathbf{L}(\gamma)^2 = (b - a) \cdot \mathbf{E}(\gamma)$$

wegen $\frac{1}{2}c^2t^2 = t \cdot (\frac{1}{2}c^2t)$.

Reskalierung: Ist $\gamma(t)$ eine Geodäte durch P zum Richtungsvektor $\dot{\gamma}(0) = \xi$, dann ist $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda \cdot t)$ wegen $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma} = \lambda \frac{d}{dt}\gamma$ und $\frac{d^2}{dt^2}\tilde{\gamma} = \lambda^2 \frac{d^2}{dt^2}\gamma$ wieder eine Lösung der Geodätengleichung. Es gilt $\frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(0) = \lambda\xi$. Also ist $\tilde{\gamma}$ die eine Geodäte durch P zum Richtungsvektor $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \lambda\xi$.

Auf Grund der letzten Bemerkung kann man durch Reskalierung mittels eines Kompaktheitsschlusses obdA annehmen, dass die Geodätengleichung für alle Zeiten $t \in [0, 1]$ eine Lösung besitzt, wenn man die Anfangswerte $\xi = \dot{\gamma}(0)$ aus einer genügend kleinen Kugel $B(0) \subseteq T_P(M)$ wählt.

Für $\xi \in B(0)$ sei $\gamma_\xi(t)$ die eindeutig bestimmte Geodäte durch P mit Anfangsgeschwindigkeit ξ . Dann ist die Abbildung

$$\exp : B(0) \ni \xi \mapsto \gamma_\xi(1) \in M$$

definiert. Diese Abbildung nennt man die Exponentialabbildung $\exp = \exp_P$ im Punkt P

$$\begin{array}{ccc} T_P(M) & & \\ \uparrow & & \\ B(0) & \xrightarrow{\exp} & M \end{array}$$

Aus der Reskalierungseigenschaft folgt die fundamentale Formel

$$\boxed{\exp(t\xi) = \gamma(t) \quad , \quad \dot{\gamma}(0) = \xi}$$

Die Exponentialabbildung \exp_P bildet also die Geraden $\xi \cdot t$ durch 0 auf die Geodäten $\gamma(t) = \gamma_\xi(t)$ in M durch den Punkt $P = \exp_P(0)$ ab.

Korollar 11. *Unter der Exponentialabbildung werden die Geraden durch Null auf die Geodäten durch $P = \exp_P(0)$ abgebildet.*

5.5 Geodätische Normalkoordinaten

Da die Lösung der Geodätengleichung differenzierbar von den Anfangsparametern $\xi = \dot{\gamma}(0)$ abhängt, ist die Exponentialabbildung $exp_P(\xi) = \gamma_\xi(1)$

$$exp_P : B(0) \rightarrow M$$

eine glatte Funktion. Ihre Jacobimatrix im Nullpunkt ist

$$J(exp_P, 0) = id.$$

Beweis: Sei $\lambda_\xi(t) = \xi \cdot t$. Wegen der allgemein gültigen Formel $J(F, 0)\xi = \frac{d}{dt}(F \circ \lambda_\xi)(t)|_{t=0}$ folgt die Behauptung aus $exp_P \circ \lambda_\xi = exp(\xi t) = \gamma_\xi(t)$. Also $J(exp_P, 0)\xi = \xi$.

Aus dem Satz von der Umkehrfunktion folgt daher

Theorem 2. *Zu jedem Punkt $P \in M$ gibt es eine offene Kugel $B(0) \subseteq T_P(M)$ um Null, auf der die Exponentialabbildung definiert ist und einen lokalen Diffeomorphismus*

$$exp : B(0) \rightarrow exp(B(0)) \subseteq M$$

induziert. Die zugehörige Kartenabbildung um P ist eindeutig durch die Metrik $g(x)$ und den Punkt P bestimmt.

Definition: Zugehörige lineare Euklidischen Koordinaten x^1, \dots, x^N des Vektorraums $\mathbb{R}^N \supseteq B(0)$, für die

$$g(0) = g_{st}$$

gilt, nennt man (geodätische) Normalkoordinaten. Diese sind eindeutig bis auf eine lineare orthogonale Transformation zur Form $g(0)$. Im Riemannschen Fall setzt man ausserdem $g(0) = 1$.

Injektivitätsradius: Sei $P \in M$ ein Punkt. Der maximale Euklidische Radius $\mu = \mu_P$, für den die Exponentialabbildung bei P definiert ist und einen injektiven Diffeomorphismus von $B_r(0)$ (die offene Kugel vom Euklidischen Radius μ) auf sein Bild in M definiert, heisst Injektivitätsradius bei P .

Der reguläre Stern U : Eine Teilmenge von \mathbb{R}^N heisse sternförmig, wenn sie offen ist, und mit jedem Punkt Q auch die Verbindungsgerade zum Nullpunkt enthält.

Wir betrachten nun allgemeiner anstatt einer offenen Kugel eine maximale Teilmenge V von \mathbb{R}^N , auf der exp_P definiert ist. Der Pullback der Metrik und des Zusammenhangs von M auf diese offene Teilmenge, welche wir manchmal mit $\tilde{g}(x)$ resp $\tilde{\nabla}$, im folgenden der Einfachheit halber auch mit $g = g(x)$ resp. ∇ etc. bezeichnen werden, ist im allgemeinen nur eine Pseudometrik. Sei U die maximale sternförmige Teilmenge von V , auf der Pullback der Metrik wieder eine Metrik ist, d.h. $det(g(x)) \neq 0$ erfüllt. Wir nennen U den regulären Stern. Es ist klar nach dem Satz von der Umkehrfunktion, dass

$$exp_P : U \rightarrow M$$

eine unverzweigte Überlagerung definiert.

Für alle $x \in U$ hat die Pullbackmetrik $g(x)$ und ihr Levi-Civita Zusammenhang ∇ (der Pullback des Levi-Civita Zusammenhangs von M) folgenden bemerkenswerten Eigenschaften

1.Bemerkung: In Normalkoordinaten sind die Geodäten $\gamma(t)$ durch 0 wirkliche Geraden! Somit gilt in diesen Koordinaten $d^2/dt^2\gamma(t) = 0$. Aus der Geodäten Gleichung folgt daher für alle $x \in U$ und alle $k = 1, \dots, N$

$$\sum_{i,j} x^i x^j \cdot \Gamma_{ij}^k(x) = 0.$$

2.Bemerkung: Auf U gilt ausserdem

$$\sum_{i,j} x^i x^j \cdot g_{ij}(x) = \sum_i x_i x^i.$$

Beweis: Für die Geodäte $\gamma(t) = xt$ in U wissen wir bereits, dass $\|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}^2$ unabhängig von t ist! Wegen $\dot{\gamma}(t) = x^i \partial_i$ und $\|\dot{\gamma}(t)\|_{\gamma(t)}^2 = \langle x^i \partial_i, x^i \partial_i \rangle_{\gamma(t)} = \sum_{i,j} x^i x^j g_{ij}(xt)$ folgt die Behauptung durch die Substitutionen $t = 0$ und $t = 1$.

3.Bemerkung: Setzt man $x^i = \xi^i \cdot t$ in Bemerkung 1, so folgt nach Division von t^2 im Limes $t \rightarrow 0$ für alle ξ^i die Bedingung $\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(0) \xi^i \xi^j = 0$. Dies gilt für alle ξ . Wegen der Symmetrie in i und j (Torsionsfreiheit) folgt daher $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$.

5.6 Der Euleroperator

Im Euklidischen Raum definiert das radiale Eulerfeld

$$E = \sum_i x^i \partial_i$$

den sogenannten Euleroperator. Für eine glatte Funktion f mit $f(0) = 0$ auf einer um 0 sternförmigen Menge U gilt ³

$$E(f) = 0 \iff f = 0.$$

Weiterhin ist $E(f)$ genau dann ein Polynom vom Grad r , wenn f ein Polynom vom Grad r ist. Für homogene Polynomen P in x vom Grad r gilt $E(P) = r \cdot P$. Ist umgekehrt $E(f) = P$ ein homogenes Polynom vom Grad $r > 0$, dann gilt $E(f - \frac{1}{r}P) = 0$, also $f = \frac{1}{r}P$. Insbesondere

$$E(f) \text{ ist linear} \iff f \text{ ist linear}.$$

Normalkoordinaten: Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ der reguläre Stern im Euklidischen Raum versehen mit der Pullback Metrik g von M unter der Exponentialabbildung exp_P , und sei ∇ der zugehörige Zusammenhang mit den Christoffelsymbolen Γ_{ij}^k . Dann ist die Kontraktion von ∇ mit dem Euler Vektorfeld E der Differentialoperator

$$\nabla_E = \sum_i x^i \cdot \nabla_i = \sum_i (x^i \partial_i + x^i \Gamma_i).$$

Wir behaupten dann

I. Linearität: $\nabla_E(E) = E$ auf $U \subseteq \mathbb{R}^N$.

Beweis: Aus $\sum_{ij} x^i x^j \cdot \sum_k \Gamma_{ij}^k(x) = 0$ (s. voriger Paragraph 5.5) folgt $\nabla_E(E) = \sum_i (x^i \partial_i + x^i \Gamma_i)(\sum_j x^j \partial_j) = \sum_{i,j} [x^i \delta_{ij} \partial_j + x^i x^j \cdot \sum_k \Gamma_{ij}^k(x) \cdot \partial_k] = E$.

II. Längenformel: Auf U gilt $\langle E, E \rangle_x = \sum_i x_i x^i$.

Zur Erinnerung: $x_i = \sum_j x^j g_{ji}(0)$. Im Euklidischen Fall gilt also $x_i = x^i$.

³Aus $E(f) = 0$ folgt für $F(t) = f(ut)$ die Gleichung $t\dot{F}(t) = 0$ aus der Kettenregel. Also ist $F(t)$ konstant und wegen $f(0) = 0$ daher $F(t) = 0$ und $f = 0$.

Beweis: Dies folgt aus $\langle E, E \rangle_x = \sum_{ij} x^i x^j g(\partial_i, \partial_j)(x) = \sum x_i x^i$. Letzteres nach Bemerkung 2 von Paragraph 5.5.

III. Basisformel⁴: Auf U gilt die Beziehung

$$\langle E, \partial_i \rangle_x = x_i,$$

das heisst wegen $\langle E, \partial_i \rangle_x = \langle \sum x^j \partial_j, \partial_i \rangle_x = \sum_j x^j g_{ji}(x)$ also

$$\boxed{\sum_j x^j g_{ji}(x) = x_i}.$$

Beweis: Es genügt, dass $\langle E, \partial_i \rangle = \sum_j x^j g_{ji}(x)$ linear in x ist (benutze Taylorentwicklung in 0). Da der Levi-Civita Zusammenhang ∇ metrisch ist, gilt daher

$$E \langle E, \partial_i \rangle = \langle \nabla_E(E), \partial_i \rangle + \langle E, \nabla_E(\partial_i) \rangle.$$

Wegen der Torsionsfreiheit von ∇ gilt $T(E, \partial_i) = 0$, d.h. $\nabla_E(\partial_i) = \nabla_i(E) + [E, \partial_i]$. Also $\nabla_E(\partial_i) = \nabla_i(E) - \partial_i$. Setzt man dies in obige Gleichung ein, und berücksichtigt $\nabla_E(E) = E$ (Linearität I), so erhält man

$$\begin{aligned} E \langle E, \partial_i \rangle &= \langle E, \partial_i \rangle + \left(\langle E, \nabla_i(E) \rangle - \langle E, \partial_i \rangle \right) \\ &= \langle E, \nabla_i(E) \rangle = \frac{1}{2} \partial_i \langle E, E \rangle \\ &= \frac{1}{2} \partial_i \sum_j x_j x^j = x_i. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt aus der bereits bewiesenen Längenformel II. Da $E \langle E, \partial_i \rangle$ linear ist, ist daher auch $\langle E, \partial_i \rangle$ linear und dann gleich x_i .

Korollar 12. *Geodätische Normalkoordinaten sind formale Normalkoordinaten.*

Wir zeigen im nächsten Abschnitt, dass in Koordinaten in denen die Basisformel gilt, alle Geraden durch Null Minimalkurven sind. Da Minimalkurven Geodäten sind (Korollar 15), folgt bereits aus der Gültigkeit der Basisformel, dass die zugehörigen Koordinaten geodätische Normalkoordinaten sind.

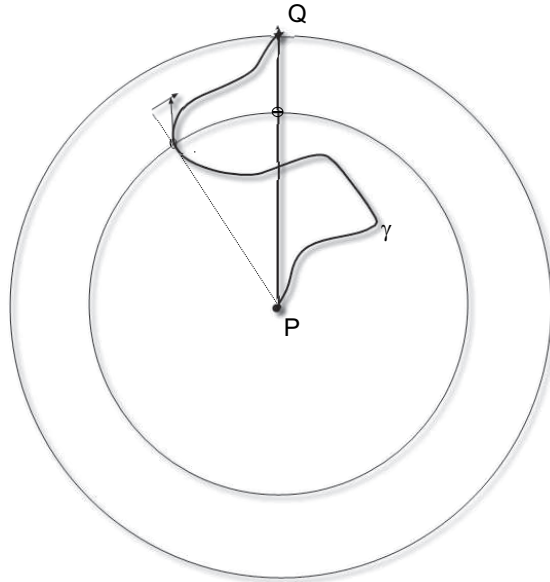
⁴Nach Appendix 13.1 gilt dies für die Pullback Pseudometrik sogar auf jeder um Null sternförmigen offenen Menge, auf der exp_P definiert ist.

5.7 Die Länge in Polarkoordinaten

Im Euklidischen Raum \mathbb{R}^N mit der Standardmetrik g_{st} definiert Ableitung in $t = 0$ des geodätischen Radialflusses $\varphi_t(x) = e^t x$ das Eulerfeld E .

Im definiten Fall sei $\varphi_t(x)$ die orthogonale Drehung der i, j -Ebene $z \mapsto e^{\sqrt{-1}t} z$ für $z \in \mathbb{R}e_i + \mathbb{R}e_j \cong \mathbb{C}$. Die Ableitung in $t = 0$ definiert ein Vektorfeld $R_{ij} = x_i \partial_j - x_j \partial_i$ (Drehfeld). Ganz allgemein (nicht nur im definiten Fall) ist R_{ij} ein Vektorfeld der Drehgruppe⁵ zur Metrik $g_{st} = g(0)$. Klar ist

Lemma 36. Für jeden Punkt $x \neq 0$ in \mathbb{R}^N wird der Tangentialraum $T_x(\mathbb{R}^N)$ aufgespannt von den Vektorfeldern E und R_{ij} im Punkt x .



Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ eine (stückweise) glatte Kurve im regulären Stern U . Wir nehmen an

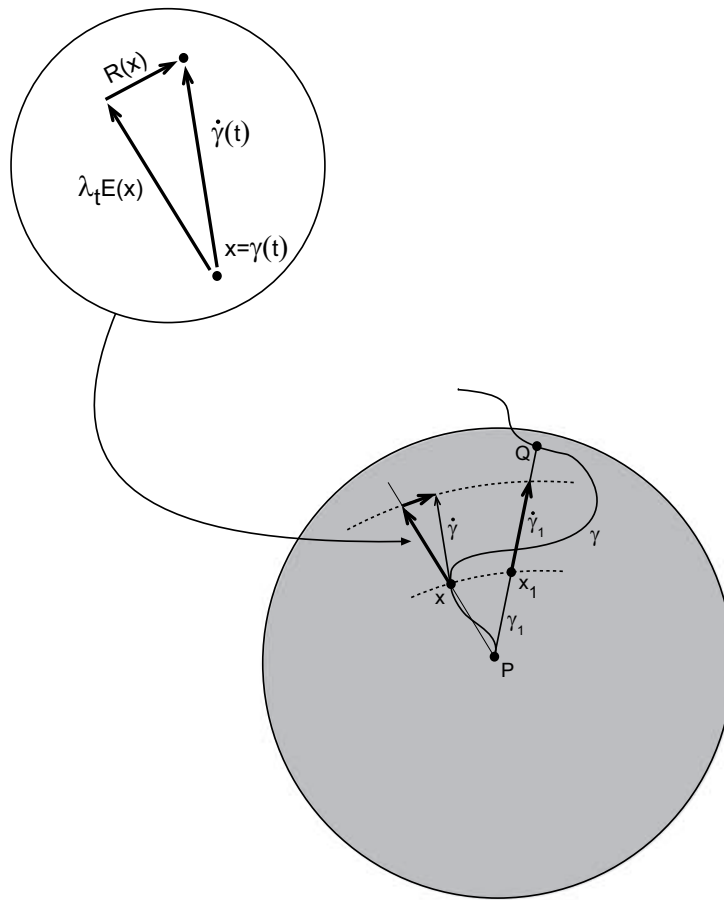
$$\gamma(0) = 0 \quad , \quad \gamma(1) = Q .$$

Die radiale Projektion von γ in Richtung des Vektors Q sei

$$\gamma_1(t) = \|\gamma\|_{st}(t) \cdot Q .$$

⁵ $R_{ij}(\sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(0)x^\alpha x^\beta) = \sum_{\beta} (2x_i g_{j\beta} x^\beta - 2x_j g_{i\beta} x^\beta) = 2(x_i x_j - x_j x_i) = 0$.

Offensichtlich hat γ_1 die selben Anfangspunkt und Endpunkt wie γ , liegt aber nicht notwendiger Weise in U (U ist nicht notwendig unter radialer Projektion abgeschlossen).



Tangentialzerlegung: Für einen Kurvenpunkt $x = \gamma(t)$ zerlegt sich die Tangente

$$\dot{\gamma}(t) = \lambda(t) \cdot E(x) + R(x)$$

in einen radialen Term $\lambda(t) \cdot E(x)$ und einen Drehterm $R(x)$ (Lemma 36). D.h. $R(x)$ ist im Aufspann der Felder $R_{ij}(x)$. Die Tangente von γ_1 zur Zeit t im Punkt $x_1 = \gamma_1(t)$ bestimmt sich durch den selben Koeffizient $\lambda(t)$:

$$\dot{\gamma}_1(t) = \lambda(t) \cdot E(x_1) .$$

Lemma 37. (Gausslemma) Für $x = (x^1, \dots, x^N)$ im regulären Stern U gilt

- $\|E\|_x^2 = \sum_i x^i x_i = \|E\|_{st,x}^2$
- $\langle E, R_{ij} \rangle_x = 0 = \langle E, R_{ij} \rangle_{st}$.

Bemerkung: Setzt man $y_i(x) := \sum_j x^j g_{ij}(x)$, so erweist sich das Gauss Lemma als äquivalent zur bereits bewiesenen Basisformel $y_i(x) = x_i$ (Paragraph 5.6).

Beweis: Alle $\langle E, x_i \partial_j - x_j \partial_i \rangle_x = x^\nu g_{\nu j}(x) x_i - x^\nu g_{\nu i}(x) x_j = y_j(x) x_i - y_i(x) x_j$ sind Null genau dann, wenn $y_i(x) = \rho(x) \cdot x_i$. Also $\|E\|_x^2 = x^i x^j g_{ij}(x) = x^i y_i(x)$ ist gleich $x^i x_i$ genau dann, wenn gilt $\rho(x) = 1$. Das heisst $y_i(x) = x_i$.

Folgerung: Auf U gilt $\langle E, R \rangle = \langle E, R \rangle_{st} = 0$.

Deshalb ist die Zerlegung $\dot{\gamma}(t) = \lambda(t)E + R$ im Punkt $x = \gamma(t)$ orthogonal

$$\|\dot{\gamma}\|_x^2 = \lambda^2(t) \cdot \|E\|_x^2 + \|R\|_x^2$$

also⁶ $\|\dot{\gamma}\|_x^2 \geq \lambda^2(t) \cdot \|E\|_x^2 = \lambda^2(t) \cdot \|E\|_{x_1}^2 = \|\dot{\gamma}_1\|_{x_1}^2$ (beachte $\|x\|_{st} = \|x_1\|_{st}$), und damit

$$\|\dot{\gamma}\|_x^2 \geq \|\dot{\gamma}_1\|_{x_1}^2.$$

Durch Integration über t für $x = \gamma(t)$ resp. $x_1 = \gamma_1(t)$ folgt

$$\boxed{\mathbf{L}(\gamma) \geq \mathbf{L}(\gamma_1)} \quad , \quad \mathbf{L}(\gamma_1) = d_{st}(Q, 0)$$

$\boxed{\mathbf{L}(\gamma) = \mathbf{L}(\gamma_1) \iff \gamma = \gamma_1}$, denn Gleichheit gilt genau dann, wenn der Drehterm $R(x) = 0$ für alle Punkte x der Kurve γ verschwindet. Dies bedeutet $\dot{\gamma}(t) = \lambda(t)E(\gamma(t)) = f(t) \cdot \partial_r$. Also gilt $\gamma(t) = F(t)Q$ für eine reellwertige Funktion F . Zerlege nun $[a, b]$ in Abschnitte $[t_i, t_{i+1}]$, in denen F monoton wachsend oder fallend ist oder konstant Null. Durch ‘Weglassen’ geeigneter Abschnitte konstruiert man eine stückweise glatte ‘monotone’ Kurve. Dadurch verkleinert sich die Länge höchstens. Durch eine Reparametrisierung auf den Teilstücken erhält man - ohne die Längen zu verändern - eine lineare Kurve $\gamma_Q(t)$ von 0 nach Q , welche 1) in U liegt und 2) die Gleichung $\|Q\|_{st} = \mathbf{L}(\gamma_Q) \leq \mathbf{L}(\gamma_1) \leq \mathbf{L}(\gamma)$ erfüllt.

⁶Dieses Argument funktioniert auch noch für zeitartige Wege im Fall von Lorentzmetriken

Folgerung: Sei $P \in M$ und $r = \mu_P$ der Injektivitätsradius bei P . Sei $Q \in \exp(B_r(0))$, $P = \exp(0)$ und r der Euklidische Radius von $B_r(0)$. Eine Kurve γ in M von P nach Q , welche die Karte $\exp(B_r(0))$ verlässt, hat Länge $L(\gamma) \geq r$.

Korollar 13. Sei Q ein Punkt einer maximalen geodätischen Normalkarteumgebung $\exp(B_r(0))$ um P für $r = \mu_P$. Dann gilt für jede stückweise glatte Kurve γ in M von P nach Q

$$L(\gamma) \geq d(0, Q) = d_{st}(0, Q) .$$

Gleichheit – d.h. γ ist eine Minimalkurve – gilt genau dann, wenn γ innerhalb von $B_r(0)$ liegt und (bis auf monotone stückweise glatte Reparametrisierung) eine Geodäte von P nach Q ist.

Beweis: Wegen der letzten Folgerung ist jede Minimalkurve von $P = \exp(0)$ nach Q in $\exp(B_r(0))$ enthalten. Für Kurven in $\exp_P(B_r(0))$ wurde die behauptete Ungleichung ja bereits gezeigt.

Anders formuliert liefert das letzte Korollar

Satz 6. Sei $\mu = \mu_P$ der Injektivitätsradius bei P . Für $r \leq \mu$ sei

$$B_r(P) = \{Q \in M \mid d(Q, P) < r\}$$

die offene metrische Kugel in M um P . Dann gilt:

1) Die Exponentialabbildung definiert für alle $r \leq \mu_P$ einen Diffeomorphismus zwischen der offenen Euklidischen und der offenen metrischen Kugel

$$\exp : B_r(0) \cong B_r(P) .$$

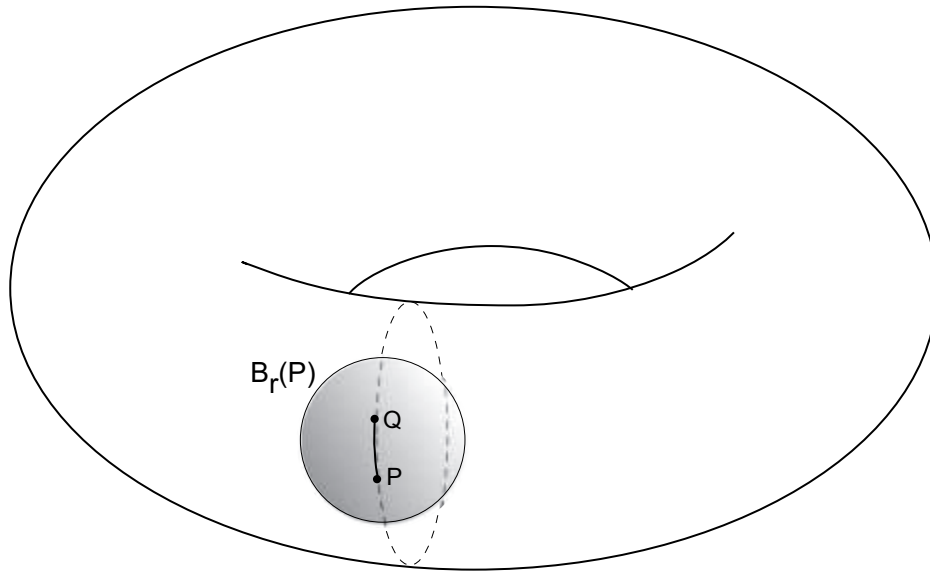
Weiterhin gilt im Fall $r \leq \mu_P$ für alle Punkte Q der offenen Kugel $B_r(P)$:

2) In M gibt es eine eindeutig bestimmte Minimalkurve von P nach Q (bis auf Reparametrisierung). Diese Minimalkurve liegt vollkommen in $B_r(P)$. Sie ist (wieder bis auf Reparametrisierung) gleichzeitig die einzige Geodäte von P nach Q , welche vollkommen in $B_P(r)$ liegt.

Korollar 14. Die Metrik d definiert die Topologie der Mannigfaltigkeit.

Warnung: Die Minimalkurve von P nach Q in M ist unter obigen Bedingungen eindeutig. Die Geodäten von P nach Q dagegen sind es nicht. Es kann sehr wohl verschiedene (sehr lange) Geodäten von P nach Q geben, welche die Kugel $B_r(P)$ verlassen; diese haben dann aber grössere Länge als die eindeutige geodätischen Minimalkurve in $B_r(P)$ von P nach Q .

Siehe Bild



In diesem Bild führt die lange Geodäte aussen um den Schlauch.

5.8 Strikte Injektivität

Sei $P \in M$ und sei

$$\mu = \mu_P$$

der Injektivitätsradius bei P .

Wir zeigen nun, dass man eine Kugel $B_c(P)$ mit Radius $c > 0$ um P finden kann, so dass für jeden Punkt Q der Kugel der Injektivitätsradius bei Q die Ungleichung $\mu_Q \geq c$ erfüllt. Betrachte dazu die differenzierbare Abbildung

$$\Phi : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow M \times M ,$$

welche (ξ, P) auf $(\exp_P(\xi), P)$ abbildet. Die Jacobimatrix $J(\Phi, (0, P))$ hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} id & * \\ 0 & id \end{pmatrix} ,$$

da $J(\exp_P, 0) = id$. Die Nullen im unteren Eck ergeben sich aus der Tatsache, dass P nicht von ξ abhängt. Da $J(\Phi, (0, P))$ invertierbar ist, folgt aus dem Satz von der Umkehrfunktion die Existenz einer Zahl $c > 0$ so, dass Φ das Produkt der offenen Kugel $B_c(0) \times B_c(P)$ diffeomorph auf sein Bild abbildet. Daraus folgt aber $\mu_Q \geq c$ für alle $Q \in B_c(P)$.

Durch ein Überdeckungsargument folgt daraus

Lemma 38. *Für kompaktes $K \subseteq M$ gibt es eine Konstante $c = c(K)$ so dass für alle $P \in K$ gilt $\mu_P \geq c > 0$.*

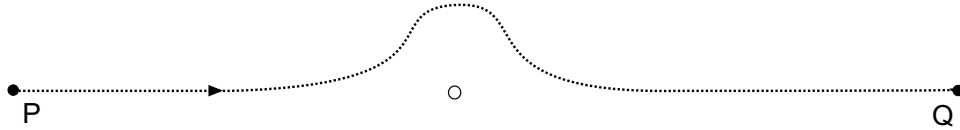
Beweis: Überdecke K durch offene Kugeln $B_c(P)$ für $P \in K$. Eine endliche Teilüberdeckung überdeckt dann bereits K . Setze $c(K) = \min(c)$ (Minimum über die c der endlichen Teilüberdeckung).

Korollar 15. *Jede stückweise glatte Minimalkurve γ ist eine glatte Geodäte.*

Beweis: γ kann durch endlich viele Normalkoordinatenkugeln vom Radius $c > 0$ wie in Lemma 38 überdeckt werden. Da γ auch lokal minimal ist, ist γ von jedem Punkt P ausgehend bis zur Distanz c geodätisch (denn die kürzeste Verbindung von P ist nach Korollar 13 lokal eindeutig und eine Geodäte!) Da dies für jeden Punkt P gilt, folgt dann aber, dass γ in jedem Punkt eine glatte Geodäte sein muss.

5.9 Vollständigkeit

Zwei Punkte einer Riemannschen Mannigfaltigkeit können nicht immer durch eine Minimalkurve verbunden werden.



Beispiel: $M = \mathbb{C} \setminus 0$; die einzig mögliche Minimalkurve von -1 nach 1 müsste durch den Nullpunkt gehen, der aber fehlt. Das Problem ist, dass in diesem Beispiel M nicht vollständig ist und sich die Geodäte von $P = -1$ in 'Richtung' von $Q = 1$ nicht beliebig verlängern lässt.

Lemma 39. *Ist M Cauchy-vollständig als metrischer Raum, dann ist jede Geodäte in M unbeschränkt fortsetzbar, d.h. für alle Punkte P ist \exp_P definiert als Abbildung*

$$\exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M .$$

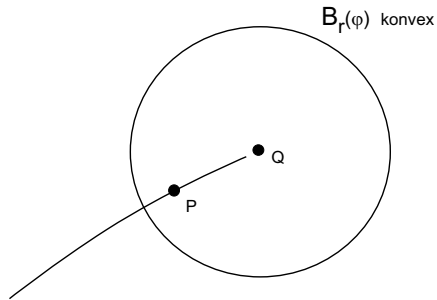
Beweis: Sei

$$\gamma : (a, b) \rightarrow M$$

eine Geodäte und $t_n \rightarrow b$ eine Folge aus (a, b) . Die $\gamma(t_\nu)$ definieren eine Cauchyfolge in M wegen $d(\gamma(t_n), \gamma(t_m)) = c \cdot |t_n - t_m|$. Also existiert der Limes

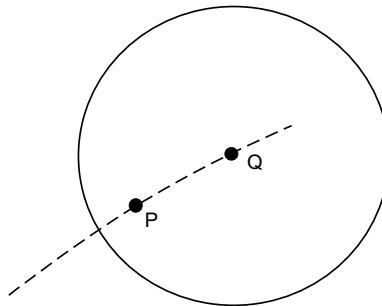
$$Q = \lim_{\nu} \gamma(t_\nu) .$$

Wähle nun eine kleine metrische Kugel $B_r(Q)$ um Q . Der Radius r wird so gewählt, dass der Injektivitätsradius jedes Punktes P aus $B_r(Q)$ nach unten durch eine feste Konstante $c > 0$ beschränkt wird (Lemma 38).



Sei nun $P = \gamma(t_\nu)$ ein Folgenpunkt mit $d(P, Q) < r$. Dann ist $P \in B_r(Q)$. Gilt ausserdem $d(P, Q) < c$, dann ist die Geodäte γ von P aus eindeutig fortsetzbar zu einer Geodäte durch Q auf den vergrösserten Definitionsbereich

$$\gamma : (a, b - d(P, Q) + c) \rightarrow M .$$



Beispiele: Kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind vollständig. Abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten von vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, sind mit der induzierten Metrik wieder vollständig.

Bemerkung: Wir zeigen im nächsten Abschnitt, dass Vollständigkeit eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass je zwei Punkte einer Zusammenhangskomponente durch mindestens eine Minimalkurve verbunden werden können. Die Annahme der Vollständigkeit ist allerdings dafür nicht notwendig, was man am Beispiel der offenen Kreisscheibe sieht.

5.10 Richtungen

Zu jedem Punkt P einer Riemannschen Mannigfaltigkeit hat man für $0 < r \leq \mu_P$ in den metrischen Kugeln $B_r(P)$ ein Normalkoordinatensystem. Einen Punkt einer zugehörigen metrischen Sphäre (vom Radius r um P) nennen wir eine von P ausgehende Richtung.

