



ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE II ÜBUNGSAUFGABEN 5

DEADLINE: Do. 23. Mai 2024, 15:00.

- Berechnen Sie das Cap-Produkt $\cap : H^1(S^1) \otimes H_1(S^1) \rightarrow H_0(S^1)$.
- Sei $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ der n -dimensionale Torus und sei $s \in H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ein Erzeuger.
 - Zeigen Sie, dass $H_n(T^n) = \mathbb{Z}$ ist und das n -fache Kreuzprodukt $t = s \times \cdots \times s$ ein Erzeuger dieser Gruppe ist.
 - Berechnen Sie die Kohomologie $H^*(T^n)$ des n -Torus, indem Sie mit $n = 1$ beginnen und dann Kreuzprodukte von Basiselementen bilden.
 - Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 1 alle Cap-Produkte $\alpha \cap t \in H_{n-i}(T^n)$ für $\alpha \in H^i(T^n)$.
 - Zeigen Sie mit Hilfe der oben erhaltenen expliziten Ergebnisse (ohne den Poincaréschen Dualitätssatz zu benutzen), dass die Abbildung $-\cap t : H^i(T^n) \rightarrow H_{n-i}(T^n)$ ein Isomorphismus ist.
- Zeigen Sie: Sind $(M, \partial M)$ und $(N, \partial N)$ Mannigfaltigkeiten mit Rand, dann ist auch der Raum $M \times N$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand. Beschreiben Sie den Rand $\partial(M \times N)$.