Mathematisches Institut der Uni Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/ Dr. U. Weselmann

Übungen "Komplexe Mannigfaltigkeiten" WS 08/09

Blatt 9   Abgabe bis Freitag 19.12.2008 14:15

Aufgabe 20) (a) Zeige, dass die Fermat-Kubik

$$K = \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) | x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0\}$$

eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit ist.

(b) Auf K liegen die 27 Geraden L_{ijk} $(0 \leq i, j, k \leq 2)$ mit

$$L_{0jk} = \{(a : -\zeta^j a : b : -\zeta^k b) | (a : b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$$
$$L_{1jk} = \{(a : b : -\zeta^j a : -\zeta^k b) | (a : b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$$
$$L_{2jk} = \{(a : b : -\zeta^k b : -\zeta^j a) | (a : b) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\}$$

mit $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{3})$. Zeige, dass sich jede Gerade mit genau 10 anderen Geraden schneidet.

(c) Zeige, dass es genau eine holomorphe Abbildung $\phi : K \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ gibt, so dass

$$\phi(x : y : z : w) = ((x + y)(z + w) : (x + y)(\zeta x + y) : (z + w)(\zeta z + w))$$

für $(x : y : z : w) \in K \backslash (L_{000} \cup L_{001} \cup L_{010})$ ist. (Hinweis: Forme die Fermatgleichung in eine Identität der Form $(x + y)(\zeta x + y)(\zeta^2 x + y) = \ldots$ um und benutze die Homogenität, um ϕ auf anderen offenen Teilmengen von K zu beschreiben.

(d)Beschreibe die Bilder der 27 Geraden unter der Abbildung ϕ.

(e) Zeige, dass die Fasern $\phi^{-1}(P)$ für $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ entweder aus genau einem Punkt von K oder aus einer der Geraden bestehen.

(1+2+2+3+2=10 Punkte)