Definition: Seien P, Q Punkte von M mit Distanz $d(P, Q) > 0$. Eine Folge γ_ν von stückweise glatten Verbindungskurven nennen wir eine Minimalkurvenapproximation, wenn gilt

$$\lim_{\nu} \mathbf{L}(\gamma_\nu) = d(P, Q) .$$

Sei Q_ν der erste Schnittpunkt von γ_ν (mit einer fixierten r -Sphäre nahe bei P). Einen Häufungspunkt \overline{Q} der Menge $\{Q_\nu\}$ nennen wir eine Richtung von P nach Q . Per Definition ist die Menge der Richtungen nicht leer und es gilt

$$d(\overline{Q}, Q) = d(P, Q) - d(P, \overline{Q}) ,$$

denn $\lim(d(P, Q_\nu) + d(Q_\nu, Q)) \leq \lim \mathbf{L}(\gamma_\nu) = d(P, Q)$. Also $d(P, \overline{Q}) + d(\overline{Q}, Q) \leq d(P, Q)$, und somit folgt die Behauptung aus der Dreiecksungleichung.

1.Bemerkung: Richtungen in diesem Sinn sind natürlich nicht eindeutig bestimmt. Beispiel: P, Q den Nord resp. Südpol auf der Kugeloberfläche. In jede Richtung geht hier eine Minimalkurve.

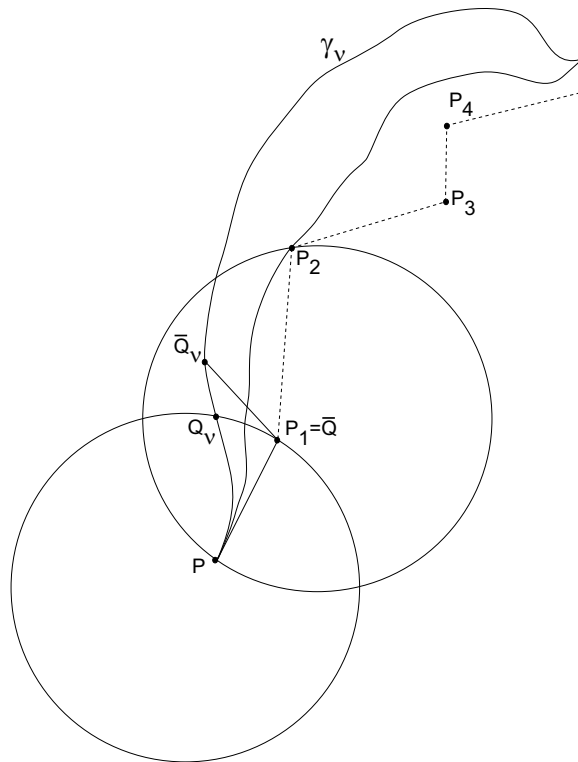
2.Bemerkung: Stimmen alle Kurven einer Minimalkurvenapproximation von P nach Q auf einem Teilstück von P nach Q' überein, dann folgt aus der Dreiecksungleichung: 1) Das Teilstück von P nach Q' ist eine (stückweise) glatte Minimalkurve, und daher sogar eine glatte Geodäte, und 2) Die Teilstücke $Q'Q$ bilden eine Minimalkurvenapproximation.

Lemma 40. Sei \overline{Q} eine Richtung von P nach Q . Eine von P ausgehende unbeschränkte Geodäte γ durch \overline{Q} ist eine Minimalkurve zwischen P und Q .

Beweis: 1) Auf einem kompakten Geodätenstück von γ der Länge $> d(P, Q)$ kann die Konstante r aus Korollar 8 durch eine Konstante $c > 0$ nach unten beschränkt.

2) Wir modifizieren eine Minimalkurvenapproximation γ_ν von P nach Q (durch Übergang zu einer Teilfolge obdA mit eindeutiger) Richtung \overline{Q} . Wir können dabei annehmen $d(P, P_1) > c$. Wir ersetzen dazu γ_ν durch stückweise glatte Kurven, welche von P nach $P_1 = \overline{Q}$ mit der Geodäte γ , übereinstimmen, dann mit neuen Kurven $\overline{\gamma}_\nu$ von P_1 aus geodätisch bei Q_ν in die alten Kurven einmünden. Die Länge der modifizierten Kurve ist $\leq \mathbf{L}(\gamma_\nu) + 2\mathbf{L}(\overline{Q}, Q_\nu)$. Es gilt daher

$$d(P, \overline{Q}) + \lim_{\nu} \mathbf{L}(\overline{\gamma}_\nu) = d(P, Q) .$$



Daraus folgt: Die Kurven $\overline{\gamma}_\nu$ definieren eine Minimalkurvenapproximation von $P_1 = \overline{Q}$ nach Q .

3) Iteriert man dieses Verfahren $r = \lceil d(P, Q)/c \rceil$ mal, so erhält man eine Minimalkurvenapproximation von P nach Q , bei der alle Kurven mit den Geodätenstücken PP_1 und P_1P_2 usw. $P_{r-1}P_r$ beginnen.

Da die neuen Kurven wieder eine Minimalkurvenapproximation von P nach Q definieren, ist das Anfangsstück von P nach P_r nach Bemerkung 2) eine stückweise glatte Minimalkurve.

Wegen Korollar 15 ist jede stückweise glatte Minimalkurve eine glatte Geodäte. Also ist das Teilstück PP_r ein Teilstück der glatten Geodäte γ , und zwar wegen 1) dann – a posteriori – von der Länge $d(P, P_r) = \sum_1^r d(P_{i-1}, P_i) > r \cdot c$.

Somit liegt $P_r \in B_c(Q)$, also in einer strikt konvexen Umgebung von Q , und es gilt $d(P, P_r) + d(P_r, Q) = d(P, Q)$. Die Zusammensetzung der Geodäten PP_r und P_rQ ist somit eine Minimalkurve, stimmt also erneut wegen Korollar 15 mit γ überein.

5.11 Der Satz von Hopf-Rinow

Wir formulieren zuerst folgende

Annahme: Alle Geodäten durch P seien unbeschränkt fortsetzbar (z.B sei M vollständig).

Dass heisst, die Exponentialabbildung im Punkt P ist auf dem ganzen Tangentialraum definiert als differenzierbare Abbildung

$$\exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M .$$

Lemma 40 zeigt dann, dass die Abbildung \exp_P surjektiv ist; denn jeder Punkt $Q \in M$ mit $\rho = d(P, Q)$ liegt auf einer geodätischen Kurve durch P . Genauer liegt Q sogar einer geodätischen Minimalkurve, also im Bild der Euklidischen Kugel vom Radius ρ in \mathbb{R}^N .

Korollar 16. Unter obiger Annahme (Unbeschränktheit aller Geodäten bei P) ist die Exponentialabbildung \exp_P eine kontraktive surjektive differenzierbare Abbildung, d.h. für alle ρ gilt

$$\exp_P : B_\rho(0) \rightarrow B_\rho(P) .$$

Inbesondere ist jede beschränkte Menge in M kompakt, und M ist vollständig.

Umgekehrt folgt wegen Lemma 39 aus der Vollständigkeit die Unbeschränktheit aller Geodäten.

Satz 7. M ist vollständig als metrischer Raum genau dann, wenn durch einen Punkt (oder durch alle Punkte) sämtliche Geodäten unbeschränkt sind. In diesem Fall gibt es zwischen je zwei Punkte von M mindestens eine (glatte geodätische) Minimalkurve.

Folgerung 4. Ist (M, g) vollständig und P ein Punkt von M . Dann definiert der Pullback der Metrik von M (unter der Exponentialabbildung \exp_P bei P) eine glatte Pseudometrik \tilde{g} auf \mathbb{R}^N mit der Eigenschaft $\sum_j x^j \tilde{g}_{ji} = \sum_j x^j \tilde{g}_{ji}(0)$.

Beachte: $\det \tilde{g}(x) \neq 0 \iff \det J(\exp_P, x) \neq 0$.

5.12 Lokale Konvexität

Sei μ_P der Injektivitätsradius im Punkt P einer Riemmanischen Mannigfaltigkeit. Sei K der Abschluss von $B_{\mu_P}(P)$, und c wie im Lemma 38. Für $r < \frac{1}{2}c$ und Q_1, Q_2 in der metrischen Kugel $B = B_r(P)$ gilt dann

$$Q_1, Q_2 \in B.$$

Dann gilt $d(Q_1, Q_2) \leq d(Q_1, P) + d(P, Q_2) \leq 2r$. Wegen $r < c/2$ gilt daher für alle $Q_1, Q_2 \in B$

$$d(Q_1, Q_2) < \mu_{Q_i}.$$

Somit gibt es eine eindeutige Minimalkurve zwischen Q_1 und Q_2 , realisiert durch die eindeutige Geodäte innerhalb von $B' = B_{d(Q_1), d(Q_2)}(Q_1)$. Die Kugel B' ist im allgemeinen nicht in der ursprünglich gewählten Kugel B enthalten. Daher ist a priori nicht klar, ob diese Minimalgeodäte zwischen Q_1, Q_2 in B' bereits in der ursprünglichen Kugel B enthalten ist. Wir zeigen nun, dass dies zumindestens für genügend kleine Werte⁷ von r richtig ist.

Satz 8. *Für jeden Punkt P gibt es ein r mit $0 < r < \mu_P$ so dass die metrische Kugel $B = B_r(P)$ geodätisch strikt konvex ist. Das heisst: Für alle Punkte $Q_1, Q_2 \in B$ gibt es in M eine eindeutig bestimmte Minimalkurve zwischen Q_1 und Q_2 und diese Minimalkurve liegt innerhalb von B . Gleichzeitig ist diese Minimalkurve die eindeutig bestimmte Geodäte in B , welche Q_1 und Q_2 verbindet.*

Beweis: ObdA $r < \frac{1}{2}c$ mit $c = \min\{\mu_Q \mid Q \in B_{\mu_P}(P)\}$. Dann gilt $B \subseteq B_c(P)$ und $B' \subseteq B_c(P)$. Wir können daher von nun an in geodätischen Normalkoordinaten rechnen und $B_c(P) \subseteq B_{\mu_P}(P)$ durch die entsprechende Euklidische Kugel um Null vom Radius r im Tangentialraum von P ersetzen. Wir behalten aber die bisherigen Bezeichnungen bei.

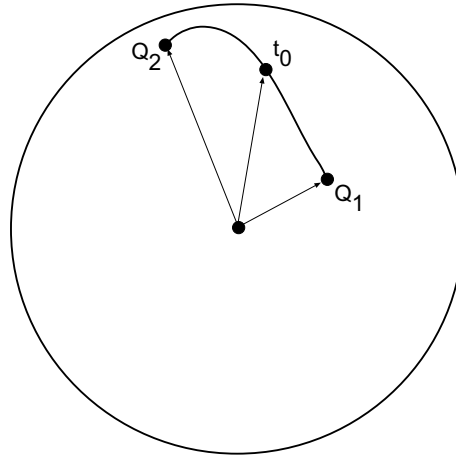
Sei nun γ die Geodäte zwischen Q_1 und Q_2 , welche in $B' \subseteq B(0)$ liegt. Wir betrachten den euklidischen Abstand $\|\gamma(t)\|_{Eukl}^2$ von γ zum Nullpunkt, und sei M das dabei auftretende Maximum

$$M = \max_{t \in [0,1]} \sum_k (\gamma^k(t))^2.$$

⁷Für vollständige Räume mit negativer Schnittkrümmung überträgt sich der Beweis für alle r

Behauptung: Das Maximum wird in Q_1 oder Q_2 angenommen (falls r klein genug gewählt wurde).

Aus der Behauptung folgt dann sofort, dass γ in der euklidischen Kugel B vom Radius r enthalten ist, da ja sowohl Q_1 als auch Q_2 nach Annahme in B enthalten sind. Da diese euklidische Kugel unter der Exponentialabbildung diffeomorph auf die metrische Kugel abgebildet wird, folgt daraus der Satz.



Beweis der Behauptung: Würde das Maximum M im Inneren $t_0 \in (0, 1)$ angenommen, wäre die zweite Ableitung von $\sum_k (\gamma^k(t))^2$ negativ

$$\sum_i \left(\gamma^i(t_0) \ddot{\gamma}^i(t_0) + (\dot{\gamma}^i)^2(t_0) \right) \leq 0.$$

Wegen der Geodätengleichung würde daraus folgen

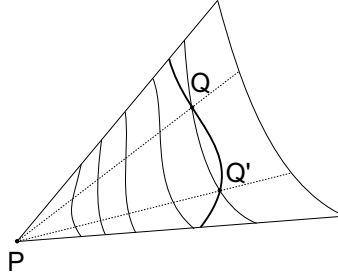
$$\sum_{i,j} \left(\delta_{ij} - \sum_k \gamma^k(t_0) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \right) \dot{\gamma}^i(t_0) \dot{\gamma}^j(t_0) \leq 0.$$

Ist r klein genug, ist die durch die Klammer⁸ definierte symmetrische Form aber positiv definit, denn in Normalkoordinaten verschwindet Γ in Nullpunkt und $|\gamma(t_0)|_{st} \leq \max_i(|Q_i|_{st}) + \frac{1}{2}d(Q_1, Q_2) < 2r$. Aus der Definitheit folgt aber dann

⁸Wegen der Basisrelation (Lemma 54 und Folgerung 6) ist diese Form auch gleich $g + \frac{1}{2}E(g) = t_0 N' \Sigma(t_0) N$, also positiv definit für beliebige t_0 im Fall negativ gekrümmter Räume.

$\dot{\gamma}(t_0) = 0$. Da γ eine Geodäte ist, ist $\dot{\gamma}(t)$ konstant! Also $\dot{\gamma}(t) = 0$ und damit $\gamma(t) = Q_1 = Q_2$.

Ein solches Bild für Geodäten ist in einer strikt konvexen Umgebung nicht möglich!



Appendix

Eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M heisst konvex im Punkt x_0 , wenn die Hessematrix $\nabla^2 f \in T^2(M)$ positiv definit ist

$$\nabla^2 f(x_0) > 0$$

in Normalkoordinaten erster Ordnung bei x_0 . Diese Eigenschaft ist intrinsisch, also unabhängig⁹ von der Wahl der Normalkoordinaten 1.Ordnung.

Geodätenformel: Wir erinnern an $\nabla^2(f) = \partial^2 f - \Gamma^k \partial_k f$ (in beliebigen lokalen Koordinaten). Für eine Kurve γ gilt $\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) = \ddot{\gamma}^k(t) \partial_k(f)(\gamma(t)) + \partial^2 f[\dot{\gamma}(t)](\gamma(t))$. Ist γ eine Geodäte, gilt daher

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) = \nabla^2(f)[\dot{\gamma}(t)](\gamma(t)).$$

Lemma 41. Sei f auf M konvex und $\gamma : I = [a, b] \rightarrow M$ eine Geodäte. Dann folgt $f(\gamma(t)) > 0$ für alle $t \in I$ aus $f(\gamma(a)) > 0$ und $\frac{d}{dt} f(\gamma(t))_{t=a} > 0$.

Beweis: Anderenfalls gäbe es ein t_1 mit $f(\gamma(t_1)) = 0$ und damit ein $0 < t_0 < t_1$, wo $f(\gamma(t))$ das Maximum in $[a, t_1]$ annimmt. Dann gilt $\frac{d^2}{dt^2} f(t_0) \leq 0$ im Widerspruch zur Konvexität $\frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t))|_{t=t_0} = \nabla^2(f(\gamma(t_0)))[\dot{\gamma}(t_0)] > 0$ (obdA in Normalkoordinaten).

⁹In Normalkoordinaten bei x_0 gilt $\nabla^2(f) = \partial^2 f(x_0)$. $\varphi^*(\partial^2 f)(x_0)$ und $\partial^2 f(\varphi(x_0))$ unterscheiden sich um $\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \beta} (x_0) \partial_\nu f(x_0)$. Aus Lemma 28 (Injektivität von θ) folgt $\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \varphi^\nu}{\partial \beta} (x_0) = 0$, wenn die neuen Koordinaten Normalkoordinaten 1.Ordnung bei x_0 sind.

5.13 *Appendix (Indefinite Metriken)

Es stellt sich natürlich die Frage, welche der Betrachtungen aus diesem Kapitel sich auf den Fall indefiniter Metriken übertragen lassen. Eine Metrik heiße dabei Lorentzmetrik, wenn sie in jedem Punkt vom Sylvester Typ $(1, -1, \dots, -1)$ ist.

Abschnitt 2: Das Konzept der Länge einer Kurve ist im allgemeinen dann sinnlos. Allerdings hat man im Lorentzfall den zeitartigen Lichtkegel. Für Kurven in diesem Kegel ist $L(\gamma)$ erklärt und die Eigenschaften übertragen sich wörtlich.

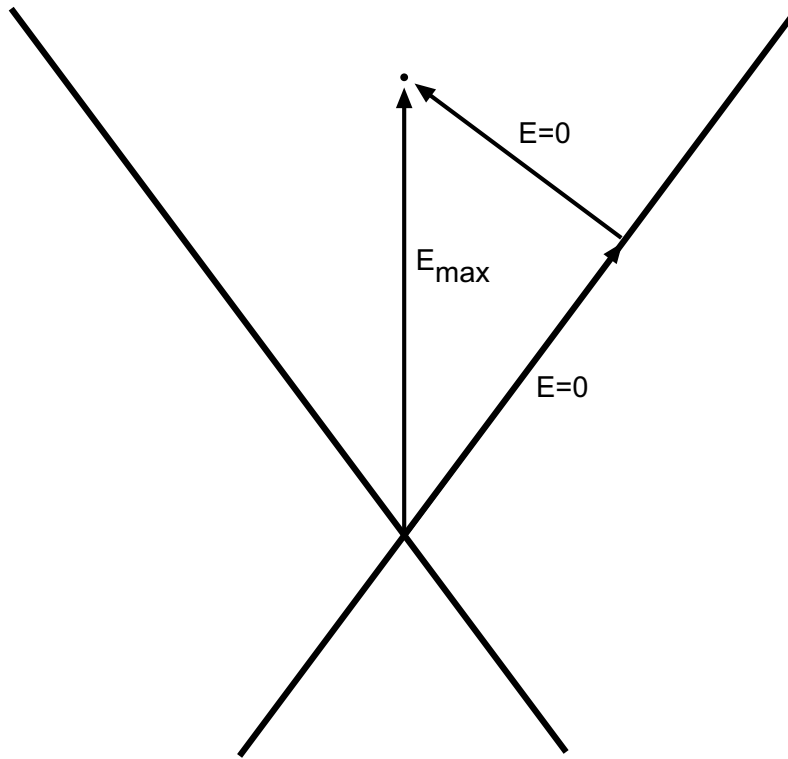
Abschnitt 3 und 4: Parallelverschiebung und der Begriff der Geodäte überträgt sich wörtlich auf den indefiniten Fall. Allerdings gilt die Längenformel für Geodäten nicht mehr.

Abschnitt 5 und 6: Überträgt sich wörtlich.

Abschnitt 7: Hier gibt es allenfalls ein Analogon im Fall von zeitartigen Kurven für Lorentzmetriken. Die von Null ausgehenden Geodäten sind dann aber Extremalkurven maximaler Länge beziehungsweise maximaler Energie. Für Kurven γ im vorderen Lichtkegel von 0 nach P , die eine Exponentialkarte nicht verlassen, gilt $0 \leq \mathbf{E}(\gamma) \leq \mathbf{E}(\gamma_1)$; und Gleichheit wird nur angenommen, wenn γ gleich einer Geodäte γ_1 von 0 nach P ist. Geht man aber über den Lichtkegel mit einem Knick, ist $\mathbf{E}(\gamma) = 0$. Frage: Wann gibt es ein globales Maximum von $\mathbf{E}(\gamma)$ für zeitartige Wege mit festem Anfangs- und Endpunkt?

Abschnitt 12 überträgt sich in der Form, dass es zu jedem Punkt kleine strikt konvexe Umgebungen gibt, im Sinne dass je zwei Punkte in der Umgebung durch eine (bis auf Parametrisierung) eindeutig bestimmte Geodäte innerhalb der Umgebung verbunden werden können. Der Beweis bleibt derselbe. Es folgt in Analogie zu Abschnitt 12 dann auch: Im Lorentzfall sind zeitartige Extremalkurven, welche die Länge oder Energie maximieren, globale Geodäten.

Für Abschnitt 8-11 siehe [3].



Kapitel 6

Algebraische Eigenschaften der Krümmung

6.1 Vorbemerkung

Die entscheidende Aussage in diesem Kapitel ist die Formel von Lemma 45, welche besagt dass in Normalkoordinaten erster Ordnung die Krümmung durch einen einfachen linearen Ausdruck in Termen der zweiten Ableitung der Metrik gegeben ist. Diese Formel ist von fundamentaler Bedeutung für die Berechnung von Krümmungen.

Die meisten Aussagen des nächsten Kapitels (geometrische Bedeutung der Krümmung) werden von dieser Formel abgeleitet. Eine Abstrahierung dieser Formel liefert das Kulkarni-Nomizu Produkt, welches im ersten Abschnitt ad hoc eingeführt wird. Es wird sich später im Abschnitt über die Gauss- und Mainardi-Codazzigleichungen als nützlich erweisen. Im Grund können aber die beiden ersten Paragraphen übersprungen werden.

Im letzten Paragraph wird gezeigt, dass in Normalkoordinaten 1.Ordnung in einem Punkt P die höheren Ableitungen des Riemannschen Krümmungstensors die Taylorentwicklung der Metrik im Punkt P bestimmen.

6.2 Das Kulkarni-Nomizu Produkt

Wir identifizieren im folgenden $S^2(V) \otimes S^2(V)$ mit Tensoren in $V^{\otimes 4}$, die in den Variablen 13 und 24 symmetrisch sind, und $\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V)$ mit Tensoren in $V^{\otimes 4}$, die in den Variablen 12 und 34 alternierend sind.

Betrachte die die Alternierung (oder Kulkarni-Nomizu Abbildung)

$$A = 2 \cdot \text{Alt}_{12} \circ \text{Alt}_{34} : S^2(V) \otimes S^2(V) \rightarrow \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V)$$

beziehungsweise die Symmetrisierung (oder Jacobi Abbildung)

$$S = 2 \cdot \text{Sym}_{13} \circ \text{Sym}_{24} : \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \rightarrow S^2(V) \otimes S^2(V)$$

zwischen diesen beiden Räumen. Es bezeichne \mathcal{B}^\pm die jeweiligen Bildräume¹:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^+ &= \text{Bild}(S) \subseteq S^2(V) \otimes S^2(V) \\ \mathcal{B}^- &= \text{Bild}(A) \subseteq \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^- & \xleftarrow[A=3 \cdot S^{-1}]{\cong} & \mathcal{B}^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) & \xrightleftharpoons[A]{S} & S^2_{13}(V) \otimes S^2_{24}(V) \end{array}$$

Lemma 42. *S und A induzieren zueinander inverse Isomorphismen zwischen \mathcal{B}^+ und \mathcal{B}^- .*

Beweis: Mühevollere Rechnung.²

Definition: Für zwei symmetrische Bilinearformen g_1 und g_2 auf $T = V^*$ ist $g_1 \otimes g_2 \in S^2(V) \otimes S^2(V)$ eine Multilinearform auf $T^{\otimes 4}$. Das Kulkarni Produkt

$$g_1 \ominus g_2 := A(g_1 \otimes g_2)$$

¹Beachte, \mathcal{B}^\pm sind zu $R^{2,2}(V)$ isomorph.

²Nach §6.3 ist klar, dass $A \circ S = c \cdot \text{id}_{\mathcal{B}^-}$ und $S \circ A = c \cdot \text{id}_{\mathcal{B}^+}$ gilt. Um die Konstante $c = 3$ auszurechnen, genügt das 2.Beispiel weiter unter.

liegt in \mathcal{B}^- , und wird gegeben durch die Multilinearform

$$\frac{1}{2} \left[\langle v_1, v_3 \rangle_1 \langle v_2, v_4 \rangle_2 + \langle v_1, v_3 \rangle_2 \langle v_2, v_4 \rangle_1 - \langle v_2, v_3 \rangle_1 \langle v_1, v_4 \rangle_2 - \langle v_2, v_3 \rangle_2 \langle v_1, v_4 \rangle_1 \right].$$

1.Beispiel: $g \ominus g(v_1, \dots, v_4) = \langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_1, v_4 \rangle$ für $g_1 = g_2 = g$.³
 $g \ominus g(u, v, u, v) = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$ definiert die kanonische von g induzierte quadratische Form $g(u \wedge v)$ auf $\Lambda^2(V)$.

2.Beispiel: Beachte $g \ominus g \in \mathcal{B}^-$, und $S(g \ominus g)(v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist

$$\begin{aligned} & 2\langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_1, v_4 \rangle - \langle v_2, v_1 \rangle \langle v_3, v_4 \rangle \\ &= 3\langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - [\langle v_3, v_1 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle + \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_1, v_4 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_3, v_4 \rangle] \\ &= 3 \cdot (g \otimes g) - B_{123}(g \otimes g) \end{aligned}$$

für den Bianchi Operator B_{123} (Summe über die 3 zyklischen Vertauschungen der ersten Koordinaten). Dies ist i.a. kein Vielfaches von $g \otimes g$, d.h. $g \otimes g \notin \mathcal{B}^+$.

Allerdings gilt $A \circ S(g \ominus g) = 3(g \ominus g)$, da der Term in eckigen Klammer nach dem Anwenden der Alternierung A_{12} in ein Vielfaches der Alternierung A_{123} der Form $D = \langle v_1, v_2 \rangle \langle v_3, v_4 \rangle$ übergeht, welche die in den Variablen (13) symmetrisch Form D annulliert. Das heisst $A[\dots] = 0$.

Lemma 43. Für alle Tensoren $R \in \mathcal{B}^-$ gilt

1. $R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_3, v_4, v_1, v_2)$
2. $B_{123}(R) = 0$ für den Bianchi Operator B_{123} .

Beweis: Dies gilt⁴ für $g \ominus g$ und damit durch Polarisieren auch für die Erzeuger $g_1 \ominus g_2$ von $S^2(V) \otimes S^2(V)$. Da das Kulkarni Produkt $S^2(V) \otimes S^2(V) \rightarrow \mathcal{B}^-$ surjektiv ist, folgt die Behauptung.

Allgemeiner: Sind $g : V \otimes V \rightarrow N$ und $h : N \times N \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch bilinear. Dann sind

$$g \ominus_h g(u, v, u, v) = \langle \|u\|_g^2, \|v\|_g^2 \rangle_h - \langle u, v \rangle_g^2$$

oder allgemeiner (durch Polarisierung) auch $g_1 \ominus_h g_2(v_1, v_2, v_3, v_4)$ erklärt.

³Insbesondere $\langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_1, v_4 \rangle = \langle v_3, v_1 \rangle \langle v_4, v_2 \rangle - \langle v_4, v_1 \rangle \langle v_3, v_2 \rangle$
⁴ $(\langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle) + (\langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle) + (\langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle) = 0$

6.3 Appendix: Tensoren der Stufe 4

Für einen Vektorraum V betrachten wir die Darstellung der Gruppe $Gl(V)$ auf $V^{\otimes 4} = V^{\otimes 2} \otimes V^{\otimes 2}$. Das Distributivgesetz für Tensoren

$$V^{\otimes 4} \cong \left(S^2(V) \oplus \Lambda^2(V) \right) \otimes \left(S^2(V) \oplus \Lambda^2(V) \right)$$

führt uns auf die Zerlegung in Irreduzible. Nach Lemma 30 und 31 und Folgerung aa gilt

$$\begin{aligned} S^2(V) \otimes S^2(V) &\cong S^4(V) \oplus D^{3,1}(V) \oplus R^{2,2}(V) \\ S^2(V) \otimes \Lambda^2(V) &\cong D^{3,1}(V) \oplus D^{2,1,1}(V) \\ \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) &\cong R^{2,2}(V) \oplus D^{2,1,1}(V) \oplus \Lambda^4(V) \end{aligned}$$

Korollar 17. Für $N \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Hom}_{Gl(V)}(S^2(V) \otimes S^2(V), \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V)) &= 1 \\ \dim \operatorname{Hom}_{Gl(V)}(\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V), S^2(V) \otimes S^2(V)) &= 1 \end{aligned}$$

Ignoriert man die Aussagen über die Aktion der Gruppe S_4 , ergibt sich erneut der folgende Spezialfall des Satzes von Weyl

Lemma 44. $V^{\otimes 4}$ zerfällt⁵ in fünf Summanden

$$\left(S^4(V) \boxtimes 1 \right) \oplus \left(D^{3,1}(V) \boxtimes \sigma_3 \right) \oplus \left(R^{2,2}(V) \boxtimes \sigma_2 \right) \oplus \left(D^{2,1,1}(V) \boxtimes \sigma_3^* \right) \oplus \left(\Lambda^4(V) \boxtimes \varepsilon \right).$$

Hierbei sind $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_3^* = \sigma_3 \otimes \varepsilon$ irreduzible Darstellungen der Gruppe S_4 der Dimension 3,2,3. Die auftretenden Darstellungen der Gruppe S_4 durchlaufen alle Klassen irreduzibler Darstellungen der Gruppe S_4 .

Bemerkung: Betrachte die Einschränkung des Charakters $\varepsilon : S_4 \rightarrow \mathbb{C}^*$ auf die Untergruppe $(S_2 \times S_2) \triangleleft \mathbb{Z}_2 \subseteq S_4$. Die davon induzierte Darstellung von S_4 ist 3-dimensional und zerfällt in σ_2 und den Charakter ε . Die vom trivialen Charakter der Untergruppe $S_3 \times S_1$ induzierte Darstellung von S_4 zerfällt in $\sigma_3 \oplus 1$.

⁵Im Fall $N = 2$ hat $R^{2,2}(V)$ Dimension 1 und Tensoren in $R^{2,2}(V)$ sind durch ihre Auswertung $R \mapsto R(e_1, e_2, e_1, e_2) = R_{1212}$ eindeutig bestimmt.

6.4 Der Krümmungstensor

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei R der Krümmungstensor des Levi-Civita Zusammenhangs einer Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf M .

Definition: Mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensors R und der Metrik definiert man folgenden Tensor in $T^4(M)$

$$R(X, Y, Z, W) = -\langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Beachte das Vorzeichen!

Bemerkung: Gilt in lokalen Koordinaten $R_{ij}(\partial_k) = R_{ijk}^\alpha \partial_\alpha$ für den Riemannschen Krümmungstensor, dann ist der neue Tensor gegeben durch die Komponenten $R_{ijkl} = -g_{\alpha l} R_{ijk}^\alpha$.

Genauer⁶

$$R_{ijk}^l = \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^l - \partial_i \Gamma_{jk}^l - \Gamma_{jk}^\alpha \Gamma_{i\alpha}^l.$$

Für

$$G_{i,kj} = \sum_l g_{kl} \Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} [\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}]$$

betrachten wir Matrizen G_i mit den Einträgen $G_{i,kj}$. Die transponierte Matrix G_i^t erfüllt $G_i^t = -G_i + \partial_i g$.

Für die Matrix Ω_{ij} mit den Koeffizienten R_{ijkl} gilt dann ⁷

$$\Omega_{ij} = -\partial_j G_i + G_j^t g^{-1} G_i + \partial_i G_j - G_i^t g^{-1} G_j.$$

⁶ $R_{ijk}^l \partial_l = 2 \text{Alt}_{ij} \nabla^2(\partial_k) = 2 \text{Alt}_{ij} \nabla(dx^i \Gamma_{ik}^\alpha \partial_\alpha) = 2 \text{Alt}_{ij} dx^j \otimes dx^i ((\partial_j \Gamma_{ik}^\alpha) \partial_\alpha + \Gamma_{ik}^\alpha \Gamma_{j\alpha}^\beta \partial_\beta)$
⁷ $R_{ijkl} = g_{\alpha l} [\partial_i \Gamma_{jk}^\alpha + \Gamma_{im}^\alpha \Gamma_{jk}^m - \partial_j \Gamma_{ik}^\alpha - \Gamma_{jm}^\alpha \Gamma_{ik}^m] = 2 \text{Alt}_{ij} (g_{\alpha l} (\partial_i \Gamma_{jk}^\alpha) + g_{\alpha l} \Gamma_{im}^\alpha \Gamma_{jk}^m) = 2 \text{Alt}_{ij} (\partial_i (g_{\alpha l} \Gamma_{jk}^\alpha) - (\partial_i g_{\alpha l}) \Gamma_{jk}^\alpha + g_{\alpha l} \Gamma_{im}^\alpha \Gamma_{jk}^m) = 2 \text{Alt}_{ij} (\partial_i G_j - (\partial_i g) g^{-1} G_j + G_i^t g^{-1} G_j)_{kl}$, letzteres im Sinne von Matrixmultiplikation.

