UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
Zukunft. Seit 1386.

Prof. Dr. Markus Banagl
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 205
69120 Heidelberg
Telefon (06221) 54-14211
E-Mail banagl@mathi.uni-heidelberg.de
Heidelberg, den 27. Juni 2024

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE II
ÜBUNGSAUFGABEN 11

DEADLINE: Do. 4. Juli 2024, 15:00.

Für eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ bezeichne C_f den Abbildungskegel und $Sf : SX \to SY$ die suspendierte Abbildung.

1. Einer stetigen Abbildung $f : A \to X$ wurde in der Vorlesung die Sequenz
$$A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{i} C_f \xrightarrow{j} C_i \xrightarrow{k} C_j$$
zugeordnet. (Die Abbildungen i, j, k sind die offensichtlichen Inklusionen.) Zeigen Sie, dass das Diagramm
$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\simeq"'] & C_j \arrow[d, "\simeq"] \\ SA \arrow[r, "Sf"] & SX \end{tikzcd}$$
bis auf Homotopie kommutiert, wobei die vertikalen Pfeile Quotientenabbildungen sind.
2. Beweisen Sie direkt (d.h. ohne die Benutzung von Schleifenräumen): Induziert eine Sequenz stetiger Abbildungen $A \to B \to C$ exakte Sequenzen
$$[C, Y] \longrightarrow [B, Y] \longrightarrow [A, Y]$$
für alle Räume Y, dann induziert auch die suspendierte Sequenz $SA \to SB \to SC$ exakte Sequenzen
$$[SC, Y] \longrightarrow [SB, Y] \longrightarrow [SA, Y]$$
für alle Y.
3. Zeigen Sie, dass für jede Folge $\{G_n\}_{n=1,2,\ldots}$ von Gruppen G_n, mit G_n abelsch für $n \geq 2$, ein topologischer Raum X existiert mit $\pi_n(X) \cong G_n$.
Hinweis: Bauen Sie X aus Eilenberg-MacLane Räumen.
4. Für jeden CW-Komplex X ist $\xi^2 = 0 \in H^2(X; \mathbb{Z})$ für alle $\xi \in H^1(X; \mathbb{Z})$.
Hinweis: Stellen Sie sich $H^1(X; \mathbb{Z})$ als Homotopieklassen von Abbildungen in $K(\mathbb{Z}, 1)$ vor.