Mathematisches Institut der Universität Heidelberg
Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann
http://www.mathi.uni-heidelberg.de/∼weselman.Uebungen.html

Übungen zur Analysis II SS 2006

Lösungshinweise Blatt 7

Aufgabe 25) Lösungsskizze (a) Sei $r > 0$ vorgegeben. Die Funktion

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - r^2$$

ist stetig differenzierbar. Die Menge $M = g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | g(x) = 0\}$ ist abgeschlossen (als Urbild von 0 unter der stetigen Abbildung g) und beschränkt (da sie in der abgeschlossenen Kugel vom Radius r um 0 enthalten ist, und damit kompakt. Da $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig ist, nimmt f auf der kompakten Menge M Maximum und Minimum an. Deshalb hat f auf M ein lokales Minimum y.

Es gilt $\frac{\partial g}{\partial x_i}(y) = 2y_i$. Wegen $y \neq 0$ ist deshalb $dg(y) \neq 0$, so dass die Aufgabe 23 angewandt werden kann: es folgt: $df(y) = \tilde{\lambda} \cdot dg(y)$ für ein geeignetes $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$.

Das bedeutet:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \tilde{\lambda} \cdot 2y_i = \lambda \cdot y_i \qquad \text{für } i = 1, \dots n$$

mit $\lambda = 2\tilde{\lambda}$. □

(b) Sei $A = (a_{ij})$ eine reelle symmetrische Matrix. Wir wenden Teil (a) auf die Funktion $f(x) = {}^t xAx = \sum_{k,l=1}^{n} x_k a_{kl} x_l$ an. Es gilt nach der Produktregel:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y) = \sum_{l=1}^{n} a_{il} y_l + \sum_{k=1}^{n} y_k a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = 2(Ay)_i$$

(Hier wurde einerseits die Variable l durch k ersetzt und außerdem wurde $a_{ik} = a_{ki}$ ausgenutzt.)

Nach Teil (a) gibt es $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass gilt: $2(Ay)_i = \lambda y_i$. Das bedeutet aber $Ay = \tilde{\lambda} y$ mit $\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{2}$. Wegen $y \neq 0$ ist damit $\tilde{\lambda}$ ein Eigenwert und y ein zugehöriger Eigenvektor. □

Aufgabe 26) Lösungsskizze: Wir identifizieren $M(n,n,\mathbb{R})$ nach Wahl der aus Elementarmatrizen E_{kl} bestehenden Basis mit $\mathbb{R}^{n^2}$ (die Menge $O_{3,1}$ liegt also im $\mathbb{R}^{16}$) und entsprechend $M(n,n,\mathbb{C})$ nach Wahl der aus den Matrizen E_{kl} und $i \cdot E_{kl}$ bestehenden Basis mit dem $\mathbb{R}^{2n^2}$.
Die vier Mengen sind abgeschlossene Teilmengen des jeweiligen $\mathbb{R}^M$, da sie als Urbild eines Punktes unter einer stetigen Abbildung geschrieben werden können (vgl. LA II Skript von Prof. Kreck).
Nach dem Satz von Heine-Borel sind sie deshalb genau dann kompakt, wenn sie beschränkt sind.

Für $A = (a_{kl})$ gilt genau dann $A \cdot {}^tA = E$, wenn $\sum_{l=1}^n a_{kl}a_{jl}$ den Wert 1 für $k = j$ und den Wert 0 im Fall $k \neq j$ annimmt.
Aus $1 = \sum_{l=1}^n a_{kl}a_{kl} = \sum_{l=1}^n a_{kl}^2$ folgt aber $|a_{kl}| \leq 1$ für alle k, l. Deshalb ist die Menge $O_n(\mathbb{R})$ der reellen orthogonalen Matrizen abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Bezeichnet E_k die Einheitsmatrix in $M(k,k,\mathbb{R})$, so rechnet man leicht nach, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ die Matrizen der Form

$$A(y) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+y^2} & iy & 0 \\ iy & -\sqrt{1+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2} \end{pmatrix}$$

in $O_n(\mathbb{C})$ enthalten sind. Da diese Teilmenge nicht beschränkt ist, kann $O_n(\mathbb{C})$ nicht kompakt sein.

Indem wir eine komplexe Matrix A in der Form $A = B + iC$ schreiben, bekommen wir die folgende Beschreibung

$$(*) \qquad U_n(\mathbb{R}) =$$

$$\{(B,C) \in M(n,n,\mathbb{R}) \times M(n,n,\mathbb{R}) |\ B \cdot {}^tB + C \cdot {}^tC = E,\ B \cdot {}^tC = C \cdot {}^tB\}.$$

Aus der Gleichung $B \cdot {}^tB + C \cdot {}^tC = E$ folgt für $B = (b_{kl}),\ C = (c_{kl})$: $\sum_{l=1}^n (b_{kl}^2 + c_{kl}^2) = 1$, woraus sich wie oben $|b_{kl}| \leq 1$ und $|c_{kl}| \leq 1$ ergibt.
Damit ist $U_n(\mathbb{R})$ eine beschränkte und somit kompakte Menge.
Bemerkung: In der Gleichung $(*)$ kann man $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen Körper K ersetzen, und erhält auf diese Weise eine Definition von unitären Matrizen über beliebigen Körpern. Das erklärt auch, warum man die unitären Matrizen mit $U_n(\mathbb{R})$ und nicht mit $U_n(\mathbb{C})$ bezeichnet.