Theorem 3. Es gilt $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$ sowie

$$\begin{aligned} R(X, Y, U, V) &= R(Y, X, U, V) \\ R(X, Y, U, V) &= R(X, Y, V, U) \\ R(X, Y, U, V) &= R(U, V, X, Y). \end{aligned}$$

Beweis: Zum Beweis kann man ein beliebiges Koordinatensystem wählen. Das nächste Lemma zeigt dann in Normalkoordinaten, dass

$$-R(0) = A\left(\partial^2 g(0)\right)$$

im Bild \mathcal{B}^- der Kulkani-Nomizu Abbildung

$$A : S^2(V) \otimes S^2(V) \rightarrow \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V)$$

liegt. Die Eigenschaften von Theorem 3 gelten für jeden Tensor in \mathcal{B}^- , insbesondere also für $R(0)$ (Lemma 43).

Lemma 45. In Normalkoordinaten 1.Ordnung gilt

$$\boxed{-R_{ijkl}(0) = \frac{1}{2}[\partial_j \partial_l g_{ki} - \partial_j \partial_k g_{il} - \partial_i \partial_l g_{kj} + \partial_i \partial_k g_{jl}](0)}.$$

Beweis: $(\Omega_{ij})_{kl}(0) = -\frac{1}{2}\partial_j[\partial_i g_{kl} + \partial_l g_{ki} - \partial_k g_{il}](0) + \frac{1}{2}\partial_i[\partial_j g_{kl} + \partial_l g_{kj} - \partial_k g_{jl}](0)$. Also $-R_{ijkl}(0) = \frac{1}{2}[\partial_j \partial_l g_{ki} - \partial_j \partial_k g_{il} - \partial_i \partial_l g_{kj} + \partial_i \partial_k g_{jl}](0)$. Beachte $G_i(0) = 0$ in Normalkoordinaten 1.Ordnung sowie $(\Omega_{ij})_{kl}(0) = R_{ijkl}(0)$.

Beispiel $N = 2$: In Normalkoordinaten 1.Ordnung gilt also

$$R_{1212}(0) = \partial_x \partial_y g_{12}(0) - \frac{1}{2}\partial_x \partial_x g_{22}(0) - \frac{1}{2}\partial_y \partial_y g_{11}(0).$$

Weiterhin $R_{1212}(0) = \lambda_1 \lambda_2$ für $g(x) = 1 + \begin{pmatrix} \lambda_1^2 x^2 & \lambda_1 \lambda_2 xy \\ \lambda_1 \lambda_2 xy & \lambda_2^2 y^2 \end{pmatrix}$. In Normalkoordinaten 2.Ordnung gilt ausserdem $R_{1212}(0) = -3\eta(0)$ (mit η wie in §4.2).

Korollar 18. In Normalkoordinaten 1.Ordnung gilt

$$\boxed{g_{jl}(x) = g_{jl}(0) - \frac{1}{3} \sum_{ik} R_{ijkl}(0) x^i x^k + 0(x^3)}.$$

Beweis: Aus $-R = A(\partial^2 g)(0)$ (Lemma 45) und $S \circ A = 3 \cdot id$ (Lemma 42) folgt $(\partial^2 g)(0) = \frac{1}{3}S(-R)$. Das heisst $\partial_i \partial_k g_{jl}(0) = -\frac{1}{6}(R_{ijkl}(0) + R_{kjil}(0))$.

6.5 *Der Krümmungstensor II

Betrachtet man die Taylorentwicklung des Riemannschen Krümmungstensors in einem lokalen Normalkoordinatensystem, dann definieren die Werte

$$(\partial^r R)(0) \in \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(V^*)$$

lokale Tensoren. Die Bianchi Identitäten des Krümmungstensors R implizieren $Alt_{123}(\partial^r R)(0) = 0$.⁸

Lemma 46. *In einem beliebigen Koordinatensystem zerlegt sich der Tensor $R(x) = R_{ijkl}(x)$ in zwei formale 'lokale' Tensoren $R(x) = T(x) + S(x)$ für*

$$T(x) = -A\left(\partial^2 g(x)\right),$$

und $S(x)$, gegeben durch $S_{ijkl}(x) = (G_j^t g^{-1} G_i - G_i^t g^{-1} G_j)_{kl}$.

Die beiden Terme T und S definieren keine globalen Tensoren. Andererseits kann man sie als lokale Tensoren unter linearen Koordinatentransformationen des Koordinatensystems aus der Gruppe $Gl(V)$ auffassen!

In Normalkoordinaten erfüllen die Taylorkoeffizienten $g^{(r+2)}(x) \in S^2(V) \otimes \mathcal{P}^{r+2}(V^*)$ die erste Bianchi Identität. Das heisst genauer:

$$\partial^2 g(x) \in S^2(V) \otimes S^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(V^*)$$

erfüllt diese Bianchiidentität. Der r -te formale Taylorkoeffizienten des Riemannschen Tensors in $\Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(V^*)$ erfüllt auch die erste Bianchiidentität. Das Korollar folgt daher aus Lemma 42 durch Projektion auf die Unterräume $R^{r+2,2}(V) \subseteq \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(V) \otimes \mathcal{P}^r(V^*)$

Korollar 19. *In einem Normalkoordinatensystem 1.Ordnung mit $g(0) = 1$ bestimmen die Taylorkoeffizienten $\partial^r R_{ijkl}(0)$ (für alle $r \geq 0$) die formale Metrik $g(x)$ eindeutig.*

Beweis: In Normalkoordinaten 1.Ordnung lassen sich die r -ten Taylorkoeffizienten $S(x)$ und ihre Projektionen rekursiv bestimmen aus den $\partial^\nu g(0)$ für $\nu < r$ und der Ableitung $\partial^{r-2} R(0)$.

⁸Die zweite Bianchi Identität gilt für $(\partial^r R)(0)$ im Fall $r > 1$ im allgemeinen nicht mehr!

Kapitel 7

Geometrische Bedeutung der Krümmung

7.1 Vorbemerkung

Im ersten Abschnitt definieren wir die Schnittkrümmungen. Dies sind eine Größen, welche in einem Punkt P sowie der Richtung einer zweidimensionalen Teilfläche des Tangentialraums zugeordnet sind. In der Tat handelt es sich dabei um die Krümmung der Einschränkung der Metrik auf eine infinitesimale zweidimensionale total geodätische Teilfläche (bis auf einen Normierungsfaktor, der durch die Metrik gegeben wird).

Zwei Dinge sind hierbei von Bedeutung: 1) Der Riemannsche Krümmungstensor (zusammen mit der Metrik) bestimmt die Schnittkrümmungen. Der Riemannsche Krümmungstensor kann aber aus der Kenntnis aller Schnittkrümmungen rekonstruiert werden. 2) Die Schnittkrümmung ist die Krümmung in einem zweidimensionalen Raum. Für zweidimensionale Räume hat die Krümmung eine einfache Deutung, da sie in geodätischen Dreiecken misst, in wie weit die Winkelsumme im Dreieck von 180 Grad abweicht. Dies liefert der Satz von Gauss-Bonnet, dessen Beweis im zweiten Abschnitt auf den Fall von Räumen mit konstanter Krümmung zurückgeführt wird. Im hyperbolischen Fall wird er dann im 3.Paragraph nachgewiesen. Der Kugelfall ist ähnlich.

Danach wird das Theoremum Egregium im 5.Paragraph bewiesen. Es folgt ein Ausblick, in dem die 2.Fundamentalform eingeführt wird und die Gaussgleichung beziehungsweise Mainardi-Codazzigleichung diskutiert wird, allerdings nur exemplarisch im Fall von Hyperflächen im euklidischen Raum. Dies ist aber im Prinzip bereits der typische Fall.

7.2 Die Schnittkrümmung

Sei M eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Der spezialisierte Tensor $R(u, v, u, w)$ ist symmetrisch in v und w . Wir können daher schreiben

$$\boxed{R(u, v, u, w) = \langle \sigma_u(v), w \rangle = \langle v, \sigma_u(w) \rangle}$$

für eine selbstadjungierte Matrix σ_u . Ist V der Kotangententialraum im Punkt P , dann liegt σ_u in $S^2(V) \otimes \text{End}(V)$.

Der Endomorphismus σ_u hängt quadratisch von u ab. $\text{Tr}_g(\sigma_u) = \langle \sigma_u(\cdot), \cdot \rangle$ bestimmt die (13)-Symmetrisierung des Riemannschen Krümmungstensors $R = R(u, v, u', v')$ durch Polarisieren in u . Die (13)-Symmetrisierung des Tensors $R(P)$ im Punkt P legt aber den Krümmungstensor $R(P)$ im Punkt P schon eindeutig fest (Lemma 42).

$$\Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \ni R \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{2}{3}S_{13}S_{24}} \\ \xleftarrow{2A_{12}A_{34}} \end{array} \text{Tr}_g(\sigma) \in S^2 \otimes S^2$$

Anders betrachtet: $R(u, v, \tilde{u}, \tilde{v}) = R(u \wedge v, \tilde{u} \wedge \tilde{v}) = R(\omega, \tilde{\omega})$ ist eine symmetrische Bilinearform auf $\Lambda^2(V)$. Die Metrik g induziert eine Metrik $\Lambda^2(g)$ auf $\Lambda^2(V)$. Explizit:

$$\|\omega\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2, \quad \omega = u \wedge v.$$

Ist g definit, dann auch die induzierte Metrik. Den Quotient

$$\boxed{\kappa(\omega) = \frac{R(\omega, \omega)}{\|\omega\|^2}}, \quad \omega = u \wedge v$$

nennt man dann die Schnittkrümmung $\kappa(\omega)$ in Richtung von $\omega = u \wedge v$. Also

$$g(\sigma_u v, v) = \kappa(u \wedge v) \cdot \|u\|^2\|v\|^2$$

für orthonormale Vektoren u und v .

Beispiel: Im 2-dimensionalen Fall ist jeder Tensor in $\mathcal{T}^{2,2}(M)$ von der Gestalt $\kappa \cdot \det(g)$ für eine Funktion κ auf M . Dies gilt somit auch für den Krümmungstensor. Die Funktion κ erhält man durch Einsetzen von $\omega = e_1 \wedge e_2$. Dies liefert für κ

$$\kappa(e_1 \wedge e_2) = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{R_{1212}}{\det(g)}.$$

Sind also e_1 und e_2 orthonormale Tangentialvektoren, so gilt $\kappa(e_1 \wedge e_2) = R_{1212}$.

Rekonstruktion: Für Vektoren u, v und w aus einer Orthogonalbasis folgt $R(u, v, u, w) = \frac{1}{2}[R(u, v + w, u, v + w) - R(u, v, u, v) - R(u, w, u, w)]$, also

$$R(u, v, u, w) = \kappa(u \wedge (v + w)) - \frac{1}{2}\kappa(u \wedge v) - \frac{1}{2}\kappa(u \wedge w).$$

Daher ist σ_u , und damit auch R , vollkommen durch die Kenntnis aller Schnittkrümmungen festgelegt. Folglich gilt: Konstante Schnittkrümmung¹ ist äquivalent zu konstanter Krümmung.

Es folgt

Lemma 47. *Äquivalent sind*

- Die Schnittkrümmung $\kappa = \rho^2$ ist konstant für $\rho \in \mathbb{C}$.
- $R(\omega, \omega) = \rho^2 \cdot \|\omega\|^2$ für alle $\omega = u \wedge v$
- $R = \rho^2 \cdot (g \ominus g)$ (siehe §6.3)
- $\sigma_u = \rho^2 \cdot \|u\|^2 \cdot pr_{u^\perp}$ für alle u . (Hierbei bezeichne pr_{u^\perp} die Projektion auf das Orthokomplement von u).

Beweis: Für die letzte Aussage beachte $(g \ominus g)(v_1, v_2, v_3, v_4) = \langle v_1, v_3 \rangle \langle v_2, v_4 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle \langle v_1, v_4 \rangle$. Somit $(g \ominus g)(u, v, u, w) = \langle v, \|u\|^2 w - u \langle w, u \rangle \rangle = \langle v, \sigma_u(w) \rangle$. Dies zeigt die letzte Äquivalenz.

Bemerkungen: Die Schnittkrümmung $\kappa(u \wedge v)(P)$ kann durch Einschränkung auf eine in P total geodätische² 2-dimensionale Teilfläche $\tilde{M} \subseteq M$ mit Tangentialebene $\mathbb{R} \cdot u \wedge v$ ausgerechnet werden (Korollar 1). Im zweidimensionalen kann die Schnittkrümmung durch Winkelmessungen (Paragrah § 7.3) bestimmt werden! Zusammen mit dem obigen Rekonstruktionsverfahren ergibt dies ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung des Krümmungstensors.

¹Reskaliert man g zu λg , durch einen Skalar λ , reskaliert sich die Schnittkrümmung mit λ^{-1} .

²Ist $i : \tilde{M} \hookrightarrow M$ total geodätisch im Punkt P , dann gilt $R_{\tilde{M}}(P) = i^*(R_M)(P)$. Die die Tensoren sind, genügt es dies in einem geeigneten Koordinatensystem zu zeigen. Für $P \in \tilde{M}$ sind geodätische Normalkoordinaten in M eingeschränkt auf \tilde{M} solche für \tilde{M} . Da in solchen Koordinaten der Krümmungstensor durch $\partial^2 g(P)$ ausgerechnet werden kann, folgt die Behauptung.

7.3 Gauss-Bonnet

Satz 9. Für eine (triangulierte) kompakte orientierte Riemannsche Fläche M gilt

$$\int_M \kappa \, d\mu = 2\pi\chi(M)$$

für die Eulercharakteristik $\chi(M) = |F| - |K| + |E|$, wobei $|F|$, $|K|$, $|E|$ die Zahl der Flächen, Kanten und Ecken der Triangulierung bezeichne.

Wir betrachten allgemeiner geodätische Polygone P , welche in einer Kugel innerhalb einer euklidischen Karte enthalten seien³. Für ein r -Gon mit r geodätischen Aussenkanten und Innenwinkeln $\alpha_i \neq 0$ an den äusseren Eckpunkten des r -Gons (innen ist wohldefiniert!) gilt

Satz 10.
$$\int_P \kappa \, d\mu = 2\pi - r \cdot \pi + \sum_{i=1}^r \alpha_i$$

Bemerkung: Die Bildungen auf der rechten Seite der Formeln sind ‘additiv’. Das heisst es genügt – mittels einer Zerschneidung von P – die Formeln für geodätische Dreiecke zu beweisen.

Beweisskizze: Schritt 1. Wegen der Additivität des Defekts $D(P) = \int_P \kappa \, d\mu - (2\pi - r \cdot \pi + \sum_{i=1}^r \alpha_i)$ genügt es $D(\Delta) = 0$ für kleine Dreiecke Δ zu beweisen, d.h. geodätische Dreiecke welche in einer beliebig klein gewählten strikt konvexen Umgebung U eines ihrer Eckpunkte P enthalten sind.

2.Schritt: Seien $\Delta_t \subseteq U$ geodätische Dreiecke mit fester Ecke $P = A_1$, wobei die Ecken glatt von t abhängen mit $\lim_{t \rightarrow 0} a_i(t) = 0$ für die Länge $a_i(t)$ der Kanten welche dem Winkel $\alpha_i(t)$ gegenüber liegt. Gegeben: Der Winkel $\alpha_2(t)$, der Punkt A_1 sowie der Punkt $A_2(t)$ und $a_1(t)$. Wir nehmen an $\alpha_2(0) \neq 0, \frac{\pi}{2}$ und $\dot{a}_1(0) \neq 0$.

3.Schritt: Wir wählen in der festen Ecke $P = A_1$ geodätische Normalkoordinaten. Wir behaupten nun für den Defekt⁴

$$D(\Delta_t) = O_g(t^2).$$

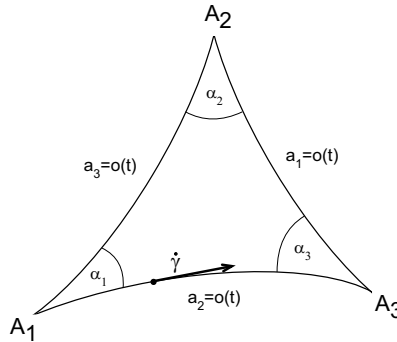
³Ein radiales geodätischen 2-Gon auf einem Autoreifen ist beispielsweise damit nicht zugelassen!

⁴ $O_g(t^n)$ bedeute: $O(t^n)$ und der Taylorterm der Ordnung n hängt in Normalkoordinaten bei P nur von den Ableitungen von g der Ordnung 2 und von $\alpha_2(0)$, $\dot{a}_3(0)$ und $\dot{a}_1(0)$ ab.

Insbesondere existiert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{D(\Delta_t)}{t^2}$$

und hängt nur von $\alpha_2(0)$, $\dot{a}_3(0)$, $\dot{a}_1(0)$ und der Schnittkrümmung $\kappa(P)$ ab.



Begründung: Die Winkelmessung in den Ecken A_i ist euklidisch mod $O_g(t^2)$ nach §4.2. Das euklidische geodätische Dreieck $\Delta_{t,st}$ unterscheidet sich nur um die Ecke A_3 . Die relevante Kante A_2A_3 ist durch die Geodäte von $A_2 = \gamma(0)$ nach $A_3 = \gamma(s)$ gegeben, und nicht durch eine Gerade (die anderen beiden Kanten sind Geraden). In erster Näherung also

$$\gamma(s) = A_2(t) + s \cdot \dot{\gamma}(0) - \frac{1}{2} \Gamma_{A_2(t)}[\dot{\gamma}(0)]s^2 + \frac{1}{6} \ddot{\gamma}(0)s^3 + O(s^4).$$

Beachte s ist die Bogenlänge. Im Punkt $A_3(t)$ ist die Bogenlänge gleich $s = a_1(t) = \lambda t + O(t^2)$. ObdA nun $s = a_1(t)$ mit $a_1(0) = 0$. Dann gilt

$$A_3(t) \equiv A_{3,euklid}(t) \text{ modulo } O_g(t^3)$$

für $\gamma_{st}(s) = A_2(t) + s \cdot \dot{\gamma}(0)$, wobei $A_{3,euklid}(t) = \gamma_{st}(a_1(t))$ das euklidische geradlinige Dreieck definiert.

Begründung⁵: Beachte $-\frac{1}{2}\Gamma_{A_2(t)}[\dot{\gamma}(0)]s^2|_{s=t} \equiv -\frac{1}{2}\dot{\gamma}^\nu(0)(\partial_\nu\Gamma)_0[\dot{\gamma}(0)]\dot{a}_2(0)t^3$. Die dritte Ableitung von γ nach s im Punkt $s = 0$ involviert $\dot{\gamma}^\nu(0)(\partial_\nu\Gamma)_{A_2(t)}[\dot{\gamma}(0)]$ und $-2\Gamma_{A_3(t)}\langle\dot{\gamma}(0), \ddot{\gamma}(0)\rangle$. Für $s = t$ kann aber wegen des Term $s^3 = t^3$ in der Taylorentwicklung $A_2(t)$ obdA durch $A_3(0) = 0$ ersetzt werden kann. Das heisst es treten in allen Koeffizienten nur höchsten Terme von $\partial^2g(0)$ auf. Dies zeigt die Behauptung.

Beachte

$$\cos(\alpha_{3,st}(t)) = \frac{\langle\dot{\gamma}(t), \gamma(t)\rangle_{st}}{\|\dot{\gamma}(t)\|_{st}\|\gamma(t)\|_{st}} = \frac{\frac{d}{dt}\|\gamma(t)\|_{st}}{\|\dot{\gamma}(t)\|_{st}}.$$

Aber $\|\dot{\gamma}(t)\|_{st} \equiv \|\dot{\gamma}(t)\| \pmod{O_g(t^2)}$. Wegen $\|\dot{\gamma}(t)\| = 1$ für Geodäten folgt also $\|\dot{\gamma}(t)\|_{st} \equiv 1 \pmod{O_g(t^2)}$. Somit

$$\cos(\alpha_{3,st}) \equiv \frac{d}{dt}\|A_3(t)\|_{st}.$$

Wegen $A_3(t) \equiv A_{3,euklid}(t)$ modulo $O_g(t^3)$ unterscheidet sich die rechte Seite von $\frac{d}{dt}\|A_{3,eukl}(t)\|_{st}$ nur um einen Term vom Typ $O_g(t^2)$. Ähnlich – aber einfacher – zeigt man $\cos(\alpha_{1,st}(t)) \equiv \cos(\alpha_{1,euklid}) \pmod{O_g(t^2)}$.

4.Schritt: Durch Taylorentwicklung des Cosinus $\cos(\alpha + \varepsilon) = \cos(\alpha) - \sin(\alpha)\varepsilon \dots$ zeigt dies, dass sich die Winkel $\alpha_{i,st}$ von den Winkeln des euklidischen Dreiecks nur um Terme vom Typ $O_g(t^2)$ unterscheiden. Das Integral $\int_{\Delta_t} \kappa d\mu_g$ ist vom Typ $O_g(t^2)$. Also $D(\Delta_t) = D(\Delta_{st}) = 0$ modulo $O_g(t^2)$.

5. Schritt. Durch Unterteilung eines festen geodätischen Dreiecks in kleinere geodätische Dreiecke kann man wie beim Satz von Goursat mit einem Schubfachschluss und Intervallschachtelung zeigen: Wäre der Satz falsch, dann gäbe es einen Punkt P im Inneren, eine Folge von geodätischen Dreiecken Δ_t mit P im Inneren, so dass gilt

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{D(\Delta_t)}{t^2} \neq 0$$

Durch geeignetes Zerteilen in 3 weitere Dreiecke kann obdA angenommen werden, dass dabei P ein Eckpunkt von Δ_t ist.

Text zum Bild: In einem geodätischen strikt konvexen kleinen Gebiet lassen sich Dreiecke wie im euklidischen Fall unterteilen. Überschneidungen wie in Bild ...

⁵Hier ist es profitabel in Termen unendlich kleiner Grössen zu denken (Nonstandardanalysis)

sind nicht möglich. Oder benutze Abbildungen vom Typ $\exp_{\gamma(s)}(t\eta)$ für festes ξ, η (Anderenfalls gäbe es zwei verschiedene Geodäten von Q nach Q' innerhalb der strikt konvexen Menge. Widerspruch!

Schritt 6. Nach Schritt 3 existiert der Grenzwert und hängt nur von den zweiten Ableitungen von g im Punkt $P = 0$ ab, also der Krümmung $\kappa(P)$ ab. Man kann daher (M, g, P) durch einen beliebigen Raum mit derselben Krümmung in P ersetzen. Es genügt den Grenzwert daher in einem Raum konstanter Krümmung auszurechnen. Gilt der Satz von Gauss-Bonnet im Fall konstanter Krümmung, dann ist der Limes Null im Widerspruch zu obiger Annahme. Somit gilt der Satz generell.

Schritt 7. Explizite Rechnungen für Räume mit konstanter Krümmung, also Kugel und hyperbolischer Raum $(H, y^{-2}E)$! Durch Zerschneidung kann man sich auf einfache Dreiecke beschränken. Den Fall konstanter negativer Krümmung diskutieren wir im nächsten Abschnitt. Der Fall der Kugel bleibt als Übungsaufgabe.

7.4 Die hyperbolische Ebene

Die komplexe obere Halbebene aller $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $Im(z) > 0$ versehen mit der Metrik $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$. Die Schnittkrümmung daher konstant, denn die Gruppe $Sl(2, \mathbb{R})$ der Möbiustransformationen operiert transitiv durch isometrische Abbildungen, d.h. es gilt $M^*(g) = g$. Beachte nämlich

$$\frac{Im(M(z))}{Im(z)} = |cz + d|^{-2} = \left| \frac{dM(z)}{dz} \right| \quad \text{für} \quad M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Somit operiert die Gruppe $Sl(2, \mathbb{R})$ auf der Menge der Geodäten. Die Winkel der hyperbolischen Geometrie stimmen mit den Winkeln der euklidischen Metrik überein, da g in jedem Punkt ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Für zwei Punkte auf der y -Achse ist die y -Achse ein verbindende Geodäte mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (0, e^t)$ (siehe §1.11). Diese hat Winkel 90 Grad zur x -Achse. Wegen Konformität gilt daher

Geodäten (durch zwei gegebene Punkte) sind die eindeutig bestimmten Halbkreise durch diese Punkte, welche die x -Achse senkrecht schneiden, d.h. deren Mittelpunkt auf der x -Achse liegt. Kreise gehen unter Möbiustransformationen in Kreise über, da sie durch Gleichungen

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}' H \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

für hermitesch symmetrische Formen H beschrieben werden können. Geodäten entsprechen den reell symmetrischen Matrizen H mit $\det(H) \neq 0$, welche indefinit sind.

Bemerkung: Die Geodäten der hyperbolischen Ebene erfüllen die Axiome einer Geradengeometrie: Je zwei Geraden schneiden sich in höchstem einem Punkt. Durch je zwei Punkte gibt es genau eine Gerade. Das Parallelenaxiom gilt in der hyperbolischen Ebene jedoch nicht, wie man leicht sieht!

Flächeninhalte: Sei $Q = (x_1, y_2)$ und $Q' = (x_2, y_2)$ Punkte auf einem geodätischen Kreis (im Bild gestrichelt) mit $x_2 > x_1$. Die hyperbolische Fläche der Kreisvorkappe, der Schnitt des Kreisinneren mit $\{Im(z) \geq y_2\}$, ist gleich

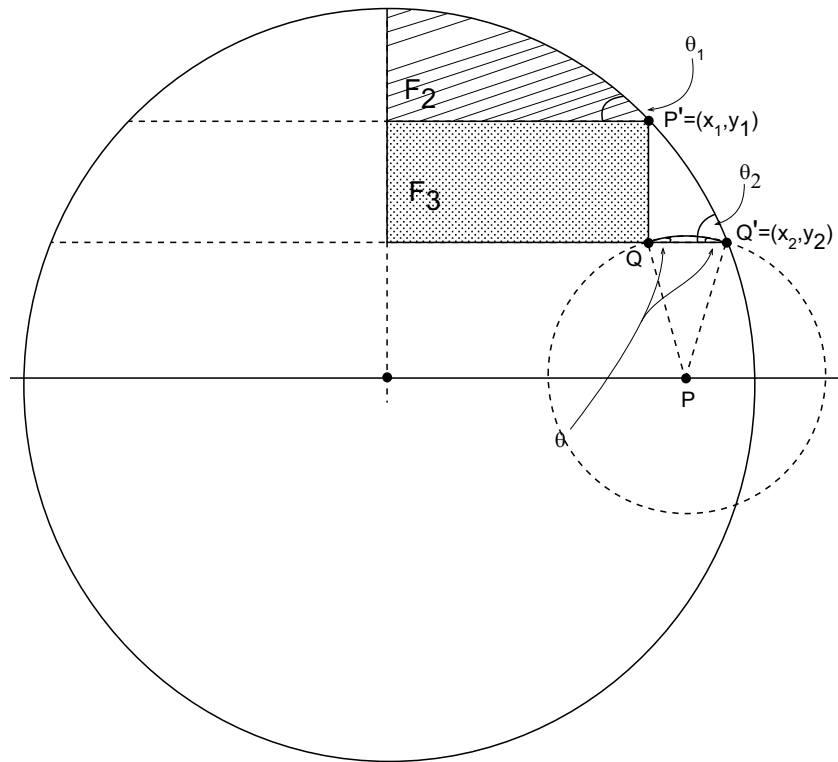
$$F_4 = \frac{x_2 - x_1}{y_2} - 2\theta,$$

wobei 2θ der euklidische Winkel bei $P = (\frac{x_2-x_1}{2}, 0)$ zwischen den Geraden nach Q und Q' ist. Die beiden Sektorwinkel der Kreisvollkappe sind beide gleich θ .

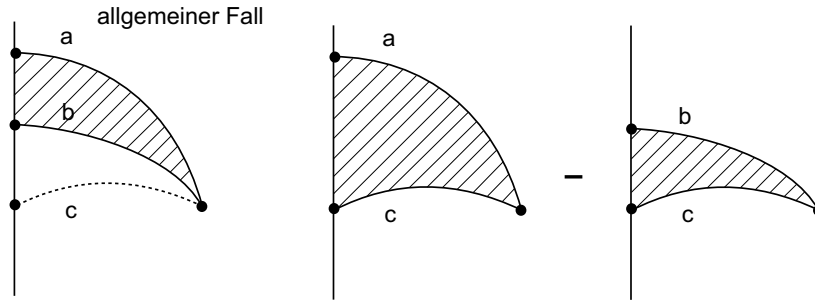
Beweis: ObdA $x_1 = -x_2$. (Dann ist man obdA in der Situation des grossen ungestrichelten Kreises des nächsten Bildes. Die zu berechnende Fläche entspricht dem doppelten des hyperbolischen Flächeninhalts F_2 der rechten oberen schraffierten Kreishalbkappe; P' entspricht Q')

$$\int_{F_2} \frac{dx dy}{y^2} = \int_y^r \sqrt{r^2 - y^2} \frac{dy}{y^2} = -\frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y} - \arcsin(y/r) \Big|_y^r = \frac{x_2}{y_2} - \theta.$$

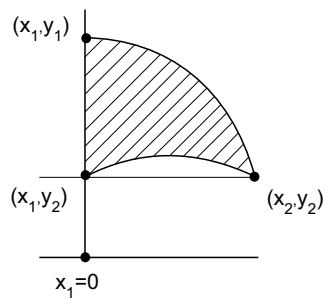
Dies zeigt die Behauptung.



Zerlegung in spezielle Dreiecke: Ein beliebiges geodätisches Dreiecks (obdA sei eine Seite vertikal) kann durch Zerschneiden zusammengesetzt aus zwei speziellen geodätischen Dreiecken mit Ecken $P' = (x_1, y_1)$, $Q = (x_1, y_2)$ und $Q' = (x_2, y_2)$. Ein Dreieck heisse speziell, wenn gilt: zwei Punkte die selbe y -Koordinate und zwei dieselbe x -Koordinate.



Spezielle Dreiecke: Für ein spezielles geodätisches Dreieck mit den Ecken $P' = (x_1, y_1)$ und $Q' = (x_2, y_2)$ (für $y_2 < y_1$)



ist die hyperbolische Fläche gleich $F = F_1 - F_2 - F_3 - F_4$ (F ist die Fläche des weissen Dreiecks im ersten Bild). Hierbei gilt

- $F_1 = \frac{x_2}{y_2} - \theta_2$ (umfassende grosse rechte Halbkappe)
- $F_2 = \frac{x_1}{y_1} - \theta_1$ (obere schraffierte kleine rechte Halbkappe)
- $F_3 = \frac{x_1}{-y} \Big|_{y_2}^{y_1}$ (Das Quadrat in der grossen Halbkappe)
- $F_4 = \frac{x_2 - x_1}{y_2} - 2\theta$ (kleine untere Vollkappe mit Ecken Q und Q')

Dies gibt $F = 2\theta + \theta_1 - \theta_2$ oder

$$F = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

für die drei Innenwinkel α_i des geodätischen Dreiecks.

Krümmung: Der hyperbolische Raum hat konstante negative Krümmung. Nach §1.11 ist $R_{1212} = y^{-2}$. Im Punkt $i = (0, 1)$ ist die Metrik 1. Also $\kappa(i) = -R_{1212}(i) = -R_{121}^2(i) = -1$

$$\kappa = -1 .$$

Obige Berechnung zeigt daher den Satz von Gauss-Bonnet (siehe §7.3).

7.5 Hyperflächen

Wir betrachten glatte Hyperflächen M im \mathbb{R}^3 mit dem Pullback der Euklidischen Standardmetrik. Für einen Punkt $P \in M$ ist in geeigneten Koordinaten die Fläche M lokal bei P parametrisiert durch

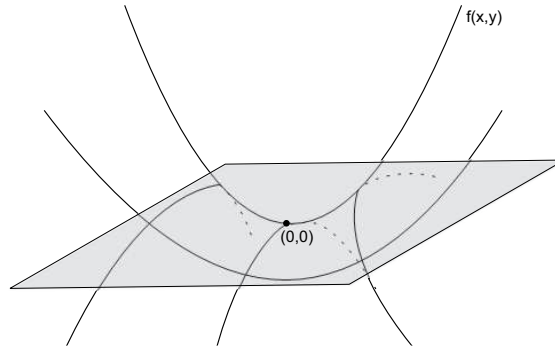
$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)).$$

oder allgemeiner $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ mit $F(v) = (v, f(v))$.

