Mathematisches Institut der Uni Heidelberg Dr. U. Weselmann

Übungen "Geometrie von Modulkurven" SS 2008

Blatt 13 Abgabe bis Donnerstag 10.07.2008 11:15

Aufgabe 36) Sei k ein Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$. Man bestimme für die elliptische Kurve (E, P_0) mit

$$E \;=\; Proj(k[X,Y,Z]/(X^3+Y^3+Z^3)), \qquad P_0 = (1:-1:0)$$

eine Basis von $H^0(E, \mathcal{O}_E(-3P_0))$ und eine isomorphe Weierstraß-Kurve $(\tilde{E}, \tilde{P}_0)$ der Form $\tilde{E} = Proj(k[X,Y,Z]/(Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3))$.

(3 Punkte)

Aufgabe 37) Sei $E = Proj(k[X,Y,Z]/(Y^2Z - X^3 - aXZ^2 - bZ^3))$ eine elliptische Kurve in Weierstraß-Form. Mit $\omega = dx/y \in H^0(E, \Omega_{E/k})$ zeige man

$$\mu^*\omega = p_1^*\omega + p_2^*\omega$$

wobei $\mu, p_1, p_2 : E \times_k E \to E$ die Multiplikationsabbildung bzw. die Projektionen seien.

(3 Punkte)

Aufgabe 38) Sei k ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $b \in k$. Sei $X = Proj(R/(f_1, f_2))$ mit $R = k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ und

$$f_1 = b^3X_0^2 - bX_2^2 + X_1X_3 \in R, \qquad f_2 = X_3^2 - b^2X_1^2 + bX_0X_2 \in R.$$

(a) Zeige, dass X genau dann regulär ist, wenn $b \cdot ((2b)^4 - 1) \neq 0$ gilt.

(b) Im Falle, dass X regulär ist, bestimme man ein nicht triviales Element $\omega \in H^0(X, \Omega_{X/k})$.

(4 Punkte)