Man kann sich überlegen (Übungsaufgabe in linearer Algebra), dass $U_n(K) \cong GL_n(K)$ gilt, sofern der Körper K eine Quadratwurzel i aus -1 besitzt. Diese Bijektion kann als stetiger Gruppenisomorphismus gewählt werden.

Nun zur Lorentzgruppe $O_{3,1}(\mathbb{R})$: diese enthält für $y \in \mathbb{R}$ die Matrizen der Form

$$B(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1+y^2} & y \\ 0 & 0 & y & \sqrt{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

Da diese Teilmenge nicht beschränkt ist, ist die Lorentzgruppe nicht kompakt. $\square$

Aufgabe 27) Lösungsskizze: (a) Ist (y_n) eine beliebige Folge von Elementen aus Y, so können wir dazu wegen der Surjektivität von f eine Folge (x_n) von Elementen aus X wählen mit $f(x_n) = y_n$. Da X folgenkompakt ist, besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge. Sei etwa $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ für eine Folge natürlicher Zahlen n_k. Aus der Stetigkeit von f ergibt sich dann

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}.$$

Damit ist gezeigt, dass eine beliebige Folge von Elementen aus Y eine konvergente Teilfolge besitzt. Y ist deshalb (folgen-)kompakt. $\square$

(b) Sei $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ der Grenzwert einer in Y konvergenten Folge. Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(y) = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n)$ gilt. Wäre das nicht der Fall, so würde es eine offene Kugel B um $f^{-1}(y)$ geben, so dass unendlich viele Folgenglieder der Folge $f^{-1}(y_n)$ in $X - B$ enthalten sind. Da B offen in X ist, ist $X - B$ in X abgeschlossen. Da X kompakt ist, ist deshalb auch $X - B$ kompakt. Die in $X - B$ gelegene Teilfolge muss deshalb eine konvergente Teilfolge haben: sei etwa $x = \lim_{k\to\infty} f^{-1}(y_{n_k}) \in X - B$. Dann folgt einerseits $x \neq f^{-1}y$ wegen $x \notin B$, andererseits

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f\left(f^{-1}(y_{n_k})\right) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y,$$

was ein Widerspruch ist.
Also vertauscht f^{-1} mit Grenzwerten, und ist damit eine stetige Abbildung. $\square$

Aufgabe 28) Lösungsskizze: (a) Wir wollen die Stetigkeit von F in einem Punkt x_0 zeigen.

Zunächst bemerken wir, dass $F(x_0)$ wohldefiniert ist, weil die stetige Funktion $k \mapsto f(x_0, k)$ auf dem Kompaktum K ihr Maximum annimmt, so dass dieses Maximuma als Supremum $\sup_{k \in K} f(x_0, k)$ endlich ist.

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es wegen der Annahme des Maximums $k_0 \in K$ mit $f(x_0, k_0) = F(x_0)$. Wegen der Stetigkeit von f im Punkt (x_0, k_0) gibt es $\delta' > 0$, so dass aus $d(x, x_0) < \delta'$ folgt, dass $f(x, k_0) > f(x_0, k_0) - \epsilon$ gilt. Dann folgt aber

$$F(x) \geq f(x, k_0) > f(x_0, k_0) - \epsilon = F(x_0) - \epsilon.$$

Weiterhin gibt es für jedes $k \in K$ ein $\delta_k > 0$, so dass aus $d\left((x, k'), (x_0, k)\right) < \delta_k$ folgt, dass $f(x, k') < f(x_0, k) + \epsilon$ ist. Dann gilt aber auch $f(x, k') < sup_{k \in K} f(x_0, k) + \epsilon = F(x_0) + \epsilon$. Die Familie der offenen Kugeln $K_{\delta_k}(k)$ für $k \in K$ überdeckt K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $K \subset K_{\delta_{k_1}}(k_1) \cup \ldots \cup K_{\delta_{k_n}}(k_n)$. Sei $\delta = \min(\delta_{k_1}, \ldots, \delta_{k_n}, \delta')$.
Sei jetzt $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$. Für beliebiges $k' \in K$ gibt es ein $i \leq n$ mit $k' \in B_{\delta_{k_i}}(k_i)$. Dann ist $d((x, k'), (x_0, k_i)) = \max(d(x, x_0), d(k', k_i)) < \max(\delta, \delta_{k_i}) = \delta_{k_i}$, so dass wir folgern können $f(x, k') < F(x_0) + \epsilon$. Da das für alle $k' \in K$ gilt, folgt $F(x) < F(x_0) + \epsilon$. (Dass wir hier $<$ statt $\leq$ haben, liegt an der Kompaktheit von K, ist aber für die Argumentation nicht entscheidend.)
Insgesamt bekommen wir $|F(x) - F(x_0)| < \epsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$. Daraus folgt die Stetigkeit von F im Punkt x_0. $\square$

(b) Es gilt $F(0) = 0$ wegen $f(0, k) = \sin(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$, aber es ist $F(x) = 1$ für alle $x \neq 0$, denn man hat $f(x, \frac{\pi}{2x}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\sin(xk) \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{R}$.
Daraus folgt sofort, dass F bei 0 unstetig ist, aber an allen anderen Stellen stetig ist.