ObdA: $P = 0$ und $f(0) = f'(0) = 0$ und durch Hauptachsentransformation

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2) + \dots$$



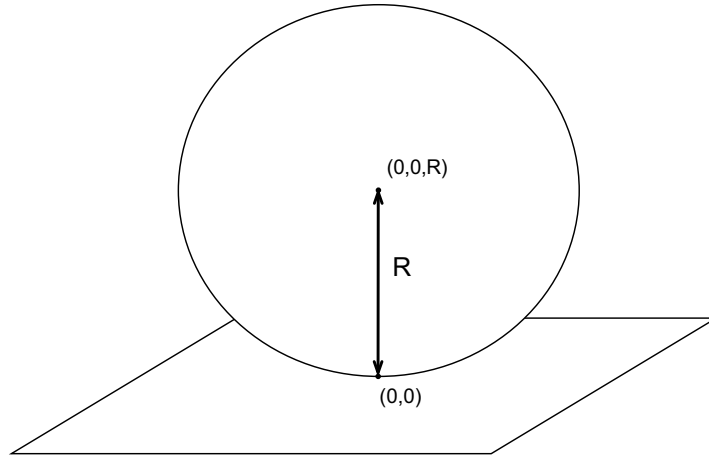
Die Jacobimatrix ist $J(F, (x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 x + \dots \\ 0 & 1 & \lambda_2 y + \dots \end{pmatrix}'$. Der Pullback der euklidischen Standardmetrik ist $g_{(x,y)} = J(F, (x, y))' \circ J(F, (x, y))$ ist

$$g_{(x,y)} = 1 + \begin{pmatrix} \lambda_1^2 x^2 & \lambda_1 \lambda_2 xy \\ \lambda_1 \lambda_2 xy & \lambda_2^2 y^2 \end{pmatrix} + \dots$$

Die Projektion von M auf die xy -Ebene liefert also Normalkoordinaten 1. Ordnung auf M bei P . Somit ist die Krümmung $R_{1212}(0)$ im Punkt $P = 0$ nach Lemma 46 und § 6.3 gleich

$$R_{1212}(0) = \lambda_1 \lambda_2.$$

Analog für $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$.



Die Kugel vom Radius R : $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$.

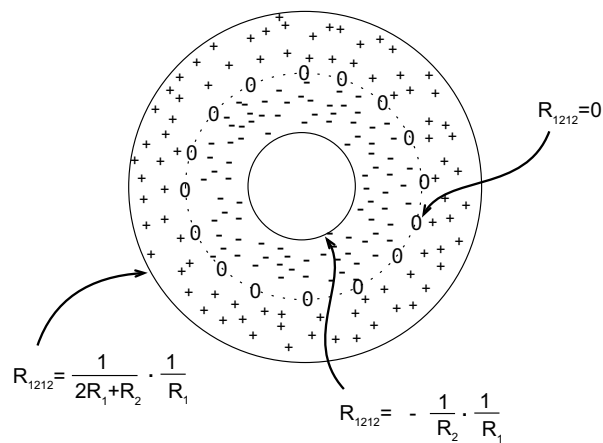
Also $z = f(x, y)$ für $f(x, y) = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ und damit

$$f(x, y) = \frac{1}{2}R^{-1}(x^2 + y^2) + \dots$$

Folglich ist die Krümmung der Kugel gleich

$$R_{1212} = \frac{1}{R^2}.$$

Für Ellipsen (oder Hyperboloiden) mit Achsen R_1, R_2 gilt analog $R_{1212} = \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2}$.



Korollar 20. Die Kugel im \mathbb{R}^N vom Radius R mit der Standardmetrik hat konstante Schnittkrümmung $\kappa = \frac{1}{R^2}$.

Beweis: Es genügt dies zu zeigen für alle Schnitte mit 2-dimensionalen Ebenen.

Lorentzfall: Sei allgemeiner $\mathbb{R}^{N,1}$ der Lorentzraum mit $\|(x, t)\|_{st} = r^2 - t^2$ und $r^2 = x'x$. Der Hyperboloid M aller (x, t) im vorderen Lichtkegel mit $t^2 - r^2 = 1$ ist ein Orbit unter der Isometriengruppe $SO(N, 1)^0$. Der Pullback $g(x)$ auf M von der Lorentzmetrik ist definit und definiert den hyperbolischen Raum der Dimension N .

Beachte $SO(2, 1)^0 \cong Sl(2, \mathbb{R})$ ist die Gruppe der Möbiustransformationen. In der Tat ist in diesem Fall der hyperbolische Raum isometrisch zur oberen Halbebene mit der Metrik $y^{-2}(dx^2 + dy^2)$.

Lemma 48. Der hyperbolische Raum hat konstante Schnittkrümmung $\kappa = -1$.

Beweis: Da die Isometriengruppe $SO(N, 1)^0$ transitiv auf M operiert, genügt es den Punkt $(0, \dots, 0, 1) \in M$ zu betrachten. Dann gilt analog zu oben $t = f(x) = 1 + \frac{r^2}{2} + \dots$ mit $\lambda_i = 1$ und F resp. DF wie zuvor, jetzt aber im Unterschied zu oben $g(x) = J(F, x)' \circ g_{Lorentz} \circ J(F, x)$. Also

$$g_{(x,y)} = 1 - \begin{pmatrix} \lambda_1^2 x^2 & \lambda_1 \lambda_2 xy \\ \lambda_1 \lambda_2 xy & \lambda_2^2 y^2 \end{pmatrix} + \dots$$

(obdA $N = 2$). Die Behauptung folgt daher aus Lemma 46, das zeigt dass die Schnittkrümmung das Negative der Schnittkrümmung $\kappa = 1$ der Kugel (Korollar 20) sein muss.

Der Lorentzfall: Für die Form vom Sylvestertyp $(2, N - 1)$ kann man auf analoge Weise eine Lorentzmannigfaltigkeit der Dimension N mit konstanter Krümmung konstruieren! Oder durch den raumartigen Hyperboloid im Fall $(1, N - 1)$.

7.6 *Die zweite Fundamentalform

Eine glatte Abbildung $f : I \rightarrow M$ von Mannigfaltigkeiten, welche eine exakte Sequenz von Vektorbündeln auf I definiert

$$0 \rightarrow TI \xrightarrow{f_*} f^*(TM) \xrightarrow{\nu} N \rightarrow 0 ,$$

nennt man eine glatte Immersion. Entscheidend ist dabei die Injektivität von f_* . Man nennt den Quotient $N = f^*(TM)/f_*(TI)$ das Normalenbündel von I in M .

Ist g eine Riemannsche Metrik⁶ auf M , dann definiert der Pullback eine definite Metrik $h = f^*(g)$ auf $f^*(TM)$. Die orthogonalen Projektionen p_I und p_N bezüglich der Metrik h definieren eine Spaltung

$$f^*(TM) \cong TI \oplus N$$

des Vektorbündels, so dass für die Metrik h gilt

$$h = h_I \oplus h_N .$$

Sei ∇ der Pullback des Levi-Civita Zusammenhangs (von g auf TM) auf $f^*(TM)$. Offensichtlich ist ∇ metrisch bezüglich der Pullback Metrik h auf $f^*(TM)$, denn $\nabla(h) = 0$ erhält man durch Pullback aus der entsprechenden Formel $\nabla_M(g) = 0$ (Lemma 9). Die orthogonale Retraktion p_I definiert einen Zusammenhang $\nabla_I = p_I \circ \nabla \circ f_*$ auf TI . Dieser ist offensichtlich metrisch bezüglich h_I , denn $\langle \nabla Y, f_* X \rangle_h = \langle p_I \nabla Y, f_* X \rangle_h$.

Lemma 49. *Der Zusammenhang $\nabla_I = p_I \circ \nabla \circ f_* = p_I \circ f^*(\nabla_M) \circ f_*$ auf TI ist der Levi-Civita Zusammenhang der Metrik h_I von TI .*

Beweis: Da ∇_I metrisch ist, bleibt für alle Vektorfelder $X, Y \in T(I)$ zu zeigen

$$\boxed{(\nabla_I)_X Y - (\nabla_I)_Y X = [X, Y]} .$$

Die Aussage ist lokal auf I . Wir können daher annehmen $I \subseteq \mathbb{R}^N$ und $M \subseteq \mathbb{R}^M$ seien offene Teilmengen des Euklidischen Raums. Betrachte die Abbildung $f_* :$

⁶oder eine beliebige Metrik, deren Einschränkung $h = f^*(g)$ auf TI nichtausgeartet ist in jedem Punkt von I

$TI \rightarrow f^*TM$ und f_*X, f_*Y in $f^*(TM)(I)$. In §1.17 haben wir gezeigt $\nabla_X f_*Y - \nabla_Y f_*X = f_*[X, Y]$. Anwenden des Retraktes p_I liefert wegen $p_I(f_*[X, Y]) = [X, Y]$ und $p_I \nabla_X f_* = (\nabla_I)_X$ etc. die Behauptung.

Das obige Argument zeigt etwas allgemeiner

Korollar 21. $f^*(\nabla)_X f_*Y - f^*(\nabla)_Y f_*X = f_*[X, Y]$ gilt für beliebige glatte Abbildungen $f : N \rightarrow M$.

Korollar 22. Der Operator $S(X, Y) = f^*(\nabla)_X f_*Y - (\nabla_I)_X Y$ definiert eine symmetrische $C^\infty(I)$ -Bilinearform mit Werten in $N(I)$

$$S : T(I) \times T(I) \longrightarrow N(I).$$

Man nennt $S \in (T^* \otimes T^* \otimes N)(I)$ die 2.Fundamentalform auf $T(I)$. Diese hat Werten in N .

Beweis: Die Symmetrie von S folgt aus dem vorigen Korollar und der bereits bewiesenen Torsionsfreiheit von ∇_I . In X ist S natürlich $C^\infty(I)$ -linear. Wegen der Symmetrie von S ist S auch $C^\infty(I)$ -linear in Y . Per Definition hat S Werte in $f_*(TM)$ und erfüllt $p_I(S(X, Y)) = 0$. Also hat S Werte im Kern von p_I , welcher mittels der Abbildung $\nu : f^*TM \rightarrow N$ stillschweigend mit dem Normalenbündel $N(I)$ indentifiziert wird.

7.7 *Die Mainardi-Codazzi und Gaussgleichungen

Sei $F : I \rightarrow M$ eine Immersion. Seien h_I und $g = g_M$ Metriken mit $F^*(g) = h_I$ und S die zugeordnete 2.Fundamentalform auf TI (siehe letzter Abschnitt).

Satz 11. Die Krümmung R_I von ∇_I berechnet sich aus der Krümmung von R von ∇ und der zweiten Fundamentalform S durch die Gaussgleichung⁷

$$R_I = R - S \underset{g}{\ominus} S .$$

Weiterhin liegt $R(X, Y)Z + (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z)$ für alle $X, Y, Z \in TI$ im Kern der Abbildung $\nu : f^*(TM)(I) \rightarrow N(I)$ (Mainardi-Codazzi-Formel).

Beweis: (nur im Fall der Kodimension 1 für $M = \mathbb{R}^{N+1}$ mit der konstanten Metrik g , also für Hyperflächen I im \mathbb{R}^{N+1} . Der allgemeine Fall geht analog). Sei also lokal $I = \mathbb{R}^N$ und $M = \mathbb{R}^{N+1}$ und $F : I \rightarrow M$ für $x \in I$

$$F(x) = (x, f(x)) .$$

Die Gaussgleichung wurden dann implizit bereits in §7.5 gezeigt.

Berechnung von S : Wegen $F_*(\partial_i) = 1 \cdot \partial_i + (\partial_i f)(x) \cdot \partial_{N+1}$ (Pushforward) und $\text{Bild}(F_*) = \text{Kern}(\nu)$ gilt $\nu(\lambda_i(x)\partial_i) = \lambda_{N+1}(x) - \sum_{i=1}^N \lambda_i(x)\partial_i f(x)$. Da M euklidisch ist, gilt $\nabla_i = \partial_i$. **Behauptung:** Dann ist die 2.Fundamentalform $S_{ij} = S(\partial_i, \partial_j) = \nu(\partial_{F_*(\partial_i)} F_*(\partial_j))$ gegeben durch

$$S_{ij}(x) = \partial_i \partial_j f(x) .$$

$S_{ij} = \nu(\langle F_* \partial_i, (\sum_{\nu=1}^{N+1} dx^\nu \partial_\nu)(\partial_j + (\partial_j f)(x)\partial_{N+1}) \rangle) = \nu(\partial_i \partial_j f(x) \cdot \partial_{N+1})$. Beachte $\nabla_\nu(\partial_j) = 0$ für den euklidischen flachen Zusammenhang ∇ . Die MC-Gleichungen $\partial_i S_{jk} = \partial_j S_{ik}$ sind in unserem Spezialfall gerade die Gleichungen $\partial_i \partial_j \partial_k f = \partial_j \partial_i \partial_k f$.

Bemerkung: Gibt es auf \mathbb{R}^N (oder auf einer offenen Kugel) eine Form S und eine Riemannsche Metrik h , so dass obige Gauss- und Mainardi-Codazzi Gleichungen gelten, dann ist die Metrik Pullback der konstanten Metrik auf \mathbb{R}^{N+1} unter einer Hyperflächeneinbettung. **Beweisskizze:** Die MC-Gleichungen $\partial_i S_{jk} = \partial_j S_{ik}$ zeigen $S_{jk} = \partial_j S_k$, und wegen $S_{jk} = S_{kj}$ also $S_{ij} = \partial_i \partial_j f$ für eine Funktion f . Die Behauptung folgt dann aus §7.5.

⁷Das heisst $\langle R_I(X, Y)X, Y \rangle = \langle R(X, Y)X, Y \rangle + \|S(X, Y)\|^2 - \langle S(X, X), S(Y, Y) \rangle$

Kapitel 8

Die Transportgleichungen

8.1 Vorbemerkungen

Wir betrachten in diesem Kapitel zusammenhängende vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir fixieren einen Punkt P und studieren die Abbildung

$$\exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M$$

auf einer maximalen sternförmigen Teilmenge

$$U \subset \mathbb{R}^N ,$$

auf der die Abbildung nichtsingulär ist, dem regulären Stern U . Fast alle der folgenden Argumente gelten auch für indefinite Metriken.

Auf U betrachten wir dann die lineare Matrixdifferentialgleichung $\dot{M} + \Gamma_T M = 0$, welche den Paralleltransport definiert, zusammen mit ihren Inkarnationen

- $\dot{M}M^{-1} = -\Gamma_T$, $N^{-1}\dot{N} = \Gamma_T$, $N = M^{-1}$
- $g = N'g(0)N$
- $N^{-1}\dot{N} = \frac{1}{2}g^{-1}\dot{g}$
- $x'N(x) = x'$, $N(x)x = x$.
- $N(x) = \theta(P, \exp_P(x))^{-1} \cdot J(\exp_P, x)$

Deren Lösungen sind nur definiert auf dem regulären Stern. Diese Einschränkung ergibt sich dadurch, dass die Christoffelsymbole Γ_T der Pullback Pseudometrik sowie M nur auf U definiert sind.

Mit Hilfe der Jacobifelder erhält man eine zweite Differentialgleichung für N , welche linear von zweiter Ordnung ist und als Koeffizienten Krümmungsterme enthält. Diese Gleichung lässt sich durch Einführen einer Hilfsfunktion Φ (im wesentlichen N) weiter vereinfachen. Diese so gewonnene Differentialgleichung hängt nur σ^\vee (der Krümmung) ab, einer glatten Funktion auf \mathbb{R}^N . Dies ermöglicht es N als Lösung der Differentialgleichung

- $\ddot{N} + \frac{2}{t}\dot{N} + \sigma^\vee N = 0$, $N(0) = id, \dot{N}(0) = 0$
- $\ddot{N} + \frac{2}{t}\dot{N} + N\sigma = 0$, $N(0) = id, \dot{N}(0) = 0$

- $\sigma^\vee = N\sigma N^{-1}$, und $g(0)\sigma^\vee$ ist symmetrisch
- $\Phi = tN(t)$
- $\ddot{\Phi} + \sigma^\vee\Phi = 0$, $\Phi(0) = 0, \dot{\Phi}(0) = id$

als glatte Funktionen auf ganz \mathbb{R}^N fortsetzen zu können. Dasselbe gilt für Φ . Somit lässt sich der reguläre Stern um Null durch das Komplement der Nullstellenmenge der Funktion $\det(N) = 0$ auf \mathbb{R}^N bestimmen.

Mittels N respektive Φ definiert man die matrixwertige Funktion $\Sigma = g(0)\dot{\Phi}\Phi^{-1}$. Es gilt

- $\Sigma = g(0)\dot{\Phi}\Phi^{-1}$
- $\Sigma = \Sigma'$ ist symmetrisch
- $\dot{\Sigma} + \Sigma g(0)^{-1}\Sigma + g(0)\sigma^\vee = 0$.
- $\nabla^2(\frac{1}{2}d(P, \cdot)^2) = \Sigma = t\Sigma$

Die Schnittkrümmungsterme σ^\vee kontrollieren diese Riccati Matrixdifferentialgleichung. Die Determinante $\det(\Phi)(x)$ und damit $\det(g)$ kann nur dann Null werden, wenn $\Sigma(x)$ eine ‘Polstelle’ bei x besitzt. Damit ist folgendes gemeint: Ist Σ beschränkt in der Umgebung eines Punktes $x = \gamma(t_0)$, dann gilt $\det(\Phi(t_0)) \neq 0$. Denn aus $\Phi(t_0) \cdot w = 0$ folgt auch $\dot{\Phi}(t_0)w = \Sigma(t_0)\Phi(t_0)w = 0$. Da $\Phi(t)w$ Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, impliziert dies $\Phi(t) \cdot w = 0$ für alle t , und damit $w = 0$.

Im Fall von Räumen mit nichtpositiver Schnittkrümmung kann man Σ mit Hilfe der Riccati Differentialgleichung abschätzen. Dies zeigt, dass Σ in diesem Fall glatt auf ganz \mathbb{R}^N ist. Damit besitzt $\det(\Phi)$ auf \mathbb{R}^N keine Nullstelle. Somit ist der reguläre Stern gleich \mathbb{R}^N . Die Exponentialabbildung $exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M$ ist dann, wie man leicht sieht, eine unverzweigte Überlagerung. Ist M einfach zusammenhängend, dann ist somit $exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Im allgemeinen kann man M durch seine universelle Überlagerung ersetzen und analog schliessen.

8.2 Kanonische Koordinatenwechsel

Für eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit definiert die Exponentialabbildung exp_P auf der Kugel vom Injektivitätsradius eine kanonische Karte (kanonisch heisst bis auf einen linearen orthogonalen Kartenwechsel zur Standardmetrik $g(0) = g_{st}$). Für fixiertes $P \in M$ definiert die Abbildung $exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M$ durch Pullback der Metrik \langle, \rangle von M eine globale kanonische Pseudometrik g auf ganz \mathbb{R}^N . Ausserhalb der singulären Punkte, d.h. den Punkten wo die Exponentialabbildung kein lokaler Diffeomorphismus ist, ist die Pseudometrik $g(x)$ eine Riemannsche Metrik. D.h. dort gilt $det g(x) \neq 0$. In den singulären Punkten $x \in \mathbb{R}^N$ gilt dagegen $det g(x) = 0$.

Definition: Die maximale um 0 sternförmige offene Teilmenge $U \subseteq T_P(M) = \mathbb{R}^N$, welche im Komplement der singulären Punkte liegt, nennen wir den regulären Stern um Null.

Die Exponentialabbildung

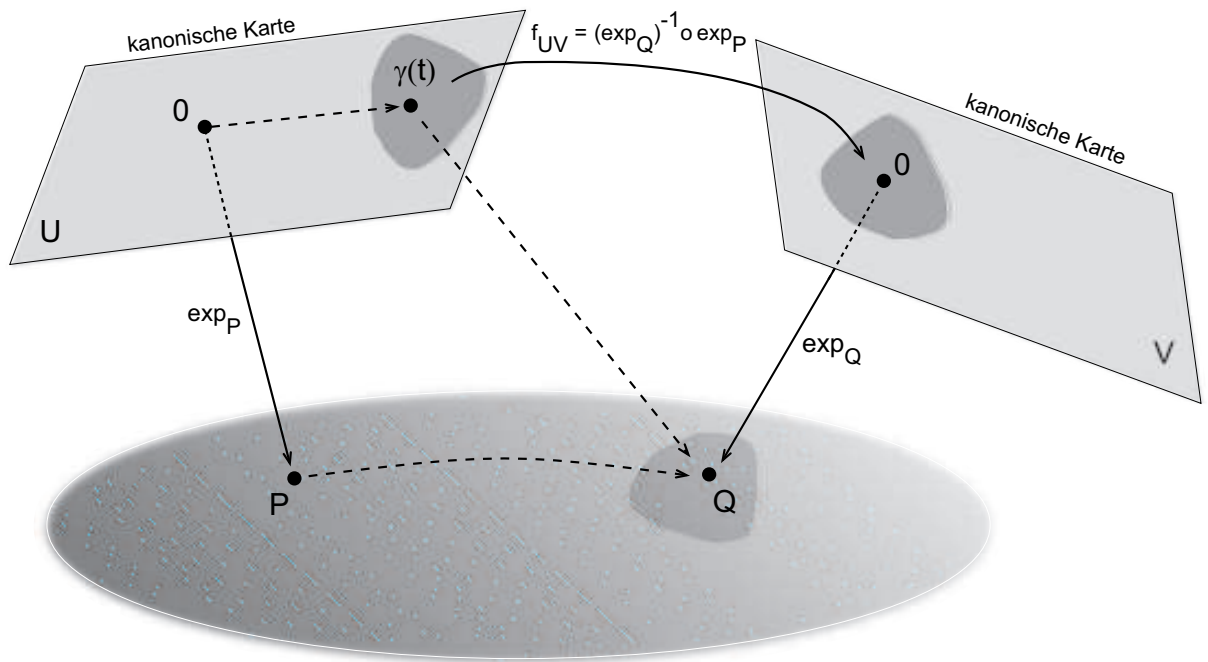
$$exp_P : U \rightarrow M$$

ist eine unverzweigte Überlagerung (insbesondere also ein lokaler Diffeomorphismus). Auf U ist exp_P aber i.a. nicht mehr injektiv.

Kartenwechsel: Sei $x \in U$ und $Q = exp_P(x) \in M$. Sei $exp_Q : \mathbb{R}^N \supseteq V \rightarrow M$ die kanonische Karte um Q . Auf $U \subseteq \mathbb{R}^N$ von x ist der kanonische Kartenwechsel $f_{UV} : U \rightarrow V$ eindeutig bis auf Linkskomposition mit einer linearen orthogonalen Abbildung. Die Jacobimatrix $Df_{UV}(x)$ ist eindeutig bis auf Linkskomposition mit einer linearen orthogonalen Abbildung, somit bestimmt durch die eindeutig zugeordnete Matrix $Df_{UV}(x)'g(0)Df_{UV}(x)$. Wegen der Kettenregel ist diese wohldefinierte Matrix gleichzeitig der Pullback der Metrik von M im Punkt Q . Es folgt

$$g(x) = Df_{UV}(x)'g(0)Df_{UV}(x) .$$

Dies liefert das anscheinend tautologische



Lemma 50. *Jede Matrix N , welche*

$$g(x) = N'g(0)N$$

erfüllt, ist gleich der Jacobimatrix $N = Df_{UV}$ eines kanonischen Kartenwechsel f_{UV} (bei geeigneter orthogonaler Modifikation der kanonischen Karte bei $Q = \exp_P(x)$). Folglich $\det g(x) = 0 \iff Df_{UV}(x) = 0 \iff \det N = 0$.

8.3 Die Transport Matrizen

Sei γ eine Kurve in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M . Sei $T = \dot{\gamma}$ das Richtungsfeld (ein Schnitt von $\gamma^*(T(M))$) und

$$\nabla_T = \frac{\partial}{\partial t} + \Gamma_T \quad , \quad T = \dot{\gamma}$$

der zugehörige Zusammenhang des Vektorbündels $\gamma^*(T(M))$.

In lokalen Karten: $\Gamma_T = \sum_i \dot{\gamma}^i(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))$.

Sei $\gamma|_I$ für $I = [a, b]$ in einer Karte enthalten. Wir betrachten dieses Teilstück von γ . Wir ersetzen obdA M durch die Karte, eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^N . Bezüglich der Trivialisierung von $\gamma^*(T(M)) = \mathbb{R}^N$ in dieser Karte können wir die Christoffelmatrix Γ_T als $N \times N$ -Matrizen auffassen.

Parallelfelder: Ein Vektorfelder ξ entlang γ ist parallel, wenn $\nabla_T \xi = 0$. Die Fundamentallösung für den Paralleltransport von $P = \gamma(a)$ nach $Q = \gamma(t)$ ist die eindeutig bestimmte Matrixlösung $M(t)$ mit $\nabla_T M = 0$ und $M(a) = id$ oder

$$\dot{M}(t) + \Gamma_T \cdot M(t) = 0 .$$

Es gilt $M'g(\gamma(t))M = g(P)$ (Lemma 35). $M(t)$ ist invertierbar für alle $t \in [a, b]$.

Die Matrix $N(t)$: Die inverse Matrix $N = M^{-1}$ erfüllt in der lokalen Karte die Gleichung

$$\boxed{\Gamma_T = N^{-1} \dot{N} \quad , \quad N(0) = id} .$$

Beachte $\Gamma_T = -\dot{M}M^{-1}$ und $\frac{d}{dt}M^{-1} = -M^{-1}\dot{M}M^{-1}$. Es gilt $g(x) = N'(t)g(P)N(t)$ für $x = \gamma(t)$, kurz

$$\boxed{g(x) = N'(x)g(P)N(x)} .$$

Korollar 23. *Das Volumenelement $d\mu_g$ der Riemannschen Mannigfaltigkeit im Punkt $x = \gamma(t)$ einer lokalen Karte ist gegeben durch $\det(g)^{1/2}(x) = \det(N(t))$, und es gilt*

$$\frac{d}{dt} \log(\det(N)) = \text{Tr}(N^{-1} \dot{N}) = \text{Tr}(\dot{N} N^{-1}) .$$

Beweis: Die erste Aussage folgt aus $\det(g)^{1/2} = \det(N)$. Die letzte Aussage benutzt $\frac{d}{dt} \log \det N(t) = \text{Tr}(\dot{N}N^{-1})$ für glatte invertierbare $N(t)$, denn beide Seiten sind invariant unter $N(t) \mapsto U(t)N(t)U(t)^{-1}$. Somit ist obdA $N(t)$ eine obere Dreiecksmatrix. Dann hängen aber beide Seiten nur von den Diagonaltermen ab.

Trivialisierungen: Sei $\xi(t) \in \gamma^*(TM)(I)$ ein Vektorfeld entlang γ . Sei

$$\theta : TM_P \cong TM_{\gamma(t)}$$

der Paralleltransport von $P = \gamma(0)$ nach $Q = \gamma(t)$ gegeben durch die Matrix $M(t)$ für $t \in I$. Dies liefert eine Identifikation

$$\gamma^*(TM)(I) \cong C^\infty(I, (TM)_P) = C^\infty(I, \mathbb{R}^N)$$

$$\xi(t) \mapsto \eta(t) = \theta^{-1}\xi(t) = M^{-1}(t) \cdot \xi(t)$$

oder auch

$$\xi(t) = M(t) \cdot \eta(t) \quad , \quad t \in [a, b] .$$

$$\eta(t) = N(t) \cdot \xi(t) \quad , \quad t \in [a, b] .$$

Lemma 51. Für alle natürlichen Zahlen i hat man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \xi(t) \in \gamma^*(TM)(I) & \xrightarrow{\theta^{-1}} & C^\infty(I, TM_P) \ni \eta(t) \\ \downarrow \nabla_T^i & & \downarrow \frac{d^i}{dt^i} \\ \gamma^*(TM)(I) & \xrightarrow{\theta^{-1}} & C^\infty(I, TM_P) \end{array}$$

Das heisst: $\boxed{\theta^{-1} \cdot \nabla_T \nabla_T (\theta \eta(t)) = \frac{d^2}{dt^2} \eta(t)}$.

Verschärfung: Da man das Vektorfeld $\gamma^*(TM)$ immer trivialisieren kann, gelten die obigen Aussagen nicht nur in einer Karte, sondern sie gelten entlang γ auch global.

Beweis: Wegen $N^{-1} = M$ und $N^{-1}\dot{N}N^{-1} = -\dot{M}$ gilt $N\nabla_T N^{-1} = N(\partial_t + N^{-1}\dot{N})N^{-1} = N\partial_t M - N\dot{M} = N(M\partial_t + \dot{M}) - N\dot{M} = NM\partial_t = \partial_t$.

8.4 Paralleltransport in Normalkoordinaten

Die Aussagen des vorherigen Kapitels gelten in einem beliebigen lokalen Koordinatensystem. Von jetzt an für den Rest des Kapitels betrachten wir ein geodätisches Normalkoordinatensystem (wenn nichts anderes behauptet wird).

Korollar 24. Für die Geodäte $\gamma(t) = vt$ in Normalkoordinaten betrachte $x = \gamma(t)$ im regulären Stern und $Q = \exp_P(x)$. Bezüglich geodätischer Normalkoordinaten bei Q ist die Jacobimatrix $(f_*)_x = J(f, x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ der Exponentialabbildung $f = \exp_P$ gegeben durch

$$(f_*)_x = \theta \circ N(t) \quad , \quad f = \exp_P.$$

Hierbei ist $\theta : T_P(M) \rightarrow T_Q(M)$ der Paralleltransport auf M entlang $\gamma_M = \exp_P \circ \gamma$. Mit den Identifikationen $\exp_P : \mathbb{R}^N \cong T_P(M)$ und $\exp_Q : \mathbb{R}^N \cong T_Q(M)$ wird $\theta = \theta(P, Q)$ eine orthogonale Matrix in $Gl(\mathbb{R}^N)$ zur Form $g(0) = g_{st}$.

$$\begin{array}{ccc} T(\mathbb{R}^N)_{\gamma(t)} & \xrightarrow{f_* = J(\exp_P, x)} & T(M)_{\gamma_M(t)} \\ \vdots \downarrow N(t) & & \downarrow \theta^{-1} \\ T(\mathbb{R}^N)_0 & \xrightarrow{f_* = id} & T(M)_P \end{array}$$

Beweis: Trivial, denn N ist der inverse Transport. Beachte die untere waagrechte Abbildung ist eine Identifikation in kanonischen Koordinaten wegen $J(f, 0) = id$.

Wir bemerken, dass die obige Matrix $N(t)$ – sowie auch $M(t)$ – a priori nur auf dem regulären Stern erklärt ist (daher die gestrichelte Linie). Die Matrix $N(t)$ lässt sich aber mit diesem Diagramm zu einer glatten Matrix $N(t)$ auf ganz \mathbb{R}^N fortsetzen¹.

Korollar 25. Die Matrix

$$\boxed{N(x) = \theta(P, Q)^{-1} \circ J(\exp_P, x)} \quad , \quad Q = \exp_P(x)$$

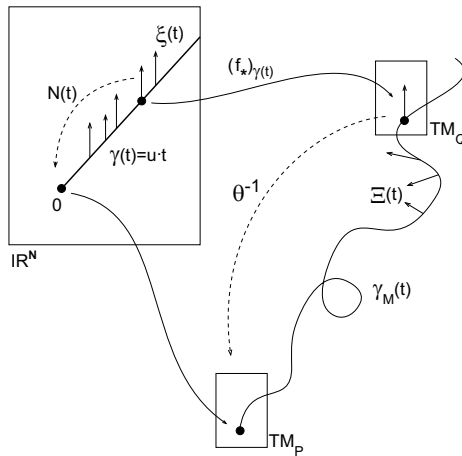
¹Dies gilt dagegen im allgemeinen nicht für $M(t)$, welches singularär am Rand von U ist.

definiert eine glatte Funktion auf ganz \mathbb{R}^N , welche auf dem regulären Stern mit der bereits betrachteten Matrix N übereinstimmt, und auf ganz \mathbb{R}^N die Gleichung

$$g(x) = \exp_P^*(g(0)) = N'(x)g(0)N(x)$$

erfüllt.

Beweis: Nur die letzte Aussage ist zu beweisen! Diese ist aber deshalb richtig, da wir nur kanonische Koordinaten auf M benutzen! Im Punkt $Q = \exp_P(x)$ ist der Tangentialraum $TM_Q = \mathbb{R}^N$ mittels \exp_Q und die Metrik gleich $g_{st} = g(0)$. Aber $\exp_P^*(g) = J(f, x)'g_{st}J(f, x) = N'(x)(\theta^{-1})'g_{st}\theta N(x) = N'(x)g_{st}N(x)$, da der Paralleltransport $\theta : TM_P \rightarrow TM_Q$ isometrisch ist, und daher $\theta = \theta(P, Q)$ eine orthogonale Matrix in der Gruppe $O(g_{st})$ ist (in beiden Punkten betrachten wir kanonische Koordinaten!)



