UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 28. Mai 2024

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 7

DEADLINE: Do. 6. Juni 2024, 15:00.

1. Bestimmen Sie die Schnittform $\langle a, b\rangle = \langle a \cup b, [M]\rangle$ und die Signatur der Mannigfaltigkeiten $M = S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$. (Hier bezeichnet $\#$ die zusammenhängende Summe von orientierten topologischen Mannigfaltigkeiten. Man erhält $M \# N$, indem man einen kleinen offenen Ball jeweils aus M und N entfernt und dann die so erhaltenen Räume entlang ihrer Randsphären durch einen orientierungsumkehrenden Homöomorphismus miteinander verklebt. Dann ist $M \# N$ bis auf Homöomorphismus wohldefiniert und wieder kanonisch orientiert.)
2. Zeigen Sie, dass sich die Signatur multiplikativ für Produktmannigfaltigkeiten verhält: Für zwei geschlossene, orientierte Mannigfaltigkeiten M und N gilt $\sigma(M \times N) = \sigma(M)\sigma(N)$. (Hierbei wird das Produkt natürlich mit der Produktorientierung ausgestattet, d.h. die Fundamentalklasse von $M \times N$ ist das Kreuzprodukt der Fundamentalklassen von M und N.)
3. Beweisen oder widerlegen Sie: $\mathbb{C}P^2$ besitzt einen Homöomorphismus auf sich selbst, der die Orientierung umkehrt.
4. Man kann zeigen, dass die Schnittform $H^2(K3; \mathbb{Z}) \otimes H^2(K3; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, $a \otimes b \mapsto \langle a \cup b, [K3]\rangle$, der *Kummer-Fläche*
$$K3 = \{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{C}P^3 : z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\}$$
(eine einfach-zusammenhängende geschlossene orientierte 4-Mannigfaltigkeit) durch die Matrix
$$(-E_8) \oplus (-E_8) \oplus H \oplus H \oplus H$$
dargestellt werden kann, wobei
$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
(Dies muss im Rahmen der Aufgabe nicht bewiesen werden.) Berechnen Sie aus dieser Information die Signatur der Kummer-Fläche!