UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 23. Mai 2024

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 6

DEADLINE: Do. 30. Mai 2024, 15:00.

Seien M^n, N^n geschlossene, orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit Fundamentalklassen $[M] \in H_n(M) \cong \mathbb{Z}$, $[N] \in H_n(N) \cong \mathbb{Z}$. Eine stetige Abbildung $f : M \to N$ besitzt einen Abbildungsgrad $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, der definiert ist als jene eindeutig bestimmte ganze Zahl $\deg(f) = k$, für die $f_*[M] = k[N] \in H_n(N)$ ist. (Man beachte, dass $[N]$ ein Erzeuger von $H_n(N)$ ist.)

1. Zeigen Sie, dass sich der Abbildungsgrad multiplikativ unter Komposition zweier Abbildungen verhält, sowie dass für homotope Abbildungen $f \simeq g$ die Gleichheit $\deg(f) = \deg(g)$ besteht. Was können Sie über den Abbildungsgrad einer Homotopieäquivalenz sagen? Was ist der Abbildungsgrad einer konstanten Abbildung, wenn n positiv ist?
2. Beweisen Sie: jede geschlossene, orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit M^n besitzt eine Abbildung
$$f : M \longrightarrow S^n$$
mit $\deg(f) = 1$.
(Anwendung: Ist $M = \Sigma^n$ eine einfach zusammenhängende Homologiesphäre, dann folgt aus $\deg f = 1$, dass f_* ein H_*-Isomorphismus ist. Ein Satz von Whitehead impliziert dann, dass f eine Homotopieäquivalenz ist.)
3. Gegeben seien zwei geschlossene, orientierte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M^n und N^n, sowie eine Abbildung $f : M^n \to N^n$ mit $\deg(f) = 1$. Zeigen Sie, dass
$$f_* : H_i(M) \longrightarrow H_i(N)$$
surjektiv ist für alle i, indem Sie eine "Umkehrabbildung" $\phi : H_i(N) \to H_i(M)$ mit $f_* \circ \phi = \mathrm{id}$ konstruieren.
4. Beweisen Sie für M, N, f wie in Aufgabe 3, dass
$$f_* : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N)$$
surjektiv ist.
Hinweis: Versuchen Sie nicht, dies aus der Surjektivität von $f_* : H_1(M) \to H_1(N)$ zu folgern! Verwenden Sie die Theorie der Überlagerungen. Betrachten Sie jene Überlagerung $\hat{N}$ von N, die durch das Bild von f_* gegeben ist. Unterscheiden Sie dann zwei Fälle: $\hat{N}$ kompakt / nicht kompakt.