Lemma 52. Auf dem regulären Stern gilt: $N(t)$ ist die eindeutig bestimmte Lösung $\dot{N} = N(t)$ der Differentialgleichung

$$N^{-1}\dot{N} = \frac{1}{2}g^{-1}\dot{g} \quad , \quad N(0) = id \quad ,$$

und damit

$$\dot{N}(0) = \dot{g}(0) = 0 \quad .$$

Beweis: Es genügt $\Gamma_T = \frac{1}{2}\dot{g}g^{-1}$ auf der Geodäte $\gamma(t) = x \cdot t$ zu zeigen. Dies folgt aus der Basisrelation und wird weiter unten in Lemma 53 gezeigt.

Bemerkung: Am Rand von U wachsen die Christoffelsymbole ebenso wie M , so dass die Transportgleichungen von Lemma 52 ausserhalb von U nicht mehr lösbar sind.

Bemerkung: Man kann das letzte Lemma auch in der Form schreiben $\dot{g} = \frac{1}{2}N'g(0)\dot{N}$.

Beachte

$$\dot{g} = \frac{d}{dt}N'g(0)N = \dot{N}'g(0)N + N'g(0)\dot{N}.$$

Somit heisst das,

$$\frac{1}{2}\dot{N}'g(0)N = \frac{1}{2}N'g(0)\dot{N} = \dot{g}.$$

Also ist $\Sigma = g(0)\dot{N}N^{-1}$ eine symmetrische Matrix, da wo N^{-1} existiert.

Korollar 26. Die Matrix $\Sigma = g(0)\dot{N}N^{-1}$ ist symmetrisch und definiert eine glatte Funktion auf der offenen Teilmenge von \mathbb{R}^N , wo $\det(N) \neq 0$ ist, also insbesondere auf U .

Christoffelsymbole: Durch partielles Ableiten der Basisrelation $\sum_i x^i g_{ij} = x_j$ nach ∂_α erhält man $\sum_i x^i \partial_\alpha g_{ij} = g_{\alpha j}(0) - g_{\alpha j}$. Benutzt man die Symmetrie in αj , so folgt aus $2 \sum_l g_{jl} \Gamma_{ik}^l = \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}$ durch Multiplikation mit x^k und Summation über k die Formel $\sum_k 2x^k g_{jl} \Gamma_{ik}^l = (Eg)_{ij}$ für den Euler Operator E . Wegen $\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l$ ist $\sum_k 2x^k g_{jl} \Gamma_{ik}^l = \sum_k 2x^k g_{jl} \Gamma_{ki}^l = \sum_k 2g_{jl} (\Gamma_x)_i^l$ für $\Gamma_x(x) = \sum_i x^i \Gamma_{ik}^l$. Es folgt

Lemma 53. $g \cdot \Gamma_x = \frac{1}{2}E(g)$. Also auf U gilt $\sum_i x^i \Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2}(g^{-1} \cdot Eg)_{lk}$.

Lemma 54. Analog zeigt man $\sum_l x_l \Gamma_{ik}^l = g_{ik}(0) - g_{ik} - \frac{1}{2}(Eg)_{ik}$.

Aus den obigen Rechnungen folgt Lemma 52, oder allgemeiner

Lemma 55. Auf dem regulären Stern, gilt² für den Euleroperator E :

$$N^{-1} \cdot EN = \frac{1}{2}g^{-1} \cdot Eg,$$

wenn man N als Funktion auf dem regulären Stern U auffasst.

²Die Gleichung ist $Gl(V)$ -äquivariant für $N \in End(V)$ und $g \in S^2(V)$

N als Funktion von $x \in U$: Die Paralleltransportmatrix $N(t) = N_x(t)$ hängt natürlich von der Wahl einer Geodäte $\gamma(t) = xt$ ab. Aus der Transportgleichung folgt die Reskalierungsformel $N_{\lambda \cdot x}(t) = N_x(\lambda \cdot t)$ für reelles λ . Daher ist auf dem regulären Stern $U \subset \mathbb{R}^N$ die Funktion $N(x) = N_x(1)$ für $x \in \mathbb{R}^N$ wohldefiniert

$$N : \mathbb{R}^N \longrightarrow \text{End}(\mathbb{R}^N).$$

In diesem Sinn gilt

$$\dot{N}(xt) = \sum_j x^j \frac{\partial}{\partial x^j} N(xt) \text{ und } \dot{N}(xt) = \dot{N}_x(t) = N_x(t) \cdot \Gamma_x(xt) \text{ liefert für } t = 1$$

$$EN(x) = N(x)\Gamma_x(x).$$

$$\text{Hierbei ist } \Gamma_x(x) = \sum_i x^i \Gamma_{ik}^l(x).$$

Bemerkung: Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die Matrix $N(t)$ (obdA auf $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$) folgende Gestalt besitzt

$$N(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

da die inverse Matrix von N den Paralleltransport entlang γ bestimmt³. Daher ist die obere Zeile gleich $\dot{\gamma}$. Aus $N^{-1}\dot{N} = \frac{1}{2}g^{-1}\dot{g}$ folgt daher

$$\dot{N}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Daraus folgt für $\eta = N\xi$ die Koordinatenbeziehung $\xi_1 = 0 \iff \eta_1 = 0$.

Variiert man die Geodäte wird $N(x)$ eine Funktion auf \mathbb{R}^N . Die letzte Rechnung zeigt, dass x ein Eigenvektor⁴ von $N(x)$ ist

$$x' \cdot N(x) = x' \quad , \quad N(x) \cdot x = x \quad , \quad x \in \mathbb{R}^N \quad ,$$

zumindestens für die nicht singulären Punkte x .

Korollar 27. *Es gilt $\sum_{i=1}^N x^j N_{ij}(x) = x^i$ sowie $\sum_{i=1}^N x^i N_{ij}(x) = x^j$ für alle Punkte $x \in \mathbb{R}^N$, welche im regulären Stern um Null enthalten sind.*

³Siehe Appendix über Formeln auf einer Geodäte

⁴Dies sollte zeigen, dass die Taylorkomponenten $N^r(0) \in \text{End}(V) \otimes S^r(V)$ von N bei $P = 0$ vom Höchstgewicht $(r, 1, 0, \dots, 0, -1)$ sind.

8.5 Jacobifelder

Sei $I = \mathbb{R}$. Sei $\gamma_M(t)$ eine Geodäte $\gamma_M : I \rightarrow M$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit dem Richtungsfeld

$$T = \dot{\gamma}_M = (\gamma_M)_*(\partial_t)$$

entlang γ_M . Der Levi-Civita Zusammenhang ∇ definiert die Derivation ∇_T auf $\gamma_M^*(TM)$ wertigen Schnitten auf I .

Sei $R(X, Y) \in \text{End}(T(M))$ der Riemannsche Krümmungstensor. Wir bezeichnen den Pullback auf I mit $\gamma_M^*R(X, Y)$. Dieser Pullback ist ein naiver Pullback!

Definition: Schnitte $\xi \in \gamma_M^*(TM)(I)$ nennen wir Vektorfelder entlang γ_M . Ein solches Vektorfeld entlang γ_M heisst Jacobifeld, wenn es die folgende Jacobigleichung erfüllt

$$\boxed{\nabla_T \nabla_T \xi - \gamma_M^* R(T, \xi)T = 0}.$$

Dies ist eine vektorwertige lineare Differentialgleichung 2.Ordnung für das Feld ξ auf I . Der Raum der Lösungen hat die Dimension $2\dim(M)$, und diese sind definiert auf dem ganzen Definitionsbereich I der Geodäte (im vollständigen Fall, den wir betrachten, also auf ganz \mathbb{R}).

Die Geodäte γ_M geht durch den Punkt $P = \gamma_M(0)$ und man hat eine Parametrisierung der Geodäte γ_M mittels der Exponentialabbildung $f = \text{exp}_P$

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^N \\ & \searrow \gamma_M & \downarrow f \\ & & M \end{array}$$

durch eine Gerade $\gamma(t) = u \cdot t$. Beachte, auf I hat man eine Abbildung von Vektorbündeln

$$f_* : \gamma^*(T\mathbb{R}^N) \rightarrow \gamma_M^*(TM).$$

Wir definieren für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^N$ das Vektorfeld

$$\xi(t) = t \cdot v \in \gamma^*(T\mathbb{R}^N)_t$$

und das Bild

$$\Xi = (f_*)_{\gamma(t)} \xi(t) \in \gamma_M^*(TM)_t.$$

Lemma 56. Das Feld $\Xi(t)$ ist ein Jacobifeld auf I mit $\Xi(0) = 0$. Jedes Jacobifeld auf I , welches im Nullpunkt verschwindet, ist von dieser Gestalt.

Folgerung 5. Im regulären Stern eines Normalkoordinatensystems ist das lineare Feld

$$\xi(t) = t \cdot v \quad , \quad (v \in \mathbb{R}^N)$$

ein Jacobifeld⁵ entlang der Geodäte $\gamma(t) = u \cdot t$.

Beweis des Lemmas: Die zweite Aussage des Lemmas folgt wegen Dimensionsgründen aus der ersten Aussage des Lemmas. Nun zur ersten Aussage. Für zwei feste linear unabhängige Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^N$ definieren wir

$$F : I^2 \rightarrow M$$

$$F(s, t) = \exp_P(tu + tsv) .$$

Für festes s definiert $(\gamma_M)_s(t) = F(s, t)$ eine Geodäte durch P , und es gilt $(\gamma_M)_0(t) = \gamma_M(t) = (f \circ \gamma)(t)$.

Die Felder T und S : Wir definieren für $f = \exp_P$

$$T = F_*\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(s, t) = f_*\left(\frac{\partial}{\partial t}(tu + tsv)\right) = (f_*)_{(tu+tsv)}(u + sv)$$

und

$$S = F_*\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)(s, t) = f_*\left(\frac{\partial}{\partial s}(tu + tsv)\right) = (f_*)_{(tu+tsv)}(tv)$$

auf I^2 als Felder mit Werten in $F^*(T(M))$. Einschränken auf $s = 0$

$$\begin{array}{ccc} (0, t) \in & I^2 & \xrightarrow{F} & M \\ \uparrow & \uparrow & & \parallel \\ t \in & I & \xrightarrow{\gamma_M} & M \end{array}$$

liefert die Felder $T(0, t) = \dot{\gamma}_M(t)$ und $\Xi(t) = S(0, t)$ auf I .

⁵Wir identifizieren $\gamma^*(T\mathbb{R}^N)_t = \mathbb{R}^N$

Ihre Derivationen ∇_T und ∇_S : Die Felder T und S definieren Derivationen ∇_T und ∇_S von $F^*(TM)$ auf I^2 . Es gilt $\nabla_T S - \nabla_S T = F_*([\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}]) = F_*(0) = 0$ (Torsionsfreiheit). Also

$$\nabla_T S = \nabla_S T$$

auf I^2 . Ausserdem gilt $\nabla_T \nabla_S - \nabla_S \nabla_T - \nabla_{F_*[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}]} = R(T, S)$ auf I^2 . Also

$$\nabla_T \nabla_S - \nabla_S \nabla_T = F^* R(T, S) .$$

Geodätenschar: Da alle $(\gamma_M)_s(t) = F(s, t)$ Geodäten in M sind, gilt

$$\nabla_T T(t, s) = 0 \quad , \quad \forall (s, t) \in I^2 .$$

Beachte $T(s, t) = (\dot{\gamma}_M)_s(t)$. Daher gilt auf ganz I^2

$$\nabla_T \nabla_T S = \nabla_T \nabla_S T = \nabla_T \nabla_S T - \nabla_S (\nabla_T T) = F^* R(T, S) T$$

wegen $\nabla_S (\nabla_T T) = 0$ auf I^2 .

Spezialisieren⁶ liefert auf der Geodäte $(\gamma_M)_0 = \gamma_M$ die Jacobigleichung. Beachte $(\nabla_T \nabla_T S)(0, t) = \left(F^*(\nabla) \frac{\partial}{\partial t} F^*(\nabla) \frac{\partial}{\partial t} S \right) |_{s=0} = \gamma_M^*(\nabla) \frac{\partial}{\partial t} \gamma_M^*(\nabla) \frac{\partial}{\partial t} S(0, t)$, denn die Ableitungen vertauschen mit der Spezialisierung, da nur nach t abgeleitet wird. Aus $S(0, t) = \Xi(t)$ folgt die Behauptung.

Die Schnittkrümmungsmatrix⁷: Bezüglich der Identifikationen $\theta : TM_P \cong TM_{\gamma_M(t)}$ mit $\eta_i(t) = \theta^{-1}(\Xi_i(t))$ gilt nach §7.2 für beliebige Felder $\Xi_i(t)$ entlang γ_M

$$\begin{aligned} R_M(T, \Xi_1, T, \Xi_2)_{\gamma_M(t)} &= -\langle R(T; \Xi_1)T, \Xi_2 \rangle_{\gamma_M(t)} \\ &= -\langle \sigma_T(\Xi_1), \Xi_2 \rangle_{\gamma_M(t)} \\ &= -\langle \theta^{-1} \sigma_T(\Xi_1), \theta^{-1} \Xi_2 \rangle_P \\ &= -\langle \theta^{-1} \sigma_T \theta(\theta^{-1} \Xi_1), \theta^{-1} \Xi_2 \rangle_P \\ &= -\langle \sigma^\vee(\theta^{-1} \Xi_1), \theta^{-1} \Xi_2 \rangle_P \\ &= -\langle \sigma^\vee \eta_1, \eta_2 \rangle_P \end{aligned}$$

⁶Würde $\nabla_T T = 0$ nur für $s = 0$ gelten, dann müsste $\nabla_S \nabla_T T$ bei $s = 0$ im allgemeinen nicht verschwinden!

Andererseits ist dies für ein Jacobifeld Ξ_1 wegen der Jacobigleichung (Lemma 51) gleich

$$\begin{aligned}\langle \nabla_T^2 \Xi_1, \Xi_2 \rangle_{\gamma(t)} &= \langle \theta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta^{-1} \Xi_1, \Xi_2 \rangle_P \\ &= \langle (\frac{\partial^2}{\partial t^2}) \theta^{-1} \Xi_1, \theta^{-1} \Xi_2 \rangle_{\gamma(t)} \\ &= \langle (\frac{\partial^2}{\partial t^2}) \eta_1, \eta_2 \rangle_{\gamma(t)}\end{aligned}$$

Da dies für alle Ξ_2 gilt, folgt für die Spalten $\eta(t) = (\theta^{-1}\Xi)(t) = N(t)\xi(t) = N(t)tv$ der Matrix

$$\Phi(t) = t \cdot N(t)$$

die Matrix-Differentialgleichung

$$\ddot{\Phi}(t) + \sigma^\vee \cdot \Phi = 0.$$

Hierbei ist $\sigma^\vee(t) := (\theta^{-1}\sigma_T\theta)(t)$ ein Endomorphismus von $TM_P = \mathbb{R}^N$. Da die $R_M(T, \Xi_1, T, \Xi_2)$ symmetrisch in Ξ_i ist, ist

$$g(0)\sigma^\vee = (g(0)\sigma^\vee)'$$

eine symmetrische Matrix, welche glatt ist als Funktion von t auf ganz \mathbb{R}^N .

Beweis: $\langle \sigma^\vee \eta_1, \eta_2 \rangle_{st} = R_M(T, \Xi_1, T, \Xi_2)_{\gamma_M(t)}$ ist symmetrisch in η_1, η_2 .

Korollar 28. *In Normalkoordinaten erfüllt die Matrix $\Phi(t) = t \cdot N(t)$ auf der Geodäte $\gamma(t)$ in Richtung $\dot{\gamma} = u$ für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$\boxed{t^2 \cdot g(\gamma(t)) = \Phi(t)'g(0)\Phi(t)},$$

wobei $\Phi(t)$ eindeutig bestimmt ist als glatte Funktion auf ganz \mathbb{R} durch das lineare Gleichungssystem

$$\boxed{\ddot{\Phi}(t) + \sigma^\vee(t) \cdot \Phi(t) = 0}$$

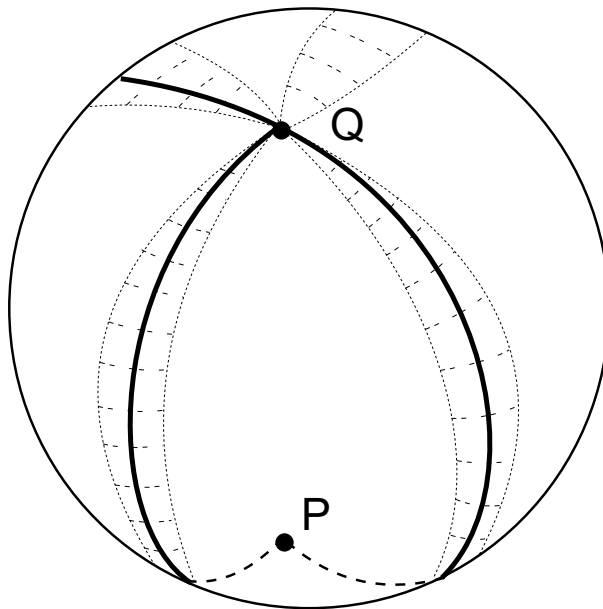
mit den Anfangsbedingungen $\Phi(0) = 0$ und $\dot{\Phi}(0) = E$. Hierbei ist $g(0)\sigma^\vee$ symmetrisch und glatt auf ganz \mathbb{R} .

1.Bemerkung: Obige lineare Differentialgleichung mit den Anfangswerten $\Phi(0) = 0$ und $\dot{\Phi}(0) = id$ bestimmt $\Phi(t)$ und hängt differenzierbar von Parametern wie der Richtung u der Geodäte ab. Somit ist $\Phi(v) = \|v\|_{st} \cdot N(v)$ eine glatte Funktion auf ganz \mathbb{R}^N , und hängt nur ab von σ^\vee .

2.Bemerkung: Auf dem regulären Stern ist auch $\sigma_u(t) = N^{-1}(t)\sigma^\vee(t)N(t)$ erklärt, als Schnittkrümmungsmatrix σ_u der Pullbackmetrik $g = exp_P^*(g_M)$ auf U in Richtung u der Geodäte. Auf U gilt damit auch

$$\ddot{\Phi}(t) + \Phi(t) \cdot \sigma(t) = 0 .$$

Jacobifelder auf der Kugel:



8.6 Konstante Krümmung

Sei die Skalar­krümmung konstant $\kappa = \rho^2$. Dann ist ρ reell oder rein imaginär. Der Krümmungsoperator σ^\vee ist proportional zur Projektion auf das Orthokomplement u^\perp von u (die Abbildung $\|u\|^2 \cdot pr_{u^\perp}$ ist auch sinnvoll für isotrope u)

$$\sigma^\vee = \rho^2 \|u\|^2 \cdot pr_{u^\perp} .$$

1) Die Lösung $\Phi = \Phi_u$ der Gleichung $\ddot{\Phi}(t) + \sigma^\vee(t)\Phi(t) = 0$ mit den Anfangswerten $\Phi(0) = 0$ und $\dot{\Phi}(0) = 1$ ist dann für nicht isotrope u

$$\Phi_u(t) = t \cdot id_{\mathbb{R}u} \bigoplus \frac{\sin(\rho \|u\| t)}{\rho \|u\|} \cdot id_{u^\perp}$$

bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \cdot u \oplus u^\perp$. Hierbei ist im Fall, wo $\rho \|u\|$ Null ist oder rein imaginär ist, $\frac{\sin(\rho \|u\| t)}{\rho \|u\|}$ entweder t oder via analytischer Fortsetzung der zugehörige sinus hyperbolicus.

2) Die Metrik im Punkt $x = ut$ ist (im Fall $g(0) = 1$)

$$g(x) = 1_{\mathbb{R}u} \bigoplus \left(\frac{\sin(\rho \cdot \|x\|)}{\rho \cdot \|x\|} \right)^2 \cdot 1_{u^\perp} .$$

3) Der reguläre Stern U ist der offene Kreis vom Radius $r = \frac{\pi}{\rho}$ (für $\rho > 0$) und ganz \mathbb{R}^N in den verbleibenden Fällen $\rho \in i\mathbb{R}$. Das Riemannsche Volumenelement ist

$$d\mu(x) = \left(\frac{\sin(\rho \cdot \|x\|)}{\rho \cdot \|x\|} \right)^{N-1} \cdot dx \quad , \quad x \in U .$$

4) Für die Matrix $\Sigma(t) = g(0)\dot{\Phi}(t)\Phi(t)^{-1}$ gilt dann im Fall $g(0) = 1$

$$t\Sigma(t) = id_{\mathbb{R}u} \bigoplus \rho \|u\| t \cdot \frac{\cos(\rho \|u\| t)}{\sin(\rho \|u\| t)} \cdot id_{u^\perp} .$$

Also $\Sigma(t) = t^{-1} id_{\mathbb{R}^N} + 0(t)$ bei $t = 0$, $\Sigma(t)$ ist monoton fallend auf U als Funktion von $t > 0$. Im Fall $\rho \in \mathbb{R}$ bekommt Σ einen Pol am Rand von U . Im Fall $\rho \notin \mathbb{R}$ ist $\Sigma(t)$ beschränkt ausserhalb jeder Umgebung von Null.

8.7 Der verallgemeinerte Cotangens Σ

Wir setzen

$$\Sigma = g(0)\dot{\Phi}\Phi^{-1} = \frac{g(0)}{t} + g(0)\dot{N}N^{-1}.$$

$\Sigma(t)$ eine symmetrische matrixwertige Funktion mit einem einfachen Pol vom Typ $t^{-1}g(0)$ im Punkt $t = 0$ (Siehe Fussnote zu Lemma 52). Die Funktion $\Sigma(t)$ ist nicht definiert in den Punkten, wo $\det(N) = 0$ oder äquivalent $\det(g) = 0$ gilt.

Folgerung 6. *Gilt $\det \Phi(t) \neq 0$, dann ist $\Sigma = g(0)\dot{\Phi}\Phi^{-1}$ definiert und glatt, und erfüllt die nichtlineare Riccati Differentialgleichung erster Ordnung*

$$\boxed{\dot{\Sigma} + \Sigma g(0)^{-1}\Sigma + (g(0)\sigma^\vee) = 0}.$$

Beweis: $\dot{\Sigma} = g(0)\ddot{\Phi}\Phi^{-1} - g(0)(\dot{\Phi}\Phi^{-1})(\dot{\Phi}\Phi^{-1}) = g(0)\ddot{\Phi}\Phi^{-1} - \Sigma g(0)^{-1}\Sigma = -g(0)\sigma^\vee - \Sigma g(0)^{-1}\Sigma.$

Lemma 57. *Ist Σ beschränkt und definiert in einer linksseitigen oder rechtsseitigen Umgebung von ut_0 . Dann gilt $\det(\Phi)(t_0) \neq 0$ und damit $\det(g)(t_0) \neq 0$.*

Das heisst $\Sigma(t)$ kann am Rand des regulären Sterns nicht beschränkt bleiben!

Beweis: Φ ist glatt auf \mathbb{R}^N . Aus $\Phi(t_0)w = \dot{\Phi}(t_0)w = 0$ folgt $\Phi(t)w = 0$ wegen der Differentialgleichung von Φ . Also $\dot{\Phi}(0)w = w = 0$. $\det(\Phi(t_0)) = 0$ impliziert die Existenz eines $w \neq 0$ mit $\Phi(t_0)w = 0$. Ist $\|\Sigma(t)\|_{st} \leq c$ bei t_0 beschränkt, folgt $\|g(0)\dot{\Phi}(t_0)w\|_{st} \leq c\|\Phi(t_0)w\|_{st} = 0$. Ein Widerspruch!

Theorem 4. *Sei $g(0) = 1$. Gilt für die Krümmung $c_1 \leq \sigma^\vee \leq c_2$ auf einer offenen sternförmigen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dann gilt*

$$\Sigma_{c_1} \leq \Sigma \leq \Sigma_{c_2}$$

(auf der offenen sternförmigen offenen Teilmenge von Ω , auf der die Matrizen Σ_{c_i} glatt sind) für die Sigmafunktionen Σ_c der Funktionen $-c$.

Es folgt⁸

⁸Für konstante negative Krümmung $-c$ ist Σ_c glatt auf ganz \mathbb{R}^N (siehe §8.6).

Korollar 29. Ist auf der Gerade $\gamma = ut, t \in [0, b]$ die Schnittkrümmung $g(0)\sigma^\vee < 0$ und ist $g(0) = 1$, dann existiert auf γ kein singulärer Punkt, und für alle $0 \leq t \leq b$ gilt

$$\boxed{1 \leq t\Sigma(t) < \infty} .$$

Folgerung 7. Im Fall nichtpositiver Krümmung ist der reguläre Stern gleich \mathbb{R}^N .

Beweis des Korollars: Auf jedem Kompaktum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ist die Matrix $-g(0)\sigma^\vee$ beschränkt $\tilde{c} \leq -g(0)\sigma^\vee \leq -c = \text{const}(\Omega)$. Für nicht positive Krümmung kann $\tilde{c} = 0$ gewählt werden. Dann ist $c \leq 0$ und damit wegen $g(0) = 1$ die Matrix Σ_c glatt auf $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Die Behauptung folgt dann aus Theorem 29.

Beweis des Theorems (odbA die obere Schranke): Für die untere Abschätzung ersetze $\Sigma(t)$ durch $-\Sigma(-t)$.

Angenommen $\dot{\Sigma} + \Sigma g(0)^{-1}\Sigma < c$. Sei Σ_c eine Lösung der Gleichung $\dot{\Sigma}_c + \Sigma_c g(0)^{-1}\Sigma_c = c$ mit Pol vom Typ $\frac{g(0)}{t}$ bei t . Wir behaupten dann⁹ $\Sigma(t) < \Sigma_c(t)$ für alle t mit ut im Durchschnitt \tilde{U} der beiden regulären Sterne. Im Limes $c \rightarrow c_2$ folgt dann $\Sigma(t) \leq \Sigma_c$, wegen der expliziten Gestalt von Σ_c (§8.6).

Die Taylorentwicklung von Φ ist wegen $\Phi(0) = \dot{\Phi}(0)$ und $\ddot{\Phi} = -\sigma^\vee\Phi$

$$\Phi(t) = t - \frac{\sigma^\vee(0)}{3!}t^3 + \dots$$

Dies liefert

$$\Sigma(t) = \frac{g(0)}{t} - \frac{g(0)\sigma^\vee(0)}{3}t + \dots$$

und zeigt $\Sigma(t) < \Sigma_c(t)$ für alle $t > 0$ nahe bei Null! Daher folgt die Aussage aus Lemma 65 im Appendix über Differentialgleichungen.

Richtungswechsel: Auf der Geodäte $\gamma(t) = u \cdot t$ setze $\tilde{\Sigma}(t) = -\Sigma_u(-t)$. Dann gilt $\dot{\tilde{\Sigma}}(t) + \tilde{\Sigma}(t)^2 + \sigma^\vee(-t) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow 0} t\tilde{\Sigma}(t) = id$. Es folgt

$$\Sigma_{-u}(t) = -\Sigma_u(-t) .$$

⁹ $c = c(t)$ muss nicht konstant sein!

8.8 Räume mit konstanter Krümmung

Zur Erinnerung: Der reguläre Stern¹⁰ ist die maximale um 0 sternförmige offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^N = T_P(M)$, welche im Komplement der singulären Punkte liegt.

Theorem 5. *In geodätischen Normalkoordinaten bestimmen die Matrixen $\sigma_u, u \in \mathbb{R}^N$ (also der Riemannsche Krümmungstensor¹¹ $R_{ijk}^l(x)$), den regulären Stern U zusammen mit der Metrik $g(x)$ auf U eindeutig (bei fixierter Wahl¹² von $g(0)$).*

Beweis: Dies folgt durch Lösen der Differentialgleichung von Korollar 28. Beachte $x \in U$ genau dann, wenn die eindeutig bestimmte Lösung der besagten Differentialgleichung $\det \Phi(tx) \neq 0$ für alle $t \leq 1$ erfüllt. $\Phi(t)$ bestimmt nach Korollar 28 dann die Metrik $g(x)$ auf U .

Bemerkung: Der singuläre Radius in Richtung $u, \|u\|_{st} = 1$, d.h. das minimale t_0 mit $ut_0 \notin U$, ist eine oberhalb stetige Funktion des Raumwinkels, da $\det N(u)$ eine glatte Funktion auf \mathbb{R}^N ist. Aus Satz 14 folgt später die unterhalb Stetigkeit.

Korollar 30. *Je zwei einfach zusammenhängende (zusammenhängende) Riemannschen Mannigfaltigkeiten M mit konstanter Krümmung κ sind isometrisch diffeomorph.*

Beweis: Im Fall $\kappa \leq 0$ definiert die Exponentialabbildung $\mathbb{R}^N \rightarrow M$ eine unverzweigte Überlagerung (Übungsaufgabe !), also ist exp_P sogar ein Diffeomorphismus. Im Fall $\rho^2 = \kappa > 0$ ist hat man als Modell die Kugel S^N vom Radius $R = \rho^{-1}$. Für den regulären Stern U der Kugel gibt es für $\varepsilon > 0$ und Punkte Q, Q' am Rand von U eine verbindende Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{U}$ in U (d.h. mit $\gamma((0, 1)) \subseteq U$) mit $L(\gamma) \leq \varepsilon$. Dasselbe gilt für jedes andere Modell M konstanter Krümmung κ . Es folgt $d(Q, Q') \leq L(\gamma) < \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und somit $d(Q, Q') = 0$. Das heisst der Rand von U wird unter exp_P auf einen Punkt $\infty \in M$ abgebildet $M = exp_P(U) \cup \{\infty\}$. Die Kugelschale $\{v | R/2 < \|v\|_{st} < R\}$ wird isometrisch diffeomorph auf eine offenen Menge $V \subseteq M$ abgebildet, so dass $V \cup \{\infty\}$ eine Karte um ∞ definiert. Offensichtlich ist daher M isometrisch diffeomorph zur Kugel S^N .

¹⁰Später werden wir sehen, dass $exp_P(U)$ eine offene dichte Teilmenge von M ist

¹¹Siehe zum Vergleich die formale Charakterisierung der Metrik durch $R_{ijkl}(x)$ in Korollar 19

¹²Reskaliert man g mit einem Skalar, ändert sich $R_{ijk}^l(x)$ nicht. Die Reskalierung von g wird durch eine Koordinatentransformation kompensiert.

8.9 *Der Konvexitätsradius

$f_P(\cdot) = \frac{1}{2} \|\cdot\|_{st}^2$ definiert eine quadratische Form auf \mathbb{R}^N . Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine beliebige (nicht notwendig durch 0 verlaufende) Geodäte innerhalb des regulären Sterns U eines geodätischen Normalkoordinatensystems bei P .

Dann gilt nach Abschnitt §5.8, Satz 8

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|\gamma(t_0)\|_{st}^2 = \sum_{i,j} \left(g_{ij}(0) - \sum_k \gamma^k(t_0) g(0)_{kl} \Gamma_{ij}^l(\gamma(t_0)) \right) \dot{\gamma}^i(t_0) \dot{\gamma}^j(t_0).$$

Wegen der Basisrelation (Lemma 54 und Folgerung 6) ist

$$g_{ij}(0) - \sum_k \gamma^k(t_0) g(0)_{kl} \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) = g + \frac{1}{2} E(g).$$

Wegen $\Sigma = g(0) \dot{\Phi} \Phi^{-1} = g(0) t^{-1} + g(0) \dot{N} N^{-1}$ ist andererseits $N' \Sigma N = t^{-1} (N' g(0) N + N' g(0) \dot{N}) = t^{-1} (g + \frac{1}{2} E(g))$. Daraus folgt (*)

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \|\gamma(t_0)\|_{st}^2 = t_0 N' \Sigma(t_0) N [\dot{\gamma}(t_0)].$$

Wechsel der Koordinaten: Sei $Q = \gamma(t_0) \in U$ ein fester Punkt auf γ . Betrachtet man nun geodätische Normalkoordinaten bei Q anstelle der bisher benutzten geodätischen Normalkoordinaten des Referenzpunktes $P = 0$, dann definiert $f_P(\cdot)$ in den neuen Koordinaten eine Funktion \tilde{f}_P auf V , welche i.a. keine quadratische Funktion mehr ist. Liegt Q nahe genug bei P gilt im Riemannschen Fall

$$\tilde{f}_P(y) = \frac{1}{2} d(P, y)^2.$$

Die Jacobimatrix $Df_{UV}(Q)$ des Koordinatenwechsels f_{UV} , $f_{UV}(Q) = 0$, ist die Matrix $N(Q)$. Die Tangente der Kurve $\tilde{\gamma} = f_{UV} \circ \gamma$ berechnet sich daher im neuen Koordinatensystem durch $\dot{\tilde{\gamma}}(t_0) = (N\dot{\gamma})(t_0)$. Und $\tilde{f} = f \circ f_{UV}^{-1}$.

