UNIVERSITÄT HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 6. Mai 2024

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 4

DEADLINE: Do. 16. Mai 2024, 15:00.

1. Für positive ganze Zahlen n, m betrachte man die Räume $X = S^m \times S^n$ und $Y = S^m \vee S^n \vee S^{m+n}$. Beweisen Sie, dass $H_p(X;G) \cong H_p(Y;G)$ und $H^p(X;G) \cong H^p(Y;G)$ für alle p und beliebige abelsche Gruppe G. Zeigen Sie dann mit Hilfe des Cup Produktes, dass X und Y *nicht* homotopieäquivalent sind.

2. Die *Hopf Invariante*: Gegeben sei eine stetige Abbildung

$$f : S^{2n-1} \longrightarrow S^n, \ n \geq 2.$$

(Beispiel: $n = 2$, $f : S^3 \to S^2$ die Hopf Abbildung.) Man wähle einen Erzeuger $\xi \in H^{2n-1}(S^{2n-1}) \cong \mathbb{Z}$ und einen Erzeuger $\eta \in H^n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, sowie einen Kozykel $y \in C^n(S^n)$, der η repräsentiert, $\eta = [y]$. Es bezeichne $f^\# : C^*(S^n) \to C^*(S^{2n-1})$ die induzierte Abbildung auf Koketten und $\cup$ das Cup Produkt auf Kokettenniveau.

   (a) Zeigen Sie: Es existiert ein $u \in C^{2n-1}(S^n)$ mit $\delta u = y \cup y$. (δ ist der Korand.)

   (b) Zeigen Sie: Es existiert ein $x \in C^{n-1}(S^{2n-1})$ mit $\delta x = f^\#(y)$.

   (c) Zeigen Sie: Das Element

   $$z = x \cup f^\#(y) - f^\#(u) \in C^{2n-1}(S^{2n-1})$$

   ist ein Kozykel.

Folglich gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl γ, sodass $[z] = \gamma\xi \in H^{2n-1}(S^{2n-1})$. Diese Zahl γ ist die *Hopf Invariante* der Abbildung f. Sie hängt nicht von den getroffenen Wahlen ab, und ist sogar eine Homotopieinvariante (was hier aber nicht zu zeigen ist).