In den neuen geodätischen Normalkoordinaten des Punktes Q , wird Q zum Nullpunkt $0 = f_{UV}(Q) \in V$. Für eine beliebige Funktion \tilde{f} auf V gilt für die unsere Geodäte $\tilde{\gamma}$, im Punkt t_0 die Gleichung $\tilde{\gamma}(t_0) = 0$. Ausserdem

$$\text{Hess}(\tilde{f})(0)[\dot{\tilde{\gamma}}(t_0)] = \frac{d^2}{dt^2} (\tilde{f}(\tilde{\gamma}(t)))|_{t=t_0},$$

denn die kovariante Ableitung $\nabla^2(\tilde{f})(0)$ ist gleich $\partial^2\tilde{f}(0)$, da die Christoffel-symbole von ∇ im Punkt $Q = \tilde{\gamma}(t_0)$ verschwinden. Und $\frac{d^2}{dt^2}(\tilde{f}(\tilde{\gamma}(t)))|_{t=t_0} = \partial^2(\tilde{f})(0)[\tilde{\gamma}(t_0)]$, da die zweite $\frac{d^2}{dt^2}\tilde{\gamma}(t_0)$ im geodätischen Normalkoordinaten bei Q verschwindet. Das heisst

Lemma 58. *Sei Q ein Punkt im regulären Stern U von P . Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine Geodäte bezüglich der Pullbackmetrik nicht notwendig durch P , und sei $Q = \gamma(t_0)$. Sei V der reguläre Stern von Q . Dann ist die Funktion*

$$\tilde{f}_P(x) = \frac{1}{2}\|P - f_{VU}(x)\|_{st}^2$$

wohldefiniert auf einer Umgebung $\tilde{V} \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^N$ von 0. Die Hessematrix von \tilde{f}_P bezüglich der Pullbackmetrik ist in Normalkoordinaten bei Q (bei geeigneter linearer Normierung) gegeben durch die Matrix

$$\text{Hess}(\tilde{f}_P)(Q) = t_0\Sigma(t_0) \quad , \quad Q = \gamma(t_0) \in U .$$

Lemma 59. *Für die Matrix $\Sigma = \Sigma_u$, d.h. für Σ ist gebildet zur Geodäte ut durch P im regulären Stern von P , setzt sich zu einer glatten symmetrischen Tensor*

$$\Sigma = t\Sigma : U \longrightarrow S^2(T^*)$$

fort. In diesem Sinn gilt in $T^2(U)$ die Identität

$$\nabla^2(f_P)(\text{exp}_P(x)) = \theta'_x \Sigma(x) \theta_x$$

für eine orthogonale Transformation $\theta_x \in O(N, \mathbb{R})$. (Paralleltransport).

Korollar 31. *Für den Laplace $\Delta = \text{Tr}(\nabla^2)$ gilt $\Delta(f_P)(\text{exp}_P(x)) = \text{Tr}(\Sigma)(x)$.*

Beweis: Zum Beweis von $\nabla^2 f = \Sigma$ in $T^2(U)$, genügt Gleichheit der Pullbacks für alle Geodäten γ (es handelt sich um symmetrische Tensoren). Im Punkt Q und der Geodäte γ , kann man durch Übergang zu Normalkoordinaten $\nabla^2 f$ durch $\tilde{\nabla}^2 \tilde{f}$ ersetzen, $\tilde{f} = f \circ f_{UV}$, und Σ durch den Pushforward $(f_{UV})_*$. Nach diesen Ersetzungen ist die Behauptung gerade die Formel (*).

Die Form $\Sigma = g(0)\dot{\Phi}\Phi^{-1}$ hat die Signatur von $g(0)$ für kleine $t > 0$. Sie behält diese Signatur bis zur ersten Nullstelle t_0 von $\det(\Sigma(t))$. Beachte t_0 , wenn es existiert, liegt notwendig vor der ersten Polstelle t_1 von $\Sigma(t)$ (der erste singuläre Punkt ut_1 auf der Geodäte $\gamma(t) = ut$). Wir nennen ut_0 den Konvexitätspunkt in Richtung von u . Im Fall negativer Schnittkrümmung ist dies der unendlich ferne Punkt (Korollar 29).

Korollar 32. *Angenommen M sei vollständig mit negativer Schnittkrümmung. Dann sind die Kugeln $B_r(P)$ für beliebiges $r > 0$ geodätisch konvex.*

8.10 *Die Singularitäten von Σ

Sei nun $g(0) = 1$, und somit M Riemannsch.

Dann gilt

$$d\mu_g(t) \cdot t^{\dim(M)} = \det(\Phi(t)) = e^{\int_0^t \text{Tr}(\Sigma(s)) ds}.$$

In der Nähe von singulären Punkten t_0 geht das Volumenelement $d\mu_g$ gegen Null. Daher muss gelten

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{Tr}(\Sigma)(t) = -\infty.$$

Die Taylorentwicklung der auf \mathbb{R}^N glatten Funktion $\det(\Phi(t))$ ist nicht identisch Null (siehe Appendix). Dies liefert wegen

$$\text{Tr}(\Sigma(t)) = d \log(\det(\Phi(t)))$$

die Beziehung

$$\text{Tr}(\Sigma(t)) = \frac{n}{t - t_0} + \text{glatte Funktion bei } t_0.$$

Hierbei ist $n \in \mathbb{N}$ die Null/Polstellenordnung von $\det(\Phi(t))$ im Punkt t_0 . Diese ist ungleich Null.

Korollar 33. *det(g) eine isolierte Singularitäten auf jeder Gerade $\gamma(t) = ut$. $\text{Tr}(\Sigma)(t)$ hat einen einfachen Pol in jeder Singularität mit ganzzahligem Residuum $n \geq 1$.*

Aus dem letzten Paragraph folgt für den Limes

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow Q} d(x, Q) \cdot \Delta(f_P(\exp_P(x))) = n \cdot t_0},$$

mit der Abkürzung $Q = \exp_P(\gamma(t_0))$.

Das Beispiel der Kugel: Wir betrachten für P den Nordpol P und für Q den Südpol Q der Kugel vom Radius R . Die Funktion $f = \frac{1}{2}d(P, x)^2$ ist in der Nähe von Q gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi \cdot R - d(x, Q))^2.$$

Die Funktion ist stetig auf der Kugel und nimmt ihr Maximum im Südpol $x = Q$ an. Um die Hessematrix im Südpol zu berechnen benötigen wir Normalkoordinaten x^1, x^2 im Südpol. Es gilt dann $d(Q, (x^1, x^2))^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2$. Also

$$\begin{aligned} Hesse(f) &= \partial^2\left(\frac{1}{2}\pi^2 R^2 - \pi R r + \frac{1}{2}r^2\right) = -\pi R \partial^2(r) + id \\ &= -\pi R \frac{x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^3} + id. \end{aligned}$$

Die Hessematrix hat also eine Singularität in Q . Es gilt

$$Tr(Hesse(f)) = \Delta(f) = \frac{\pi R}{r} + 2.$$

8.11 *Konvexitätspunkte

In diesem Abschnitt machen wir einen Vorgriff auf das nächste Kapitel und benutzen Eigenschaften von Jacobifeldern, die erst dort gezeigt werden.

Ein Konvexitätspunkt t_0 muss vor dem ersten kritischen Punkt t_1 liegen! Denn $\Sigma(t)$ ist bis zum Konvexitätspunkt positiv definit. Andererseits $Tr(\Sigma(t)) \rightarrow -\infty$ in linksseitiger Nähe von kritische Punkten (Lemma 64).¹³ Also:

Für $\Sigma(t) = g(0)\dot{\Phi}(t)\Phi(t)^{-1}$ gilt $det(\Sigma(t_0)) = 0 \iff det(\dot{\Phi}(t_0)) = 0$.

Dies ist äquivalent dazu, dass es ein $v \neq 0$ in \mathbb{R}^N gibt mit $\dot{\Phi}(t_0)v = 0$. Sei $\eta(t) = \Phi(t)v$, dann gilt $\dot{\eta}(t_0) = 0$. Aber $M\dot{\eta}(t_0) = \nabla_T(\xi)(t_0)$ für das Jacobifeld $\xi(t) = M\eta(t)$ entlang $\gamma(t) = ut$. Also äquivalent dazu ist $\nabla_T\xi(t_0) = 0$.

Lemma 60. Für die Geodäte $\gamma(t) = ut$ in Normalkoordinaten bei P sind äquivalent: $t_0 > 0$ ist minimal mit

- $det\Sigma(t_0) = 0$ (d.h. ut_0 ist Konvexitätspunkt).
- Es gibt ein Jacobifeld $\xi \neq 0$ entlang γ mit $\xi(0) = 0$ und $\nabla_T(\xi)(t_0) = 0$.
- Auf der Geodäte $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$ liegt kein konjugierter Punkt, und es gibt ein Jacobifeld $\xi \neq 0$ entlang γ mit Index¹⁴

$$I_\gamma(\xi, \xi) = \int_0^{t_0} (\|\nabla_T\xi\|^2 - \kappa(\dot{\gamma} \wedge \xi)\|\xi\|^2) dt = 0$$

und damit $\frac{d}{dt}\|\xi\|(t_0) = 0$ oder $d\log\|\xi\|(t_0) = 0$.

Beweis: Klar nach Lemma 51.

Bemerkung: Sei $\Sigma(t_0)w = 0$ für $w \neq 0$ und $\Sigma(t)[w] = a \cdot (t - t_0) + 0((t - t_0)^2)$ die Taylorentwicklung. Dann ist für $t < t_0$ die Matrix $\Sigma(t)$ definit. Also

$$a = -g(0)\sigma^\vee[w] \leq 0.$$

Also ändert Σ bei $t \leq t_0$ die Signatur, zumindestens im Fall $g(0)\sigma^\vee[w] \neq 0$.

¹³Alternativ: Wird nämlich $\xi(t_1) = 0$ für ein nichttriviales Jacobifeld $\xi(t)$ mit $\xi(0) = 0$, so folgt $\|\xi(t_1)\|^2 = 0$. Da $\|\xi(t)\|$ eine nichtnegative Funktion ist, existiert nach dem Satz von Rolle daher eine Nullstelle t_0 der Ableitung im Intervall $(0, t_1)$.

¹⁴Siehe nächstes Kapitel

Bemerkung: Im Fall globaler nichtpositiver Krümmung auf M gilt $1 \leq \Sigma$ auf ganz U . Das heisst, es kann keinen Konvexitätspunkt geben. Dann gibt es aber auch keinen kritischen Punkt.

Korollar 34. *Im Fall globaler nichtpositiver Krümmung auf M ist der reguläre Stern $U = \mathbb{R}^N$.*

Ist ausserdem M einfach zusammenhängend M , zeigt man leicht, dass

$$\exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M$$

eine unverzweigte Überlagerung ist. Daher ist $\exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M$ dann ein globaler Diffeomorphismus.

In diesem Fall ist daher

$$f_P(Q) = \frac{1}{2}d(P, Q)^2$$

auf ganz M wohldefiniert. Es folgt dann (Korollar 29)

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{2}d(P, \cdot)^2 \right] \geq 1.$$

Allgemeine Bemerkung: Der Tangentialraum \mathbb{R}^N zerfällt in die abgeschlossene Menge der kritischen Punkte und die abgeschlossene Menge der Punkte mit $\det(\dot{P}(t)) = 0$. Das offene Komplement der Vereinigung dieser beiden abgeschlossenen Menge zerfällt in Zusammenhangskomponenten (Sektoren) auf denen der Sylvertyp der symmetrischen Matrix $\Sigma(t)$ sich nicht ändert!

Kapitel 9

Lokale Extrema und der reguläre Stern

9.1 Vorbemerkung

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass im Prinzip eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit M sich durch eine einzige Karte beschreiben lässt. Dass dies nicht im wörtlichen Sinne gelten kann, ist klar. Eine kompakte Fläche wie etwa eine Sphäre kann nie durch eine einzige Karte beschrieben werden, da anderenfalls der \mathbb{R}^N ja nicht zusammenhängend wäre. Was man erhält ist eine Karte mit Singularitäten am Rand.

Genauer gesagt gilt folgendes: Ist P ein beliebiger Punkt von M und sei $f : \mathbb{R}^N \rightarrow M$ die Exponentialabbildung in diesem Punkt, dann ist das Bild des Abschlusses \overline{U} von U unter f ganz M . Dies liefert eine ‘Karte’ U für M mit ‘Singularitäten’ am Rand. Natürlich ist die Abbildung $U \rightarrow M$ im allgemeinen auch nicht injektiv!

Das wesentliche Resultat dieses Kapitels zum Beweis dieser Aussage, charakterisiert wann eine Geodäte γ von P nach Q minimale Länge unter allen in ihrer Nähe liegenden Kurven besitzt. Die Antwort lautet: Genau dann, wenn γ das Bild einer Geraden durch Null ist, welche im Abschluss \overline{U} liegt.

9.2 Die ersten beiden Variationen

Für Riemannsche Mannigfaltigkeiten M wurde gezeigt: Unter den glatten Kurven $\gamma : I = [a, b] \rightarrow M$ mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$ sind Minima des Längenfunktional notwendig Geodäten (Satz 15). Andererseits gilt

$$\mathbf{E}(\gamma) \cdot (b - a) \geq \frac{1}{2} \mathbf{L}(\gamma)^2$$

für die Energie mit Gleichheit im Geodätenfall. Es bleibt noch zu klären, ob Geodäten die einzigen Minima des Energiefunktional sind. Die Energie ist auch für indefinite Metriken definiert, so dass wir diesen Fall mitbetrachten.

Familien $\gamma_s(t)$: Wir betrachten eine glatte Abbildung $f(s, t) = \gamma_s(t)$

$$f : I^r \times I \rightarrow M .$$

mit $f(0, t) = \gamma(t)$. ObdA $(s, t) \in I^r \times I$ für ein Intervall I .

Ableitungen: Seien $T = f_*(\frac{\partial}{\partial t})(s, t)$ und $S = f_*(\frac{\partial}{\partial s_i})(s, t)$ die zugeordneten Richtungsfelder in $f^*(T(M))$ auf $I^r \times I$. Seien ∇_T und ∇_{S_i} die zugeordneten Derivationen entlang der Teilfläche. Dann gilt für alle $s \in I^r$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_1} \mathbf{E}(\gamma_s) &= \frac{d}{ds_1} \frac{1}{2} \int_I \langle T, T \rangle dt = \frac{1}{2} \int_I \nabla_{S_1} \langle T, T \rangle dt \\ &= \int_I \langle \nabla_{S_1} T, T \rangle dt \\ &= \int_I \langle \nabla_T S_1, T \rangle dt , \end{aligned}$$

letzteres wegen der Torsionsfreiheit des Zusammenhangs.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_2} \frac{d}{ds_1} \mathbf{E}(\gamma_s) &= \frac{d}{ds_2} \frac{d}{ds_1} \frac{1}{2} \int_I \langle T, T \rangle dt \\ &= \frac{d}{ds_2} \int_I \langle \nabla_T S_1, T \rangle dt \\ &= \int_I \nabla_{S_2} \langle \nabla_T S_1, T \rangle dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_I (\langle \nabla_{S_2} \nabla_T S_1, T \rangle + \langle \nabla_T S_1, \nabla_{S_2} T \rangle) dt \\
&= \int_I (\langle \nabla_{S_2} \nabla_T S_1, T \rangle + \langle \nabla_T S_1, \nabla_T S_2 \rangle) dt \\
&= \int_I (\langle \nabla_T \nabla_{S_2} S_1, T \rangle + \langle R(S_2, T) S_1, T \rangle + \langle \nabla_T S_1, \nabla_T S_2 \rangle) dt
\end{aligned}$$

wegen $\nabla_S \nabla_T - \nabla_T \nabla_S = R(S, T)$.

Satz 12. Ist $f : I = [a, b]^2 \rightarrow M$ eine glatte Familie von Kurve γ_s in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M , dann gilt

$$\boxed{\frac{d}{ds} \mathbf{E}(\gamma_s) = \langle S, T \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle S, \nabla_T T \rangle dt} .$$

Beweis: Beachte $\langle S, T \rangle \Big|_a^b = \int_a^b \nabla_T \langle S, T \rangle dt = \int_a^b \langle \nabla_T S, T \rangle dt + \int_a^b \langle S, \nabla_T T \rangle dt$.

Bemerkung: Gilt $f(s, a) = P$ und $f(s, b) = Q$, d.h. haben alle Kurven $\gamma_s(t) = f(t, s)$ den selben Anfangs- und Endpunkt, dann gilt $S(a) = S(b) = 0$. Also entfällt der erste Term: $\langle S, T \rangle \Big|_a^b = 0$.

Übungsaufgabe: Jedes Vektorfeld $\xi(t)$ entlang γ mit $\xi(a) = \xi(b)$ kann als Einschränkung einer glatten Familie $f(t, s)$ von Kurven mit $f(t, a) = P$ und $f(t, b) = Q$ erhalten werden.

Ist $\gamma = \gamma_0$ eine Kurve mit extremaler Energie – unter allen glatten Verbindungskurven von P nach Q – dann folgt mit Hilfe der Übungsaufgabe

$$\frac{d}{ds} \mathbf{E}(\gamma_0) = 0 .$$

Wegen $T(t, 0) = \dot{\gamma}(t)$ folgt aus Satz 12 somit $\int_a^b \langle \xi, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} \rangle dt = 0$ für alle $\xi(t) = S(t, 0)$ mit $\xi(a) = \xi(b) = 0$. Daraus folgt $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.

Korollar 35. Für eine (nicht notwendig Riemannsche) Mannigfaltigkeit (M, g) ist jedes Extremum des Energiefunktional – auf der Menge aller glatten Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ mit festem Anfangspunkt und Endpunkt – eine Geodäte.

Analog zu Satz 12 zeigt man wegen $\nabla_T T \Big|_{s=0} = \nabla_{\dot{\gamma}_0} \dot{\gamma}_0 = 0$

Satz 13. Ist $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodäte, dann gilt

$$\boxed{\frac{d}{ds_2} \frac{d}{ds_1} \mathbf{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \langle \nabla_{S_2} S_1, T \rangle \Big|_a^b + \int_a^b (\langle R(S_2, T) S_1, T \rangle + \langle \nabla_T S_1, \nabla_T S_2 \rangle) dt} .$$

9.3 *Länge versus Energie

Wir nehmen $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})(t) > 0$ (dabei ist g nicht notwendig definitiv). Bei geeigneter Wahl der Normalkoordinaten gilt $g_{11}(0) = 1$ und $g_{1j}(0) = 0$ für $j \neq 0$. Wir nehmen an, die Normalkoordinaten seien so gewählt.

Beachte $\mathbf{E}(\gamma_\lambda) = \frac{1}{2} \int N dt$ und $\mathbf{L}(\gamma_\lambda) = \int \sqrt{N} dt$, wobei aber durch Parametrisierung nach der Weglänge angenommen werden kann $N_{s_1=0} = 1$ für $N = \|\dot{\gamma}\|^2$. Also $g_{11}(0) = 1$, und damit $g_{11}(x) = 1$ wegen Lemma 68.1. Es folgt für die Variationsableitung $\frac{d}{ds}$

$$\frac{d}{ds} \mathbf{L} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{d}{ds} N}{\sqrt{N}} dt, \quad \mathbf{E}' = \frac{1}{2} \int \frac{d}{ds} N dt.$$

und dann

$$\frac{d}{ds_2} \frac{d}{ds_1} \mathbf{L} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{d}{ds_2} \frac{d}{ds_1} N}{\sqrt{N}} dt + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{\left(\frac{d}{ds_2} N \cdot \frac{d}{ds_1} N\right)}{\sqrt{N}^3} dt.$$

Somit folgt nach Bereinigung des Nenners für $s_1 = s_2 = 0$

$$\frac{d}{ds_2} \frac{d}{ds_1} \mathbf{L}|_{s_i=0} = \frac{d}{ds_2} \frac{d}{ds_1} \mathbf{E}''|_{s_i=0} - \frac{1}{4} \int_a^b \frac{d}{ds_2} N|_{s_2=0} \cdot \frac{d}{ds_1} N|_{s_1=0} dt$$

für $\frac{d}{ds} N = 2\langle T, \nabla_S T \rangle = 2\langle T, \nabla_T S \rangle$ und $T = \dot{\gamma}$. Somit für $\xi(t) = S(0, t)$

$$\mathbf{L}''|_{\lambda=0} = \mathbf{E}''|_{\lambda=0} - \int_a^b \langle T, \nabla_T \xi_1 \rangle \langle T, \nabla_T \xi_2 \rangle dt.$$

9.4 Die Indexform

Definition: Für Felder ξ_1, ξ_2 entlang einer Geodäte γ definiert

$$I(\xi_1, \xi_2) = \int_a^b (\langle R(T, \xi_1)T, \xi_2 \rangle + \langle \nabla_T \xi_1, \nabla_T \xi_2 \rangle) dt$$

oder äquivalent

$$I(\xi_1, \xi_2) = \langle \nabla_T \xi_1, \xi_2 \rangle \Big|_a^b + \int_a^b \langle R(T, \xi_1)T - \nabla_T \nabla_T \xi_1, \xi_2 \rangle dt$$

eine symmetrische Bilinearform, die sogenannte Indexform.

Gilt zusätzlich $\|T\| = 1$ und $\langle \xi, T \rangle = 0$ für $T = \dot{\gamma}$ und $\|T\| = 1$, dann ist

$$I(\xi, \xi) = \int_a^b (\|\nabla_T \xi\|^2 - \kappa(T, \xi) \cdot \|\xi\|^2) dt.$$

Definition: Sei $\mathcal{F}_\gamma(a, b)$ der Raum der Felder ξ entlang $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, welche $\xi_i(a) = \xi_i(b) = 0$ erfüllen.

Theorem 6. Sei γ eine Extremalkurve, d.h. die Energie $\mathbf{E}(\gamma)$ sei extremal für alle Kurven¹ γ von $P = \gamma(a)$ nach $Q = \gamma(b)$. Dann ist die Indexform $I(\xi_1, \xi_2)$ auf dem Raum $\mathcal{F}_\gamma(a, b)$ positiv semidefinit.

Beweis: 1) Sei γ eine Extremalkurve zwischen zwei Punkten P und Q . D.h. die Energie nimmt ihr Minimum für für alle Verbindungskurven in γ an. Dann ist erste Ableitung Null und die zweite Ableitung $\frac{d^2}{ds^2} \mathbf{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} \geq 0$ semidefinit² für jede Familie $f(t, s) = \gamma_s$ mit $f(a, s) = P$ und $f(b, s) = Q$ und $\gamma_0 = \gamma$.

2) Die zweite Ableitung der Energie berechnet man mit den Ansatz $F(t, s_1, s_2) = f(t, s_1 + s_2)$. Mit $f_* \left(\frac{d}{ds} \right) = S = F_* \left(\frac{\partial}{\partial s_i} \right) = S_i$ liefert dies

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathbf{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \frac{d^2}{ds_1 ds_2} \mathbf{E}(\gamma_{s_1, s_2}) \Big|_{s_1=s_2=0}.$$

Da $S(a, s) = S(b, s)$ verschwindet, verschwindet auch ∇_S in den Punkten (a, s) und (b, s) . Es folgt für $\xi(t) = S(t, 0) = d\gamma_s/ds(0)$ dann $\frac{d^2}{ds^2} \mathbf{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = I(\xi, \xi)$ nach Satz 13.

¹Dies gilt dann nicht nur für glatte, sondern auch für stückweise glatte Kurven.

²Im Lorentzfall einer zeitartigen Geodäte, welche \mathbf{E} maximiert, gilt die umgekehrte Ungleichung und die Form ist negativ semidefinit!

9.5 Konjugierte Punkte

Definitionen: Sei γ eine Geodäte und seien $P = \gamma(a)$ und $Q = \gamma(b)$ Punkte auf der Geodäte. Der Vektorraum \mathcal{J}_γ der Jacobiformen entlang γ ist ein $2N$ -dimensionaler reeller Vektorraum. Seien $\mathcal{J}_\gamma(a)$ resp. $\mathcal{J}_\gamma(b)$ die N -dimensionalen Unterräume der in a resp. b verschwindenden Formen in \mathcal{J}_γ . Dann ist

$$\mathcal{J}_\gamma(a, b) = \mathcal{J}_\gamma(a) \cap \mathcal{J}_\gamma(b)$$

ein Vektorraum der Dimension $\leq N$. Beachte $\mathcal{J}_\gamma(a, b) = \mathcal{F}_\gamma(a, b) \cap \mathcal{J}$.

Definition: Punkte $P = \gamma(a)$ und $Q = \gamma(b)$ auf einer Geodäte γ heissen konjugiert, wenn gilt und $\mathcal{J}_\gamma(a, b) \neq 0$. Hierbei sei $a \neq b$.

Für ein Jacobifeld ξ_1 entlang γ und für beliebiges ξ_2 gilt

$$I(\xi_1, \xi_2) = \langle \nabla_T \xi_1, \xi_2 \rangle \Big|_a^b.$$

Der Index verschwindet also im Fall $\xi_2(a) = \xi_2(b) = 0$. Somit sind die Räume $\mathcal{F}_\gamma(a, b)$ und \mathcal{J}_γ orthogonal bezüglich der Index Form

$$I(\mathcal{J}_\gamma, \mathcal{F}_\gamma(a, b)) = 0.$$

Offensichtlich gilt sogar

Lemma 61. Sei γ eine Geodäte. Das Radikal der Indexform $I(\xi_1, \xi_2)$ auf dem Raum $\mathcal{F}_\gamma(a, b)$ (Felder entlang der Geodäte γ , welche $\xi_i(a) = \xi_i(b) = 0$ erfüllen) ist der Unterraum $\mathcal{J}_\gamma(a, b)$ der Jacobifelder in $\mathcal{F}_\gamma(a, b)$.

Trivial ist das folgende

Lemma 62. Für eine Geodäte γ sind äquivalent

- $P = \gamma(a)$ und $Q = \gamma(b)$ sind nicht konjugiert bezüglich γ .
- $\mathcal{F}_\gamma = \mathcal{J}_\gamma + \mathcal{F}_\gamma(a, b)$
- $\mathcal{F}_\gamma(a) = \mathcal{J}_\gamma(a) + \mathcal{F}_\gamma(a, b)$
- $\mathcal{F}_\gamma(a) = \mathcal{J}_\gamma(a) \oplus \mathcal{F}_\gamma(a, b)$

- $\mathcal{F}_\gamma(a, b) = 0$.

Insbesondere folgt

Korollar 36. *Die Jacobifelder in $\mathcal{J}_\gamma(a)$ trivialisieren das Vektorbündel der Felder entlang der Geodäte γ auf dem Intervall $[a, b]$ genau dann, wenn keiner der Punkte $\gamma(t), t \in (a, b]$ konjugiert zu $P = \gamma(a)$ ist.*

Für P betrachten wir die eindeutig durch γ bestimmte Gerade im Tangentialraum, welche unter \exp_P auf γ abgebildet wird mit $P = \exp_P(0)$ und $Q = \exp_P(u)$. Angenommen keiner der Punkte $tu, t \in [0, 1]$ ist singulär. Dann werden die Jacobifelder $\mathcal{J}_\gamma(0)$ in Normalkoordinaten durch die Transportmatrix $N(t)$ beschrieben. Genauer: Die Spalten der Matrix $\Phi(t) = N(t) \cdot t$ erzeugen den Vektorraum $\mathcal{J}_\gamma(0)$. Sei nun $t \in (0, 1]$. Dann ist $\mathcal{J}_\gamma(0, t) = 0$ genau dann, wenn gilt $\det \Phi(t) \neq 0$. Wegen $\Phi(t) = N(t) \cdot t$ und da $N(t)$ die Jacobimatrix des kanonischen Koordinatenwechsels im Punkt $\exp_P(ut)$ beschreibt folgt für alle $t \in (0, 1]$:

$$\boxed{ut \text{ ist singulärer Punkt} \iff Q = \exp_P(ut) \text{ ist konjugiert zu } P \text{ bezgl. } \gamma}.$$

Anders formuliert, die Zuordnung $\xi \rightarrow \dot{\xi}(0)$ liefert einen Isomorphismus

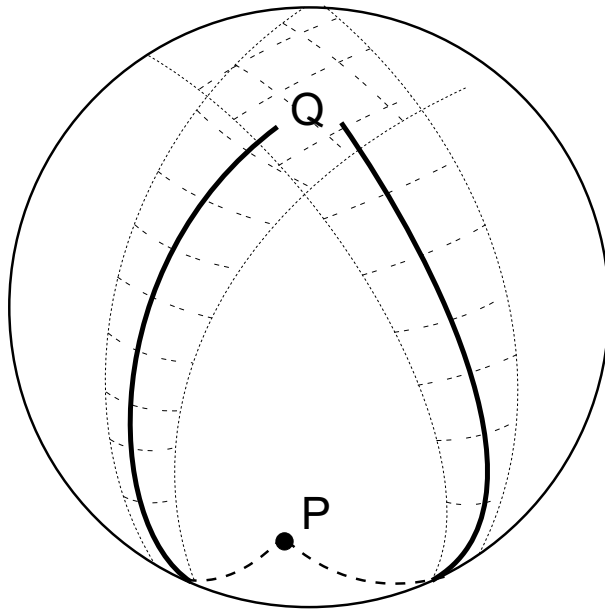
$$\mathcal{J}_\gamma(0) \cong T_P(M) = \mathbb{R}^N.$$

Unter dieser Abbildung wird $\mathcal{J}_\gamma(0, t)$ isomorph auf den Kern der Jacobimatrix des kanonischen Kartenwechsels im Punkt $Q = \exp_P(ut)$ abgebildet.

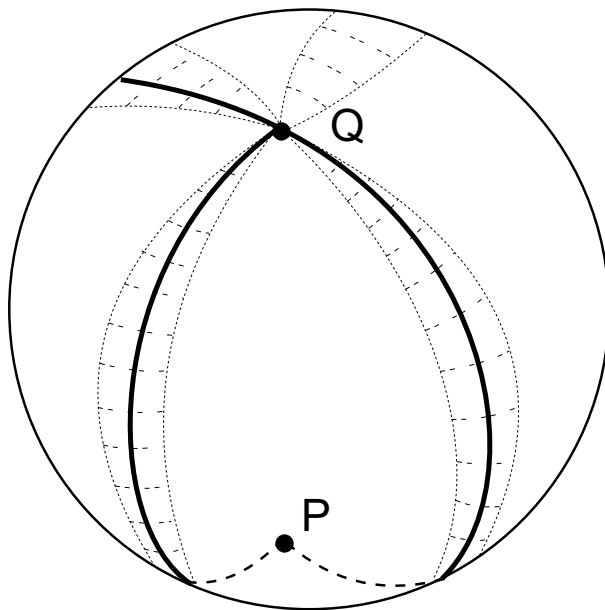
Korollar 37. *Für eine Gerade $\gamma(t) = ut$ in Normalkoordinaten sind equivalent*

- ut_0 ist der erste singuläre Punkt auf der Gerade $u\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- $\exp_P(ut_0)$ ist der erste zu P konjugierte Punkt in M auf $u\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Beispiel für nicht konjugierte Punkte:



Beispiel für konjugierte Punkte:



9.6 Charakterisierung der Minimalkurven

Wir zeigen nun den Satz von Jacobi

Satz 14. Für eine Geodäte γ von $P = \gamma(0)$ nach $Q = \gamma(b)$ sind äquivalent:

- γ ist extremal für die Energie unter allen nahe bei γ gelegenen Kurven.
- Die Indexform I ist positiv semidefinit auf $\mathcal{F}_\gamma(a, b)$
- Echt zwischen P und Q liegt auf γ kein zu P (oder äquivalent zu Q) konjugierter Punkt. (P und Q können konjugiert sein).

Theorem 7. Sei M eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und P ein Punkt in M . Sei U der reguläre Stern von P , d.h. die maximale 0-sternförmige offene Teilmenge von $T_P(M) = \mathbb{R}^N$ im Komplement der singulären Punkte. Sei \bar{U} ihr Abschluss. Dann gilt

$$M = \exp_P(\bar{U}).$$

Beweis des Theorems: Jedes $Q \in M$ liegt auf einer Minimalkurve γ durch P . Die Minimalkurve γ ist eine Geodäte durch P . Diese liegt im Bild von \bar{U} unter \exp_P wegen Satz 14.

Beweis des Satzes: 1. und 2. sind per Definition äquivalent. Angenommen 3. gilt. Dann kann man obdA die Kurve und eine tubulare Umgebung durch ihr Urbild im Tangentialraum von P ersetzen. Durch Übergang zu den Normalkoordinaten folgt daher aus der Annahme (Lemma 37), dass auf der Gerade $\gamma(t) = vt$ für $0 \leq t < a$ kein singulärer Punkt existiert: $\det(N) \neq 0$ für $0 \leq t < a$. Dasselbe gilt dann in einem Schlauch um diese Gerade. Dann kann man aber auf den Schlauch das Argument von Lemma 13 wörtlich übertragen! Somit ist γ eine lokale Extremalkurve.

Angenommen es gilt 2, d.h. die Indexform sei semidefinit auf $\mathcal{F}_\gamma(0, b)$. Um 3. zu zeigen, genügt: Existiert ein konjugierter Punkt $0 < c < b$, dann ist die Indexform indefinit. Es genügt zu zeigen, dass es in der Nähe von γ eine stückweise glatte Kurve γ_s echt kleiner Energie gibt. Die Kurve $\gamma_s(t) = \gamma(t) + s\xi(t) \in \gamma^*(T(M))$ findet man durch eine geeignetes stetiges stückweises glattes Feld $\xi(t)$ entlang γ . Wir können für den Beweis aber nicht mehr in Normalkoordinaten rechnen! Wir rechnen in einer globalen Trivialisierung des Vektorbündels $\gamma^*(T(M))$,

genauer einer Umgebung des Nullschnitts, welche sich auf eine Umgebung der Kurve abbilden lässt. Es genügt dann ein stückweise³ glattes Feld $\xi(t)$ entlang γ zu konstruieren mit

$$I(\xi, \xi) < 0.$$

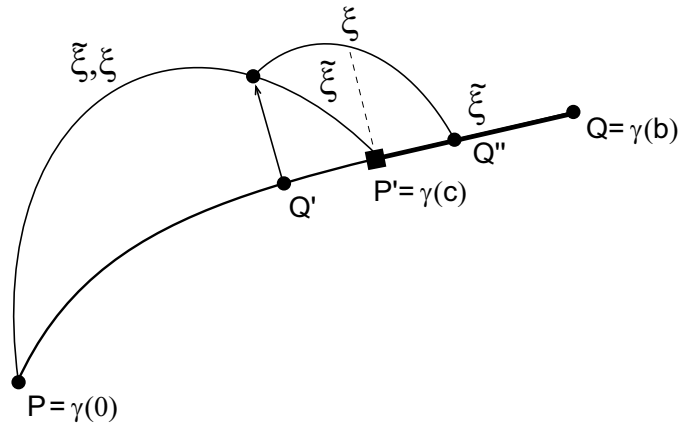
Wir betrachten dazu zwei Felder ξ und $\tilde{\xi}$

- Das stückweise glatte Jacobifeld $\tilde{\xi} \in \mathcal{J}_\gamma(a, c)$: Null auf $[c, b]$, nichttriviales Jacobifeld auf $[0, c]$ (existiert nach Lemma 62). Es gilt dann

$$I_\gamma(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = I_{PP'}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) + I_{P'Q}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = 0.$$

- Die versetzt zusammengesetzten Jacobifelder ξ : Wähle Q' und Q'' in einer strikt konvexen Umgebung von $P' = \exp_P(c)$ zu Punkten $c' < c < c''$, nicht zueinander konjugiert, und ein Jacobifeld ξ entlang γ mit $\xi(Q'') = 0$ und $\xi(Q') = \tilde{\xi}(Q')$. Ein solches Jacobifeld ξ existiert nach Wahl von Q', Q'' wegen Lemma 62 und es gilt $\xi(P') \neq 0$. Das Feld ξ ergänzen wir stückweise glatt durch das bereits gewählte Jacobifeld $\tilde{\xi}$ zwischen P und Q' und durch Null zwischen Q'' und Q .

Wir behaupten $I_\gamma(\xi, \xi) < I_\gamma(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = 0$.



Zum Beweis genügt es natürlich die Kurve γ durch das Teilstück γ' von Q' nach Q'' zu ersetzen. Auf diesem Teilstück γ' ist ξ glatt und wegen $\tilde{\xi}(P') = 0$ von $\tilde{\xi}$

³Für stückweise glatte Felder mit Knickstellen bei $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ist der Index $I(\xi, \xi)$ die Summe der Teilindizes zu den Geodätenstücken für $t \in [t_i, t_{i+1}]$, auf denen ξ glatt ist.

verschieden. Es gilt

$$I_{\gamma'}(\tilde{\xi}, \tilde{\xi}) = I_{\gamma'}(\tilde{\xi} - \xi, \tilde{\xi} - \xi) + I_{\gamma'}(\xi, \xi) ,$$

denn $\xi - \tilde{\xi} \in \mathcal{F}_{\gamma'}(c', c'')$ ist orthogonal zu Jacobifeldern $\xi \in \mathcal{J}_{\gamma'}$ (Bemerkung vor Lemma 61). Aber

$$\tilde{\xi} - \xi \in \mathcal{F}_{\gamma'}(c', c'') .$$

Da Q' und Q'' in einer strikt konvexen Umgebung von P' liegen, ist γ' eine Minimalcurve. Also ist $I_{\gamma'}$ semidefinit auf $\mathcal{F}_{\gamma'}(c', c'')$ (Theorem 6). Da γ' keine Konjugierten Punkte enthält ist das Radikal $\mathcal{J}_{\gamma'}(c', c'')$ von $I_{\gamma'}$ auf $\mathcal{F}_{\gamma'}(c', c'')$ trivial (Lemma 61). Also

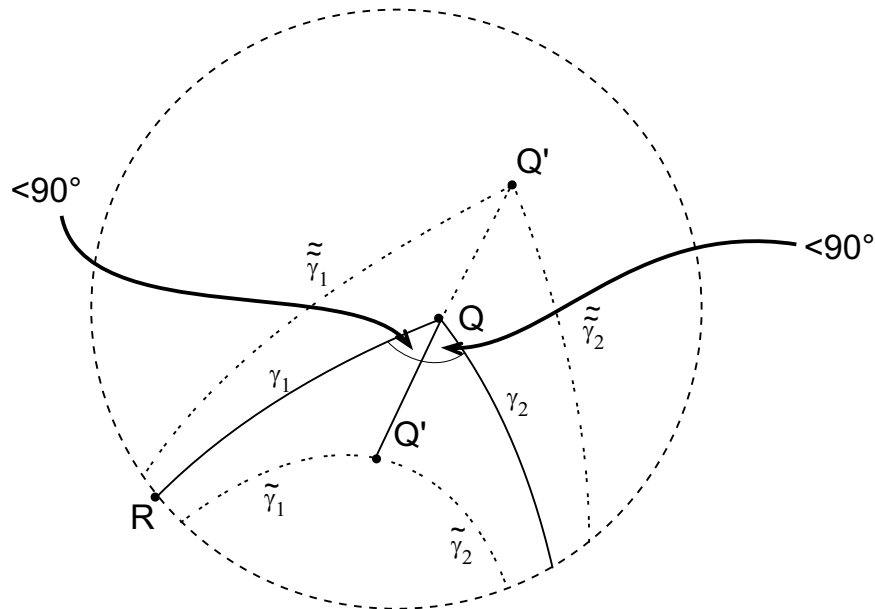
$$I_{\gamma'}(\tilde{\xi} - \xi, \tilde{\xi} - \xi) > 0,$$

wegen $\tilde{\xi} \neq \xi$ auf γ' . Der Beweis zeigt ausserdem

Folgerung 8. Seien ξ_1, ξ_2 Felder entlang eine Geodäte $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ohne konjugierte Punkte mit $\xi_1(a) = \xi_2(a)$ und $\xi_1(b) = \xi_2(b)$. Ist ξ_1 ein Jacobifeld, dann gilt

$$I_{\gamma}(\xi_1, \xi_1) \leq I_{\gamma}(\xi_2, \xi_2) .$$

9.7 Der Satz von Klingenberg

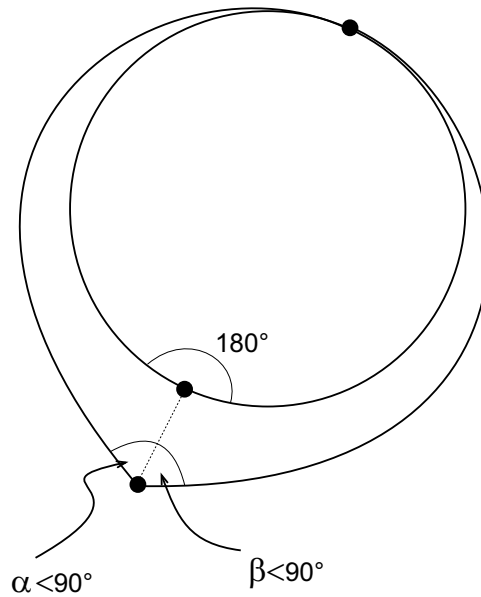


Angenommen γ_1 und γ_2 sind zwei verschiedene Geodäten von P nach Q . Angenommen Q ist kein konjugierter Punkt von P auf γ_1 und γ_2 . Dann kann man an den Geodäten ‘wackeln’ und überstreicht damit eine volle Umgebung von Q (siehe Seite 172).

Angenommen γ_1 und γ_2 fügen sich nicht zu einer glatten geschlossenen Geodäte zusammen, dann existieren Punkte Q' beliebige nahe bei Q , so dass die dann eindeutige Geodäte $Q'Q$ einen Winkel $< 90^\circ$ zu den Geodäten γ_1 und γ_2 im Punkt Q besitzt.

Wähle die gestrichelte geodätische Kugel vom Radius R um Q klein genug. In geodätischen Normalkoordinaten sind Längen dann von der Größenordnung r , während die Abweichung von der euklidischen Metrik Korrekturterme der Ordnung $O(r^2)$ liefert. Daher zeigt euklidische Elementargeometrie, dass die Längen von $\tilde{\gamma}_i$ von P nach Q' obdA kürzer sind als die Längen von γ_i von P nach Q . (Anderenfalls betrachte Folge $\tilde{\gamma}_i \rightarrow \gamma_i$ usw.).

Folgerung: Sind γ_1 und γ_2 zwei Geodäten im regulären Stern von Null mit den Endpunkten x_1 resp. x_2 , so dass die Bildgeodäten $\gamma_{M,i}$ unter der Exponentialabbildung den selben Endpunkt $Q = \exp_P(x_1) = \exp_P(x_2)$ besitzen, aber keine glatte geschlossene Geodäte bilden. Dann gibt es im regulären Stern Geodäten $\tilde{\gamma}_i$ durch Null mit Endpunkten \tilde{x}_i , so dass gilt: 1) $\exp_P(\tilde{x}_1) = \exp_P(\tilde{x}_2)$ und 2) $d(0, \tilde{x}_i) < d(0, x_i)$.



Man zeigt daraus nun unschwer

Korollar 38. *Der Injektivitätsradius μ_P im Punkt P ist das Minimum der folgenden Größen:*

- *Der Länge der kürzesten geschlossenen glatten Geodäte durch P*
- *Der minimalen Distanz vom Ursprung zum Rand des regulären Sterns des Punktes P .*

9.8 Geschlossene Geodäten

Sei h eine monoton wachsende glatte Funktion auf $[0, \infty)$ mit $h'(t) > 0$. Für Konstanten $\lambda_+, \lambda_- > 0$ ist

$$f(Q_1, Q_2) = \lambda_+ \cdot h(\|Q_1\|_{st}^2) + \lambda_- \cdot h(\|Q_2\|_{st}^2)$$

eine glatte Funktion auf $U \times U$ (regulärer Stern).

Sei $U \times_M U \subset U \times U$ die Teilmenge der geodätischen 2-Gone: Geodäten von 0 nach Q_1 resp Q_2 in U_R definieren unter der Exponentialabbildung ein geodätisches 2-Gon mit den Ecken P , falls $\exp_P(Q_1) = \exp_P(Q_2) =: Q$. Wir ordnen dem 2-Gon den Wert $f(Q_1, Q_2)$ zu. Die entarteten 2-Gone auf der Diagonale $\Delta : U \hookrightarrow U \times_M U$ definieren eine Wegezusammenhangskomponente wegen Theorem 2. Wir betrachten nur nichtentartete 2-Gone.

Minima: Ist ein solches 2-Gon keine geschlossene glatte Geodäte, gibt es in der Nähe ein geodätisches 2-Gon von P nach \tilde{Q}' , dessen beide Schenkel kürzer sind und das wieder in U liegt. Wegen der Monotonie von h hat das neue 2-Gon einen kleineren f -Wert. Das Minimum von f wird daher von einer geschlossenen glatten Geodäte γ_M durch P realisiert ⁴. Angenommen γ_M sei mit minimalem f gewählt mit Lift $\gamma(t) = ut$ und $Q_1 = \gamma(t)$ sowie $Q_2 = \gamma(2t_0 + t)$. ObdA $t < 0$.

Also: $\gamma(t) = ut$ definiert eine geschlossene Geodäte. ObdA $0 < t_0$ minimal mit $\exp_P(ut_0) = \exp_P(-ut_0)$. Seien $0 < t_1$ und $t_{-1} < 0$ die erste kritische Punkte mit

$$2 \cdot t_0 < t_1 - t_{-1}.$$

Für $t_{-1} < t < 0$ mit $0 < t + 2t_0 < t_1$ ist \exp_P regulär bei $Q_1 = \gamma(t)$ und $Q_2 = \gamma(t + 2t_0)$ mit $Q = \exp_P(Q_1) = \exp_P(Q_2)$. Es gibt also Umgebungen V um Q und V_1, V_2 um Q_1, Q_2 im regulären Stern, auf denen die Abbildung \exp_P ein Diffeomorphismus ist. Dies erklärt \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2 mit $\exp_P(\tilde{Q}_1) = \exp_P(\tilde{Q}_2) = \tilde{Q}$ für alle $\tilde{Q} \in V$.

Da $f(\tilde{Q}) = f(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_1)$ sein Minimum in $\tilde{Q} = Q$ annimmt, gilt in geodätischen Normalkoordinaten 1.Ordnung bei Q

$$\nabla^2(f)(Q) \geq 0$$

⁴Das Minimum wird angenommen und ist kein entartetes 2-Gon! Man kann U durch ausschöpfende Kompakta ersetzen.

und $\nabla(f)(Q) = 0$.

Spezialfall: Für $h(t) = t$ wird das Minimum

$$\frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot t_0^2$$

von $f = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 (2t_0 - x)^2$ bei $x = \frac{2\lambda_1 t_0}{\lambda_1 + \lambda_2}$ für $0 \leq x, y$ mit $x + y = 2t_0$ bei $y = \frac{2\lambda_2 t_0}{\lambda_1 + \lambda_2}$ angenommen. Da das Minimum monoton von t_0 abhängt, ist γ eine geschlossene Minimalgeodäte durch Null (und jede geschlossene Minimalgeodäte liefern ein Minimum vorausgesetzt $t_{-1} < -\frac{2\lambda_1 t_0}{\lambda_1 + \lambda_2} = t$ und $\frac{2\lambda_2 t_0}{\lambda_1 + \lambda_2} < t_1$).

Man erhält dann für orthogonales θ

$$\nabla^2(f)(Q) = \lambda_1 \Sigma_u(2t_0 + t) + \lambda_2 \theta' \Sigma_{-u}(-t) \theta \geq 0.$$

Wählt man λ_1, λ_2 geeignet, gilt $|t| \lambda_1 = (2t_0 + t) \lambda_2$. Es folgt für eine positive Konstante c

$$c \cdot \left(\frac{\Sigma_u(t + 2t_0)}{t + 2t_0} + \frac{\theta' \Sigma_{-u}(-t) \theta}{-t} \right) \geq 0$$

oder⁵.

$$\boxed{\Sigma_u(t + 2t_0) - \theta' \Sigma_u(t) \theta \geq 0}.$$

Korollar 39. Sei P ein fester Punkt von M . Sei t_0 die Länge einer minimalen geschlossenen Geodäte auf M durch P . Seien $t_1 > 0$ und $t_{-1} < 0$ die ersten konjugierten Punkt auf dieser Geodäte bezüglich P . Dann gilt entweder $t_1 - t_{-1} \leq 2t_0$, insbesondere also $\min(t_1, -t_{-1}) \leq t_0$ oder

$$2t_0 \leq \max(t_1, -t_{-1}).$$

Beweis: Betrachte im zweiten Fall den Limes $t + 2t_0 \rightarrow t_1$ für $t < 0$ von links. Nach Annahme bleibt $\text{tr}(\Sigma_u(t))$ beschränkt, während $\text{tr}(\Sigma(2t_0 + t))$ gegen $-\infty$ geht. Ein Widerspruch zu obiger Ungleichung.

⁵Eine analoge Formel hat man für zwei beliebige Punkte auf einer lokalen Minimalkurve

Kapitel 10

Vergleichssätze

10.1 Asymptotik von Jacobifeldern

Für ein beliebiges Vektorfeld Y entlang einer Kurve γ ist $\|Y\|^3 \frac{d^2}{dt^2} \|Y\|$ gleich $\|\nabla_T Y\|^2 \|Y\|^2 + \langle Y, \nabla_T \nabla_T Y \rangle \|Y\|^2 - \langle Y, \nabla_T Y \rangle^2$. Für ein Jacobifeld kann man den Term $\langle Y, \nabla_T \nabla_T Y \rangle \|Y\|^2$ durch $-R(T, Y, T, Y) \|Y\|^2$ ersetzen.

Folgerung 9. Für Jacobifelder ξ entlang einer Geodäte $\gamma(t)$ mit Tangentenfeld $T = \dot{\gamma}$ gilt

$$\frac{d^2}{dt^2} \|\xi\| = \|\xi\|^{-3} \left(\|\nabla_T \xi\|^2 \|\xi\|^2 - \langle \xi, \nabla_T \xi \rangle^2 \right) - R(T, \xi, T, \xi) \|\xi\|^{-1}.$$

Insbesondere wegen Cauchy-Schwarz

$$\frac{d^2}{dt^2} \|\xi\| \geq -R(T, \xi, T, \xi) \|\xi\|^{-1}.$$

Für $\langle \xi, T \rangle = 0$ ist die rechte Seite gleich $-\kappa(T \wedge \xi) \|\xi\| \|T\|^2$, also proportional zur Schnittkrümmung.

Satz 15. Für ein Jacobifeld $\xi \neq 0$ entlang einer Geodäte γ mit Richtung $T = \dot{\gamma}$, welches $\xi(0) = 0$ und $\langle \xi, T \rangle = 0$ erfüllt, gilt $v := \nabla_T \xi(0) \neq 0$ sowie

$$\|\xi\|(t) = \|v\| \cdot t - \frac{1}{6} \kappa(v \wedge T)(0) \cdot \|v\| \|T\|^2 \cdot t^3 + O(t^4).$$

Insbesondere folgt: $t \frac{d}{dt} \log \|\xi\|(t) = 1 - \frac{1}{3} \kappa(v \wedge T)(0) \cdot \|T\|^2 \cdot t^2 + O(t^3)$.

Beweis: In Normalkoordinaten ist $\xi(t) = vt$. Also $v \neq 0$ wegen $\xi \neq 0$. Wegen $\nabla_T \xi = (\partial_t + \Gamma_T)vt = (1 + t\Gamma_T)v = v + O(t^2)$ und $t^{-1}\xi = v$ gilt für $t \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dt} \|\xi\| = \frac{\langle \xi, \nabla_T \xi \rangle}{\|\xi\|} = \frac{\langle t^{-1}\xi, \nabla_T \xi \rangle}{\|t^{-1}\xi\|} \rightarrow v$$

und $\frac{d^2}{dt^2} \|\xi\|(0) = 0$. Nach Folgerung 9

$$\|\xi\|^{-3} \left(\|\nabla_T \xi\|^2 \|\xi\|^2 - \langle \xi, \nabla_T \xi \rangle^2 \right) = t \|v\|^{-3} \left(\|\Gamma_T v\|^2 \|v\|^2 - \langle v, \Gamma_T v \rangle^2 \right) = O(t^3).$$

Dies zeigt $\frac{d^3}{dt^3} \|\xi\|(0) = -\frac{d}{dt} (\kappa(T \wedge \xi(t)) \|\xi\| \|T\|) = -\kappa(v \wedge T)(0) \cdot \|v\| \|T\|^2$ wegen $\|\xi\|(0) = 0$.

10.2 Satz von Rauch

Obere Schranken für die Schnittkrümmung liefern uns untere Schranken für die Metrik bzw. für die Längen von Jacobifeldern. ObdA in Normalkoordinaten gilt

Satz 16. Seien g_i Metriken auf dem \mathbb{R}^N und ξ_i Jacobifelder zu g_i mit $\xi_i(0) = 0$ auf einer Geodäte $\gamma(t) = ut$ und ξ_i sei orthogonal zu $\dot{\gamma}$. Wir nehmen an:

- $g_1(0) = g_2(0)$
- $\|\xi_1(0)\| = \|\xi_2(0)\| = 0$
- $\frac{d}{dt}\|\xi_1(0)\| = \frac{d}{dt}\|\xi_2(0)\|$
- $\langle \xi_1(t), u \rangle = \langle \xi_2(t), u \rangle = 0$
- *Kein kritischer Punkt von g_1 liegt im Intervall $[0, t_0]$.*
- $\kappa_2(\dot{\gamma} \wedge \lambda_2)(t) \leq \kappa_1(\dot{\gamma} \wedge \lambda_1)(t)$ für alle $t \in [0, t_0]$ und alle λ_1, λ_2

Dann gilt für alle $t \in [0, t_0]$ die Ungleichung $\frac{d}{dt} \frac{\|\xi_2\|_2}{\|\xi_1\|_1} \geq 0$, und damit gilt auch

$$\boxed{\|\xi_2\|_2(t) \geq \|\xi_1\|_1(t)}.$$

Beweis: Zu zeigen ist $\boxed{d \log \|\xi_1\|_1(t) \leq d \log \|\xi_2\|_2(t)} \iff \boxed{\frac{d}{dt} \frac{\|\xi_2\|_2}{\|\xi_1\|_1} \geq 0}$. Wegen Satz 15 gilt die Aussage für sehr kleine t . Betrachte $\eta_1(\tau) = N_1(\tau)\xi_1(\tau)/\|\xi_1(t)\|$ und $\eta_2(\tau) = N_2(\tau)\xi_2(\tau)/\|\xi_2(t)\|$ für festes t . Wegen Lemma 69

$$d \log \|\xi_i\|_i(t) = \int_0^t \left(\|\dot{\eta}_i\|_{st} - \kappa_i(\dot{\gamma} \wedge M\eta_i)_{\gamma(\tau)} \cdot \|\eta_i\|_{st} \right) d\tau,$$

folgt die Aussage daher aus der Indexabschätzung Folgerung 8

$$\int_0^t \left(\|\dot{\eta}_1\|_{st} - \kappa_1(\dot{\gamma} \wedge M\eta_1)_{\gamma(\tau)} \cdot \|\eta_1\|_{st} \right) d\tau \leq \int_0^t \left(\|\dot{\eta}_2\|_{st} - \kappa_1(\dot{\gamma} \wedge MA\eta_2)_{\gamma(\tau)} \cdot \|\eta_2\|_{st} \right) d\tau$$

(A ist eine bzgl $\|\cdot\|_{st}$ konstante orthogonale Matrix mit $A\eta_2(t) = \eta_1(t)$) zusammen mit der Krümmungsabschätzung $-\kappa_1 \leq -\kappa_2$

$$\int_0^t \left(\|\dot{\eta}_2\|_{st} - \kappa_1(\dot{\gamma} \wedge MA\eta_2)_{\gamma(\tau)} \cdot \|\eta_2\|_{st} \right) d\tau \leq \int_0^t \left(\|\dot{\eta}_2\|_{st} - \kappa_2(\dot{\gamma} \wedge M\eta_2)_{\gamma(\tau)} \cdot \|\eta_2\|_{st} \right) d\tau.$$

Korollar 40. Gilt auf einer Geodäte $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ die Abschätzung

$$\kappa(\dot{\gamma} \wedge v) \leq \rho^2$$

für alle v orthogonal zu $\dot{\gamma}$. Dann existiert auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{\rho})$ kein zu 0 konjugierter Punkt und im Intervall $[0, \frac{\pi}{2\rho})$ kein Konvexitätspunkt¹.

Korollar 41. Gegeben Riemannsche Mannigfaltigkeiten M_i mit Punkten P_i und assoziierten Pseudometriken $g_i(x)$ auf $T_{P_i}(M_i) = \mathbb{R}^N$ und $g_1(0) = g_2(0)$, so dass für die Schnittkrümmungen gilt

$$\kappa_2(u \wedge v)(ut) \leq \kappa_1(u \wedge w)(ut)$$

für alle u, v, w in \mathbb{R}^N . Dann ist der reguläre Stern U_1 von $g_1(x)$ in dem regulären Stern U_2 von $g_2(x)$ enthalten, und es gilt

$$\boxed{g_1(x) \leq g_2(x)}$$

auf dem regulären Stern U_1 von $g_1(x)$.

Beweis: Für $x = ut$ und $v \in \mathbb{R}$ gilt

$$t^2 g(x)[v] = \|\xi\|(t)$$

wegen $t^2 g(x)[v] = t^2 v' N'(x) g(0) N(x) v = (\Phi(t)v)' (\Phi(t)v) = \eta' \eta = \|\eta\|_{st}(t) = \|\xi\|(t)$, für das Jacobifeld $\xi_v = M \eta_v$ und $\eta_v = \Phi v$. Es gilt $\xi_v(0) = 0$ und $\frac{d}{dt} \|\xi_v\|(0) = \|v\|_{st}(0)$. Aus Satz 16 folgt daher $g_1(x)[v] \leq g_2(x)[v]$ für alle $x \in U_1$ und alle $v \in \mathbb{R}^N$. Dies zeigt die Behauptung.

Man erhält also kontraktive f, h Abbildungen (Submetrien)

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{h} & M_2 \\ \downarrow f & & \\ M_1 & & \end{array}$$

wobei $f = \exp_{P_1}$ eine lokale Isometrie ist.

¹Beide Aussagen sind bestmöglich, wie das Beispiel der Kugel zeigt.

Kapitel 11

Räume mit negativer Krümmung

Kapitel 12

Liegruppen

Kapitel 13

Appendices

13.1 Appendix 1 (Eine Verallgemeinerung)

Wir zeigen $x^j g_{ij}(x) = x_i$ auf einem beliebigen sternförmigen Definitionsbereich der Exponentialabbildung. Also auf ganz \mathbb{R}^N im Fall der Exponentialabbildung $f = \exp_P : \mathbb{R}^N \rightarrow M$ einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit. Sei $g = f^*(g_M)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ der Pullback von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\nabla = f^*(\nabla_M)$ auf $f^*(TM)$ der Pullback des Levi-Civita Zusammenhangs ∇_M . Dieser Pullback ∇ ist auf ganz \mathbb{R}^N erklärt und ist metrisch bezüglich der Metrik g_M auf $f^*(TM)$. Es gilt $\nabla_{f_*X} - \nabla_{f_*Y} = f_*[X, Y]$. Siehe §1.16 und §1.17. Das Eulerfeld E definiert den Schnitt $f_*(E) \in f^*(TM)(I)$. Sei $\gamma_M : I \rightarrow M$ eine Geodäte in M durch P . Also $\gamma_M = f \circ \gamma$ für eine Kurve $\gamma(t) = tu$.

1) Linearität: Es gilt $(f_*E)(t) = f_*(x^\nu \partial_\nu) = t f_*(\dot{\gamma}) = t \dot{\gamma}_M(t)$ und $\nabla_E(f_*E) = \nabla_E(x^\nu f_*(\partial_\nu)) = E(x^\nu) f_*(\partial_\nu) + x^\nu \nabla_E f_*(\partial_\nu)$. Der Term liefert f_*E . Der zweite Term ist im Punkt t gleich $t \cdot (\nabla_M)_{\dot{\gamma}_M} \dot{\gamma}_M = 0$ (Geodätengleichung). Also $\nabla_E f_*E = f_*E$.

2) Längenformel: Es gilt $\langle f_*E, f_*E \rangle = \langle E, E \rangle_g = \sum_i x_i x^i$. Beachte wegen $f_*\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_M(t)$, dass $\|\dot{\gamma}(t)\|_{g, \gamma(t)}^2 = \|\dot{\gamma}_M(t)\|_{\gamma_M(t)}^2$ nicht von t abhängt. Also $\sum_{i,j} x^i x^j g_{ij}(x) = \sum_i x^i x_i$.

3) Beweis: Es genügt wieder, dass $\langle E, \partial_i \rangle_g = \sum_j x^j g_{ji}(x)$ linear in x ist. Da der Pullback des Levi-Civita Zusammenhangs metrisch ist, gilt

$$E \langle E, \partial_i \rangle_g = E \langle f_*E, f_*\partial_i \rangle = \langle \nabla_E(f_*E), f_*\partial_i \rangle + \langle f_*E, \nabla_E(f_*\partial_i) \rangle.$$

Wegen der Torsionsfreiheit von ∇ gilt, d.h. $\nabla_E(f_*\partial_i) = \nabla_i(f_*E) + f_*[E, \partial_i]$. Also $\nabla_E(f_*\partial_i) = \nabla_i(f_*E) - f_*\partial_i$. Setzt man dies in obige Gleichung ein, und berücksichtigt $\nabla_E(f_*E) = f_*E$ (Linearität), so erhält man

$$\begin{aligned} E \langle E, \partial_i \rangle_g &= \langle f_*E, f_*\partial_i \rangle + \left(\langle f_*E, \nabla_i(f_*E) \rangle - \langle f_*E, f_*\partial_i \rangle \right) \\ &= \langle f_*E, \nabla_i(f_*E) \rangle = \frac{1}{2} \partial_i \langle f_*E, f_*E \rangle \\ &= \frac{1}{2} \partial_i \sum_j x_j x^j = x_i. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt aus der Längenformel. Da $E \langle E, \partial_i \rangle_g$ linear ist, ist daher auch $\langle E, \partial_i \rangle_g$ linear und dann gleich x_i .

13.2 Appendix 2 (Die Riccati Differentialgleichung)

Sei $S(t)$ eine symmetrische glatte Matrixfunktion auf \mathbb{R}^N . Der Raum der vektorwertigen Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{F}(t) + S(t)F(t) = 0$ (reelle Lösungen) hat Dimension $2N$ und führt zu zwei $N \times N$ -Matrixlösungen $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ zu den Anfangswerten $H(0) = E$

$$H(t) = \begin{pmatrix} \Psi & \Phi \\ \dot{\Psi} & \dot{\Phi} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathcal{L} = \{H(t)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\}$ für α, β konstante reelle $N \times N$ -Matrizen der Raum aller Matrixlösungen der Differentialgleichung. Auf \mathcal{L} operiert $Gl(N, \mathbb{R})$ von rechts. Für eine Lösung $F_i \in \mathcal{L}$ und $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \dot{F}_1 \end{pmatrix}' J \begin{pmatrix} F_2 \\ \dot{F}_2 \end{pmatrix} = F_1' \dot{F}_2 - \dot{F}_1' F_2$$

konstant in t , wegen $\frac{d}{dt}(F_1' \dot{F}_2 - \dot{F}_1' F_2) = F_1' \ddot{F}_2 - \ddot{F}_1' F_2 = F_1' S F_2 - F_1' S' F_2 = 0$. Aus $H(0) = E$ folgt daher

Lemma 63. $H(t)$ definiert eine glatte Funktion in die symplektische Gruppe $Sp(2N, \mathbb{R})$

$$H : \mathbb{R} \rightarrow Sp(2N, \mathbb{R}) \quad , \quad H(0) = id.$$

Auf dem Raum Gr aller reellen Paare $W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$ von $N \times N$ -Matrizen mit $rang(W) = N$ und $W_1' W_2 = W_2' W_1$ operiert $Gl(N, \mathbb{R})$ von rechts und $Sp(2N, \mathbb{R})$ von links durch Matrixmultiplikation und $G_N = Gr / Gl(N, \mathbb{R}) = Sp(2N, \mathbb{R}) / P$ ist eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit, auf der $Sp(2N, \mathbb{R})$ transitiv operiert. G_N ist eine Kompaktifizierung des Raums der reellen symmetrischen $N \times N$ -Matrizen. Die Operation von $M \in Sp(2N, \mathbb{R})$ auf G_N bezeichnen wir mit $Z \mapsto M < Z >$.

Eine Lösung $F \in \mathcal{L}$ heisst symplektisch, wenn $\begin{pmatrix} F(t) \\ \dot{F}(t) \end{pmatrix}$ in Gr liegt. Dazu genügt es bereits, wenn dies für einen Punkt t_0 gilt wegen

$$\begin{pmatrix} F(t) \\ \dot{F}(t) \end{pmatrix} = H(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Beispiele: $\Phi(t)$ und $\Psi(t)$ sind symplektisch.

Bemerkung: Für eine symplektische Matrix $H(t)$ wie oben ist $H^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\Phi}' & -\Phi' \\ -\dot{\Psi}' & \Psi' \end{pmatrix}$, und auch $H(t)'$ ist symplektisch. Daher ist $H^{-1}(t) < 0 > = -\Psi^{-1}\Phi(t)$ symmetrisch.

Für symplektisches F ist $\Sigma_F(t) = \dot{F}(t)F^{-1}(t) \in G_N$ eine wohldefinierte symmetrische Matrix. Ebenso $Z_F(t) = \Sigma_F^{-1}$. Es gilt

$$\dot{\Sigma}_F + \Sigma_F^2 + S = 0$$

beziehungsweise $\dot{Z}_F = id + Z_F S Z_F$. Es gilt $Z_F(t) = H(t) < Z_0 >$ für $Z_0 = Z_F(0)$. Beispiel: $F = \Phi$ liefert $Z_\Phi = H(t) < 0 >$. Ein Anfangswert $Z_0 = \Sigma_F(t_0) \in G_N$ legt $\Sigma_F(t)$ eindeutig fest, auch über Polstellen hinaus (siehe nächster Abschnitt). Jeder Anfangswert Z_0 führt zu einer Lösung Σ der Differentialgleichung definiert auf ganz \mathbb{R} (Lösungen haben aber Pole!). Da jeder Anfangswert $Z_0 \in G_N$ realisiert wird als Quotient $Z_0 = \alpha\beta^{-1}$, ist jede Lösung von der Gestalt $\Sigma = \Sigma_F$ für ein $F \in \mathcal{L}$.

Pole von Σ

Sei $F \in \mathcal{L}$ eine symplektische Lösung. Dann ist $F(t)'\dot{F}(t)$ eine symmetrische Matrix für alle $t \in \mathbb{R}$.

Betrachte die Taylorentwicklung

$$F(t) = F_0 + (t - t_0)F_1 + \dots$$

in $t_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $r = \text{rang}(F_0)$: Dann gibt es $U, V \in Gl(N, \mathbb{R})$ mit

$$F_0 = U \cdot \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V.$$

$U = k \cdot b$ für eine obere Dreiecksmatrix b und eine orthogonale Matrix k . Also

$$F_0 = k \cdot \begin{pmatrix} \Delta_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot V$$

für eine invertierbare obere Dreiecksmatrix Δ_r . Für $A = k^{-1}F_1V^{-1}$ oder $F_1 = k \cdot A \cdot V$ ist

$$F_0'F_1 = V' \begin{pmatrix} \Delta_r' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} AV$$

symmetrisch. Also ist auch

$$\begin{pmatrix} \Delta'_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \Delta'_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta'_r a & \Delta'_r b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch. Somit verschwindet $\Delta'_r b$. Also $b = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} F_0 + (t - t_0)F_1 &= k \begin{pmatrix} \Delta_r + (t - t_0)a & 0 \\ (t - t_0)c & (t - t_0)d \end{pmatrix} V \\ &= k \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & (t - t_0)E_{N-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_r + (t - t_0)a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} V. \end{aligned}$$

Somit

$$F(t) = k \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & (t - t_0)E_{N-r} \end{pmatrix} G(t)$$

für eine glatte matrixwertige Funktion

$$G(t) = \begin{pmatrix} \Delta_r & 0 \\ c & d \end{pmatrix} V + (t - t_0) \begin{pmatrix} a & 0 \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix} V + O((t - t_0)^2),$$

da die höheren Taylortermine von $F(t)$ durch $(t - t_0)$ geeignet geteilt werden können. Für $v = V^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$ ist $F(t_0)v = 0$ und $\dot{F}(t_0)v = k \begin{pmatrix} 0 \\ dx \end{pmatrix}$ wegen

$$\dot{F}(t_0) = k \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} V + k \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V$$

Da aus $F(t_0)v = \dot{F}(t_0)v = 0$ wegen der Differentialgleichung von $F(t)$ folgt $F(t)v = 0$ und damit $v = \dot{F}(0)v = 0$, zeigt dies $dx \neq 0$ für $x \neq 0$. Somit ist die Matrix d invertierbar. Also ist $G(t_0)$ invertierbar.

Folgerung: $\det(F(t)) \neq 0$ für alle $t \neq t_0$ nahe bei t_0 , sowie $\det(F(t)) = c(t_0) \cdot (t - t_0)^r$ für eine Konstante $c(t_0) \neq 0$.

Somit ist $\Sigma_F(t) = \dot{F}(t)F(t)^{-1}$ gleich (*)

$$k \left[\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & (t - t_0)E_{N-r} \end{pmatrix} \dot{G}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{N-r} \end{pmatrix} G(t) \right] G(t)^{-1} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & (t - t_0)^{-1}E_{N-r} \end{pmatrix} k^{-1},$$

und somit ist $(t - t_0)\Sigma_F(t)$ glatt in einer Umgebung von $t = t_0$. Es gibt daher eine symmetrische Matrix Σ_{-1} mit

$$\Sigma_F(t) = \frac{\Sigma_{-1}}{t - t_0} + \text{glatt} = \frac{\Sigma_{-1}}{t - t_0} + \Sigma_0 + (t - t_0)\Sigma_1 \cdots$$

Aus der Riccati Differentialgleichung folgt dann $\Sigma_1 \Sigma_0 + \Sigma_0 \Sigma_{-1} = 0$ und $\Sigma_1 \Sigma_{-1} + \Sigma_{-1} \Sigma_1 + \Sigma_1 = -\sigma^\vee(t_0)$, sowie $(-\Sigma_{-1} + \Sigma_{-1}^2)(t - t_0)^{-2} + \frac{\text{glatt}}{t - t_0} = 0$. Im Limes $t \rightarrow t_0$ ergibt letzteres

$$\Sigma_{-1}^2 = \Sigma_{-1}.$$

Andererseits gilt wegen (*)

$$k' \Sigma_{-1} k = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{N-r} \end{pmatrix},$$

für die rechte obere Eckmatrix B von $\dot{G}(t_0)G^{-1}(t_0)$. Daraus folgt $B = 0$ sowie $\text{rang}(\Sigma_{-1}) = N - r$, da $k' \Sigma_{-1} k$ symmetrisch ist. Somit gilt

Lemma 64. Sei $g(0) = 1$ und sei $t_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es ein offenes Intervall V um t_0 und eine orthogonale Matrix k und eine symmetrische Matrix S_r , so dass auf dem Intervall V gilt

$$k' \Sigma_F(t) k = \frac{1}{t - t_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{N-r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \text{eine glatte Funktion},$$

welche im Punkt t_0 verschwindet. $N - r$ ist die Nullstellenordnung¹ von $\det(F(t))$ bei $t = t_0$.

Korollar 42. Die Nullstellen von $\det(F(t))$ liegen auf jeder Gerade $\gamma(t) = ut$ isoliert. Die Taylorentwicklung von $\det(g(t))$ (der Fall $F = \Phi$) verschwindet in keinem Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$ identisch. Es gilt für eine glatte Matrixfunktion $G(t)$ mit invertierbarem $G(t_0)$ die Gleichung

$$t^2 g(t) = G(t)' \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & (t - t_0)^2 E_{N-r} \end{pmatrix} G(t).$$

Bemerkung: Im Punkt $t = t_0$ ist $r = 0$. Für $t_0 \neq 0$ ist $r \geq 1$.

Für die Matrix $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ gilt

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 2\beta & 3\gamma \end{pmatrix} = -\sigma^\vee(t_0).$$

¹Dies ist die Dimension $\dim \mathcal{J}_\gamma(0, t_0)$ im Fall $F = \Phi$.

Somit ist Σ_1 vollkommen durch $\sigma^\vee(t_0)$ bestimmt.

Ist $S(t)$ echt positiv, dann gilt $\alpha > 0$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & (t - t_0) \end{pmatrix} \Sigma_F(t) = \begin{pmatrix} \alpha^{-1}S + (t - t_0) & \alpha^{-1}\beta(t - t_0) \\ 0 & E_{N-r} \end{pmatrix} + O((t - t_0)^2).$$

Wegen $x'S_0y = x'\alpha(\alpha^{-1}S_0)y$ ist $f = \alpha^{-1}S$ selbstadjungiert bezüglich der definiten Paarung $x'\alpha y$. Also $\mathbb{R}^r = \text{Kern}(f) \oplus \text{Bild}(f)$ im Sinne einer orthogonalen Zerlegung bezüglich der durch α definierten definiten Form. Bezüglich geeigneter Koordinaten (Konjugation mit einer invertierbaren Matrix $T = \text{diag}(T_r, E_{N-r})$), ist

$$T \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & t - t_0 \end{pmatrix} F(t) T^{-1} = \begin{pmatrix} (t - t_0)E_{r-s} & 0 \\ 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & E_{N-r} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} E & * & * \\ 0 & \tilde{S} & * \\ 0 & 0 & E_{N-r} \end{pmatrix} + O((t - t_0)) \right)$$

mit invertierbarem \tilde{S} . Also hat $\det(F(t)) = (t - t_0)^{2r-s-N} h(t_0)$ eine isolierte Nullstelle bei t_0 – mit $h(t_0) \neq 0$.

Abschätzungen für Σ

Seien $s(t)$ und $S(t)$ glatte symmetrische Matrixfunktionen. Seien $\Sigma_i(t)$ glatte symmetrische Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{\Sigma}_i(t) + \Sigma_i(t)s(t)\Sigma_i(t) + S_i(t) = 0$$

auf einem Intervall $I = [a, b]$.

Lemma 65. *Sind $S_i(t)$ glatt und symmetrisch mit $-S_1 < -S_2$ auf I , dann folgt aus $\Sigma_1(a) < \Sigma_2(a)$ die Ungleichung $\Sigma_1(t) < \Sigma_2(t)$ für alle $t \in I$.*

Beweis: Es gilt $\dot{\Sigma}_1 + \Sigma_1 s(t) \Sigma_1 < -S_2$. Für $F = (\Sigma - \Sigma_2)$ und $w \in \mathbb{R}^N$ daher (*)

$$w' \dot{F}(t) w + (\Sigma w)' s(t) (\Sigma w) - (\Sigma_2 w)' s(t) (\Sigma_2 w) < 0.$$

Zu zeigen $F < 0$ auf I . Wäre dies falsch, gäbe es ein $t_0 > a$ und ein $\mathbb{R}^N \ni w \neq 0$ mit

$$F(t_0)w = 0$$

so dass gilt $F(t) < 0$ für alle $a \leq t < t_0$. Aus $F(t_0) = 0$ folgt $\Sigma(t_0)w = \Sigma_c(t_0)w$ und damit wegen (*)

$$w' \dot{F}(t_0)w < 0.$$

Dies steht im Widerspruch zu $w'F(t)w < 0$ für $t < t_0$. Denn $w' \dot{F}(t_0)w = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w'F(t_0)w - w'F(t)w}{t_0 - t} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{-w'F(t)w}{t_0 - t} \geq 0$ (linksseitiger Limes!). Also

$$w' \dot{F}(t_0)w < 0.$$

Damit ist die Abschätzung bewiesen.

Bemerkung: Zum Beweis einer analogen unteren Abschätzung genügt es $\Sigma(t)$ durch $-\Sigma(-t)$ und $S(t), s(t)$ durch $-S(-t), -s(-t)$ zu ersetzen.

Bemerkung: Für Abschätzungen benutzt man meist einen Vergleich mit einer konstanten Funktion $S(t) = c(t) \cdot E$. Für solche $S(t)$ operiert die orthogonale Gruppe K auf dem Raum der Lösungen der Differentialgleichungen $\dot{\Sigma} + \Sigma^2 + c(t)E = 0$ mittels $\Sigma \mapsto k'\Sigma k$. Will man obiges Lemma anwenden, möchte man den Anfangswert $Z_0 \in G_N$ aber beliebig vorgeben. Durch eine orthogonale Drehung kann man obdA Z_0 obdA als Diagonalmatrix schreiben

Lemma 66. (Hauptachsentransformation) Die orthogonale Gruppe K operiert auf G_N durch die Einbettung $K \subseteq Sp(2N, \mathbb{R})$, welche k auf $\text{diag}(k, k)$ abbildet. Die Orbits der Gruppe K auf G_N werden eindeutig durch die Zahlentupel $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_N$ beschrieben mit $\lambda_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (verallgemeinerte Eigenwerte).

Bemerkung: Ist $S(t) \geq c > 0$ positiv definit, dann sind die Eigenwerte $\lambda_i(t)$ einer Lösung $\Sigma(t) \in G_N$ Funktion in t die monoton fallend für alle Zeiten t . Achtung: Dies ist so zu verstehen, dass bei einer Polstelle $\lambda_i(t_0) = -\infty$ der Eigenwert sich so fortentwickelt, dass rechts von der Polstelle $\lambda_i(t_0) = -\infty$ durch $\lambda_i(t_0) = +\infty$ ersetzt werden muss.

Bemerkung: Die obigen Abschätzung liefern für positive Krümmung Abschätzungen für jeden einzelnen Eigenwertverlauf!

Bemerkung: Ist $\Sigma(t)$ eine Lösung von $\dot{\Sigma}(t) + \Sigma(t)s(t)\Sigma(t) + S(t) = 0$, dann ist $\Sigma_1(t) = \lambda \cdot \Sigma(\lambda \cdot t)$ für $\lambda \in \mathbb{R}^*$ Lösung von $\dot{\Sigma}_1(t) + \Sigma_1(t)s(\lambda \cdot t)\Sigma_1(t) + \lambda^2 S(\lambda \cdot t) = 0$.

Gilt etwa

$$0 < 1/n^2 < S_i(t) \leq 1$$

für $n \geq 1$, so folgt $-n^2 S_1(nt) < -1 < -S_2(t)$ und damit

$$n\Sigma_1(nt) < \Sigma_2(t)$$

für alle nt links von der ersten singulären Stelle. Hierbei sei der Anfangswert $\Sigma_i(0) = \infty$, d.h. $\Sigma_i(t) = \frac{1}{t} - \frac{S_i(0)}{3}t + 0(t^2)$. Beachte $n\Sigma_1(nt) = \frac{1}{t} - \frac{S_1(0)}{3}n^2t + 0(t^2)$ ist kleiner als $\Sigma_2(t) = \frac{1}{t} - \frac{S_2(0)}{3}t + 0(t^2)$ für alle kleinen $t > 0$.

Geschlossene Geodäten

Beachte $\sigma^\vee(t) = \theta_{\gamma_M(t)}^{-1} \sigma_{\dot{\gamma}_M(t)} \theta_{\gamma_M(t)}$ für eine Geodäte γ_M in M . Ist $\gamma_M(t + t_0) = \gamma_M(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann gilt $\theta_{\gamma_M(t+t_0)} = \theta_{\gamma_M(t)} \theta_0$ für die orthogonale Matrix $\theta_0 = \theta_{\gamma_M(t_0)}$ (orthogonal für g_{st}). Also $\sigma^\vee(t + t_0) = \theta_{\gamma_M(t+t_0)}^{-1} \sigma_{\dot{\gamma}_M(t+t_0)} \theta_{\gamma_M(t+t_0)} = \theta_0^{-1} \theta_{\gamma_M(t)}^{-1} \sigma_{\dot{\gamma}_M(t)} \theta_{\gamma_M(t)} \theta_0 = \theta_0^{-1} \sigma^\vee(t) \theta_0$

$$\boxed{\sigma^\vee(t + t_0) = \theta_0^{-1} \sigma^\vee(t) \theta_0 \quad , \quad \theta_0 \in K}$$

Da θ_0 durch einen Paralleltransport definiert ist, liegt θ_0 in der Zusammenhangskomponente der 1 von K , d.h. im definiten Fall

$$\theta_0 \in SO(g_{st}) ,$$

wenn die geschlossene Geodäte nullhomotop ist (zusammenziehbar).

Für $F \in \mathcal{L}$ ist $\theta_0 F(t + t_0) \theta_0^{-1} \in \mathcal{L}$. Ist F symplektisch, dann auch $\theta_0 F(t + t_0) \theta_0^{-1}$. Es folgt $diag(\theta_0, \theta_0) \cdot H(t + t_0) = H(t) \cdot M_0$ für eine Matrix M_0 . da die drei anderen Matrizen in der symplektischen Gruppe $Sp(2N)$ liegen folgt

Lemma 67. Für eine geschlossene Geodäte wie oben existiert $\theta_0 \in O(g_{st})$ und $M_0 \in Sp(2N, \mathbb{R})$ mit

$$diag(\theta_0, \theta_0) \cdot H(t + t_0) = H(t) \cdot M_0 .$$

Also

$$\theta_0 Z_F(t + t_0) \theta_0' = H(t) \langle Z_0 \rangle$$

für $Z_0 = M_0 \langle Z_F(0) \rangle$, wobei $Z_F(t) = H(t) \langle 0 \rangle$.

Bemerkung: Ist θ_0 , dann folgt $H(t + t_0) = H(t) H(t_0)$.

13.3 Appendix 3 (Formeln auf Geodäten)

Annahme: In diesem Abschnitt sei $g : U \rightarrow S^2(\mathbb{R}^N)$ eine glatte Funktion auf einer offenen Teilmenge U von \mathbb{R}^N (Pseudometrik) mit der Eigenschaft

$$\sum_j x^j g_{ij}(x) = \sum_j x^j g_{ij}(0) .$$

Weiterhin sei die Gerade $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$ für $0 \leq t \leq T$ in U enthalten.

Lemma 68. *Unter diesen Annahmen² gilt für $0 \leq t \leq T$*

1. $g_{1j}(\gamma(t)) = g_{1j}(0)$ sowie $\dot{g}_{1j}(\gamma(t)) = 0$.
2. $t(\partial_\alpha g_{1i})(\gamma(t)) = g_{\alpha i}(0) - g_{\alpha i}(\gamma(t))$, insbesondere symmetrisch in α und i .
3. $g_{kl}\Gamma_{1j}^l(\gamma(t)) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{kj}(\gamma(t))$
4. $\Gamma_{11}^k(\gamma(t)) = 0$
5. $(\partial_\alpha \Gamma_{11}^k)(\gamma(t)) = -2t^{-1}\Gamma_{1\alpha}^k(\gamma(t))$
6. $(\partial_\beta g_{\alpha i})(\gamma(t)) + (\partial_\alpha g_{\beta i})(\gamma(t)) = -t \cdot (\partial_\alpha \partial_\beta g_{1i})(\gamma(t))$.
7. $g_{kl}(\partial_\alpha \Gamma_{11}^l)(\gamma(t)) = -t^{-1} \frac{d}{dt}(g_{k\alpha}(\gamma(t)))$
8. $\partial_\beta g_{11}(\gamma(t)) = 0$.
9. $\partial_\alpha \partial_\beta g_{11}(\gamma(t)) = t^{-2}[g_{\alpha\beta}(\gamma(t)) - g_{\alpha\beta}(0)]$

Beweis: Schritt 1. Aus der Basisformel $\sum_j x^j g_{ji}(x) = x_i = \sum_j x^j g_{ji}(0)$ folgt durch Spezialisieren $tg_{1i}(\gamma(t)) = tg_{1i}(0)$. Also ist $g_{1i}(\gamma(t)) = g_{1i}(0)$ konstant auf der Geodäte.

Schritt 2. Ableiten der Basisformel nach ∂_α liefert $g_{\alpha i}(x) + \sum_j x^j \partial_\alpha g_{ji}(x) = g_{\alpha i}(0)$. Spezialisieren liefert

$$t(\partial_\alpha g)_{1i}(\gamma(t)) = g_{\alpha i}(0) - g_{\alpha i}(\gamma(t)) .$$

²Formeln mit Christoffelsymbolen setzen zusätzlich voraus $\det g(\gamma(t)) \neq 0$

Insbesondere gilt Symmetrie in i und α

$$(\partial_\alpha g)_{1i}(\gamma(t)) = (\partial_i g)_{1\alpha}(\gamma(t)) .$$

Setzt man $\alpha = 1$ folgt $t\dot{g}_{1i} = t\partial_1 g_{1i} = g_{1i}(0) - g_{1i}(t)$, und dies ist konstant Null nach Schritt 1.

Schritt 3. Es gilt $g_{kl}\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}[\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}]$. Aus der Symmetrieeigenschaft von Schritt 2 folgt für $i = 1$ durch Spezialisieren

$$g_{kl}\Gamma_{1j}^l(\gamma(t)) = \frac{1}{2}(\partial_1 g_{kj})(\gamma(t)) .$$

Schritt 4. Es folgt $g_{kl}\Gamma_{11}^l(\gamma(t)) = 0$ wegen Schritt 1, also auch $\Gamma_{11}^k(\gamma(t)) = 0$.

Schritt 5. Nochmaliges Ableiten der Formel $g_{\alpha i}(x) + \sum_j x^j \partial_\alpha g_{ji}(x) = g_{\alpha i}(0)$ aus Schritt 2 liefert $\partial_\beta g_{\alpha i}(x) + \sum_j x^j \partial_\beta \partial_\alpha g_{ji}(x) + \partial_\alpha g_{\beta i}(x) = 0$. Spezialisieren liefert

$$\partial_\beta g_{\alpha i}(\gamma(t)) + \partial_\alpha g_{\beta i}(\gamma(t)) = -t \cdot \partial_\alpha \partial_\beta g_{1i}(\gamma(t)) .$$

Allgemeiner gilt für $(\partial^r g) \in S^r \otimes S^2$

$$\boxed{(r+1)Sym_{1,\dots,r+1}(\partial^r g)_{*,\alpha i}(\gamma(t)) = -t(\partial^{r+1} g)_{*\alpha, i1}(\gamma(t))} .$$

Schritt 6. Leitet man $\sum_{i,j} x^i x^j \Gamma_{ij}^k(x) = 0$ nach ∂_α ab, erhält man nach Spezialisieren

$$t^2(\partial_\alpha \Gamma_{11})(\gamma(t)) + 2t\Gamma_{\alpha 1}(\gamma(t)) = 0 .$$

Schritt 7. Es gilt $g_{kl}(\partial_\alpha \Gamma_{11}^l)(\gamma(t)) = -2t^{-1}g_{kl}\Gamma_{1\alpha}^l(\gamma(t))$ nach Formel 5). Dies ist gleich $-t^{-1}\partial_1 g_{k\alpha}(\gamma(t)) = -t^{-1}\frac{d}{dt}g_{k\alpha}(\gamma(t))$ nach Formel 3).

Schritt 8. Wir spezialisieren nun die Identität 6. und wählen $\alpha = i = 1$. Man erhält

$$\partial_\beta g_{11}(\gamma(t)) + \partial_1 g_{\beta 1}(\gamma(t)) = -t \cdot (\partial_\beta \partial_1 g_{11})(\gamma(t)) .$$

Aber die Ableitung ∂_1 in Richtung von $\gamma(t)$, vertauscht mit der Spezialisierung: $(\partial_1 g_{ij})(\gamma(t)) = \partial_1(g_{ij}(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}(g_{ij}(\gamma(t)))$. Nach Formel 1. ist $g_{1j}(\gamma(t))$ aber konstant. Somit folgt

$$\partial_\beta g_{11}(\gamma(t)) = -t \cdot (\partial_\beta \partial_1 g_{11})(\gamma(t))$$

oder mit demselben Argument wie oben

$$-t \cdot \frac{d}{dt}(\partial_\beta g_{11}(\gamma(t))) = \partial_\beta g_{11}(\gamma(t)).$$

Die Lösung dieser Gleichung ist $const \cdot t^{-1}$, somit $\partial_\beta g_{11}(\gamma(t)) = 0$.

Bemerkung: Die Lösungen der Differentialgleichung $-t \cdot \dot{f} = f + K(t)$ in einer Umgebung $(0, \varepsilon)$ von Null und glattes $K(t)$ sind durch $f(t) = -t^{-1}[c + \int_0^t (K(s))ds]$ gegeben. Die einzige auf Null glatt fortsetzbare Lösung ist $f(t) = -t^{-1}[\int_0^t (K(s) - K(0))ds]$.

Schritt 9. Setze $f = \partial_\alpha \partial_\beta g_{11}$ mit

$$K(t) = \partial_\alpha \partial_1 g_{\beta 1} + \partial_\beta \partial_1 g_{\alpha 1} = \frac{d}{dt} \left(-t^{-1} [g_{\alpha\beta}(\gamma(t)) - g_{\alpha\beta}(0)] \right).$$

Es gilt $K(0) = 0$ in diesem Fall! Daraus folgt dann aber

$$\partial_\alpha \partial_\beta g_{11}(\gamma(t)) = t^{-2} [g_{\alpha\beta}(\gamma(t)) - g_{\alpha\beta}(0)]$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Korollar 43. Ist $g(t)$ invertierbar, gilt in der Situation des letzten Lemmas

- $\Gamma_{1j}^l(\gamma(t)) = \frac{1}{2}(g^{-1}\dot{g})_{lj}(\gamma(t))$.
- $\partial_\alpha \Gamma_{11}^l(\gamma(t)) = -t^{-1}(g^{-1}\dot{g})_{l\alpha}(\gamma(t))$

Beweis: Folgt aus Teil 3 und 7 des Lemmas.

Bemerkung: Sei $g_{1j}(0) = \delta_{1j}$. Dann haben die Matrizen g und \dot{g} auf γ die Gestalt

$$g(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

sowie

$$\dot{g}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Im allgemeinen ist \dot{g} nicht identisch Null auf der Kurve γ !

Aus den Krümmungstermen

$$\partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{ik}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m$$

bilden wir die Matrix σ

$$\sigma = (\sigma_{li}) \quad , \quad \sigma_{li} = \partial_i \Gamma_{11}^l - \partial_1 \Gamma_{i1}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{11}^m - \Gamma_{1m}^l \Gamma_{i1}^m .$$

Es gilt

$$g(\sigma\xi, \xi) = R_{1\alpha 1\beta} \cdot \xi^\alpha \xi^\beta \quad \text{sowie} \quad Tr(\sigma) = Ric_{11} .$$

Einschränken auf die Geodäte: Schränkt man auf die Geodäte $\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0)$ ein, vereinfacht sich der Ausdruck wegen $\Gamma_{11}^m = 0$, $\Gamma_{1j}^l = \frac{1}{2}(g^{-1}\dot{g})_{lj}$ und $\partial_i \Gamma_{11}^l = -t^{-1}(g^{-1}\dot{g})_{lj}$ (Lemma 68.4) und ergibt

$$\sigma(\gamma(t)) = -\frac{1}{t}g^{-1}\dot{g} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g^{-1}\dot{g}) - \frac{1}{4}g^{-1}\dot{g}g^{-1}\dot{g}$$

Führt man wie im Paragraph 8.3 – die nicht notwendig symmetrische – Matrix N ein durch die Bedingungen

$$N^{-1}\dot{N} = \frac{1}{2}g^{-1}\dot{g} \quad , \quad N(0) = E ,$$

dann folgt $\sigma = -\frac{2}{t}N^{-1}\dot{N} - \frac{d}{dt}(N^{-1}\dot{N}) - N^{-1}\dot{N}N^{-1}\dot{N}$, also die lineare Differentialgleichung $\ddot{N} + \frac{2}{t}\dot{N} + N\sigma = 0$. Dies gibt einen alternativen Beweis von Korollar 28, welcher Jacobifelder nicht benutzt.

13.4 Appendix 4 (Dictionary)

Bezeichnungen: Seien $\xi = \xi(t)$ resp. $\eta = \eta(t)$ Vektorfelder entlang einer Geodäte $\gamma(t) = ut$ und obdA $u = (1, 0, \dots, 0)$ in Normalkoordinaten. Wir benutzen dann die Bezeichnungen

$$\xi = M\eta \quad , \quad \eta = N\xi .$$

Dann gilt $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{st}$ für $\xi_i = M\eta_i$ sowie

- $\langle \sigma\xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \sigma^\vee\eta_1, \eta_2 \rangle_{st}$
- $\nabla_T\xi = M\dot{\eta}$, und somit $\xi(t)$ parallel $\iff \eta(t)$ konstant
- ξ Jacobifeld mit $\xi(0) = 0$, d.h. $\xi(t) = v \cdot t$ für $v \in \mathbb{R}^N$, $\iff \ddot{\eta} + \sigma^\vee\eta = 0$ mit $\eta(0) = 0$.
- $\frac{1}{2}\xi'_1\dot{g}\xi_2 = \eta'_1g(0)\dot{N}N^{-1}\eta'_2 = \langle \eta_1, \dot{N}N^{-1}\eta_2 \rangle_{st}$ oder $\dot{N}'g(0)N = N'g(0)\dot{N}$.

Beweis: Die erste Aussage gilt in jedem Koordinatensystem wegen $\dot{\xi} = \frac{d}{dt}(M\eta) = \dot{M}\eta + M\dot{\eta} = -\Gamma_T M\eta + M\dot{\eta}$. Also $M\dot{\eta} = \dot{\xi} + \Gamma_T\xi$ (lemma 51). Die zweite: ξ Jacobi $\iff \xi = v \cdot t$ für $v \in \mathbb{R}^N \iff \eta = N(t)tv = \Phi(t) \cdot v$, d.h. $\ddot{\eta} + \sigma^\vee\eta = 0$. Die Umkehrung gilt auch. Die dritte folgt aus Lemma 52.

Für $M := N^{-1}$, $\xi = M\eta$ gilt

$$I_\gamma(M\eta, M\eta) = \int_a^b \left(\langle \dot{\eta}, \dot{\eta} \rangle_{st} - \langle \sigma^\vee\eta, \eta \rangle_{st} \right) dt .$$

Bemerkung: $g(\sigma\xi, \xi) = \kappa(\dot{\gamma} \wedge \xi)g(\xi, \xi)$ falls $\xi^1 = 0$. Ausserdem $\langle \sigma^\vee\eta, \eta \rangle_{st} = g(\sigma\xi, \xi)$ und $\langle \eta, \eta \rangle_{st} = g(\xi, \xi)$.

Beweis: $\langle \sigma^\vee\eta, \eta \rangle_{st} = (N\sigma\xi)'g(0)\eta = \xi'\sigma'gN^{-1}\eta = \xi'g\sigma\xi = g(\sigma\xi, \xi)$ etc. Beachte $\xi^1 = 0 \iff \eta^1 = 0$ wegen $N\xi = \eta$ und da in der vorliegenden Situation N eine Blockdreiecksmatrix ist (siehe §13), gilt $\dot{\xi}_1 = \dot{\eta}_1$.

Ausserdem $\langle T, \nabla_T S \rangle = 2g_{1k}\dot{\xi}^k$ wegen $\dot{\gamma} = (1, 0, \dots, 0)$ und wegen $\partial_k g_{11}\xi^k = 0$ (Lemma 68.8). Benutzt man noch $g_{1k}(\gamma(t)) = \delta_{1k}$ (Lemma 68.1) so unterscheiden sich die 2.Variationen von Länge und Energie um $-\int_a^b (\dot{\xi}^1)^2 dt$.

Theorem 8. Für $\|\dot{\gamma}\| = 1$ und $\xi^1 = 0$ (oder äquivalent $\eta^1 = 0$) gilt

$$I_{\gamma}(M\eta, M\eta) = \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{E}(M\eta) \Big|_{s=0} = \int_a^b \left(\|\dot{\eta}\|_{st} - \kappa(\dot{\gamma} \wedge M\eta)_{\gamma(t)} \cdot \|\eta\|_{st} \right) dt .$$

Korollar 44. Für $\|\dot{\gamma}\| = 1$ und $\xi^1 = 0$ ist der Index gleich

$$I_{\gamma}(M\eta, M\eta) = \langle \eta, \dot{\eta} \rangle_{st} \Big|_a^b - \int_a^b \langle \ddot{\eta} + \kappa(\dot{\gamma} \wedge M\eta)_{\gamma(t)} \cdot \eta, \eta \rangle_{st} dt .$$

Lemma 69. Für ein nirgends verschwindendes Jacobifeld ξ entlang $\gamma : [0, b] \rightarrow M$ mit $\xi(0) = 0$ gilt

$$\frac{I_{\gamma}(\xi, \xi)}{\|\xi\|^2} = \frac{\langle \xi, \nabla_T \xi \rangle}{\|\xi\|^2} = d \log \|\xi\| .$$

Literaturverzeichnis

- [1] Chavel I., Eigenvalues in Riemannian Geometry.
- [2] Cheeger J., Ebin D., Comparison Theorems in Riemannian Geometry
- [3] Hawking S., Ellis G., The large scale structure of space-time
- [4] Helgason S., Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric spaces
- [5] Humphreys J.E, Introduction to Lie algebras and Representation theory
- [6] Petersen P., Riemannian Geometry
- [7] Milnor J., Morse Theory
- [8] Riemann, Gesammelte Werke
- [9] Spivak, A comprehensive Introduction to Differential Geometry
- [10] van der Waerden, Algebra II
- [11] Weyl H., in Riemanns Gesammelten Werken
- [12] Weyl H., Classical Groups