Eine Dimensionsformel für Darstellungen von $Gl_n \times Gl_n$

Uwe Weselmann

Für festes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir:

$$\Theta = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n \mid n \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0\}.$$

Für $\lambda \in \Theta$ definieren wir $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*) \in \Theta$ durch

$$\lambda_j^* \;=\; \#\{i|1 \leq i \leq n, \lambda_i \geq j\}.$$

Dann gilt $(\lambda^*)^* = \lambda$ für alle λ in Θ.

Weiterhin haben wir eine disjunkte Zerlegung: $\Theta = \bigcup_{0 \leq e \leq n} \Theta_e$ mit

$$\Theta_e \;=\; \{\lambda \in \Theta \mid \lambda_e \geq e, \lambda_{e+1} \leq e\},$$

wobei die Bedingungen $\lambda_0 \geq 0$ und $\lambda_{n+1} \leq n$ ignoriert werden.

Setzt man

$$\tilde{\lambda}_i = \lambda_i + n + 1 - i \qquad \text{und} \qquad \tilde{\lambda}_j^* = \lambda_j^* + n + 1 - j$$

sowie $\tilde{\lambda} = \{\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n\} \subset \{1, \ldots, 2n\} =: Z_{2n}$ (analog wird auch $\tilde{\lambda}^*$ definiert), so vermittelt die Zuordnung $\lambda \mapsto \tilde{\lambda}$ eine Bijektion zwischen Θ und der Menge der n-elementigen Teilmengen von Z_{2n}: die n-tupel $(\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_n)$ können nämlich mit der Menge ihrer Komponenten identifiziert werden, da die Einträge streng monoton fallend geordnet sind.

Lemma 1 *Es gilt genau dann $\lambda \in \Theta_e$, wenn $\tilde{\lambda} \cap \{n+1, \ldots, 2n\}$ genau e Elemente enthält.*

Beweis: $\lambda_e \geq e$ ist äquivalent zu $\tilde{\lambda}_e \geq n + 1$ und $\lambda_{e+1} \leq e$ ist äquivalent zu $\tilde{\lambda}_{e+1} \leq n$, woraus sofort für $\lambda \in \Theta_e$ folgt: $\tilde{\lambda} \cap \{n+1, \ldots, 2n\} = \{\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_e\}$.

Wir bezeichnen mit $\tilde{\lambda}^c = Z_{2n} - \tilde{\lambda}$ das Komplement von $\tilde{\lambda}$ in Z_{2n}.

Lemma 2 *Es gilt* $\quad \tilde{\lambda}^* = \{2n + 1 - x \mid x \in \tilde{\lambda}^c\} \quad =: \; 2n + 1 - \tilde{\lambda}^c.$

Beweis: Zu $\tilde{\lambda}_i \in \tilde{\lambda}$ gehört $k := \lambda_i = \tilde{\lambda}_i + i - n - 1$. Wegen der Anordnung der λ_ν folgt aus der Definition der λ^*_μ:

$\lambda^*_k \geq i$ und $\lambda^*_{k+1} \leq i - 1$.

Daraus folgt aber:

$\tilde{\lambda}^*_k \geq n+1+i-k = 2n+2-\tilde{\lambda}_i$ und $\tilde{\lambda}^*_{k+1} \leq n+1+(i-1)-(k+1) = 2n-\tilde{\lambda}_i$.

Damit ist gezeigt, dass für $x = \tilde{\lambda}_i \in \tilde{\lambda}$ die Zahl $2n + 1 - x$ nicht in der Menge $\tilde{\lambda}^*$ enthalten sein kann. Deshalb ist die linke Seite der behaupteten Gleichung in der rechten enthalten. Da aber beide Seiten n Elemente haben, folgt das Lemma.

Für $\lambda \in \Theta$ sei $\pi(\lambda) = \pi(\tilde{\lambda})$ die irreduzible Darstellung von Gl_n mit höchstem Gewicht λ. Weiterhin sei $deg(\lambda) = deg(\tilde{\lambda}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Wir fixieren jetzt eine $n - e$ elementige Teilmenge U von $Z_n = \{1, \dots, n\}$.

Proposition

$$\sum_{\lambda \in \Theta_e,\ \tilde{\lambda} \cap Z_n = U} (-1)^{deg(\lambda)} \cdot dim(\pi(\lambda)) \cdot dim(\pi(\lambda^*)) \quad = \quad (-1)^e.$$

Zum Beweis erinnern wir zunächst an die Dimensionsformel für irreduzible Darstellungen mit höchstem Gewicht (Humphreys: Introduction to Lie algebras and Representation theory, Corollary in 24.3):

$$dim(\pi(\lambda)) \quad = \quad \frac{\prod_{\alpha>0}(\lambda+\delta,\alpha)}{\prod_{\alpha>0}(\delta,\alpha)}.$$

Hier können wir das euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ mit Standardbasis e_i nehmen. Die α durchlaufen die positiven Wurzeln $e_i - e_j$ mit $i < j$. Die halbe Summe der positiven Wurzeln

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha>0} \alpha = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \dots, \frac{1-n}{2}\right)$$

kann durch den Vektor $\delta' = (n, n-1, \dots, 1)$ ersetzt werden, da nur Skalarprodukte mit den α betrachtet werden. Dann ist $\lambda + \delta'$ der Vektor $(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_n)$.

Damit lautet die Dimensionsformel:

$$dim(\pi(\lambda)) \quad = \quad \frac{\prod_{i<j}(\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_j)}{\prod_{i<j}(j-i)}.$$

Für $i \in Z_n$ setzen wir $b_i = 2n+1-i$. Für $\lambda \in \Theta_e$ sei $S = \{i \in Z_n | b_i \in \tilde{\lambda}\}$. Das ist eine e-elementige Teilmenge von Z_n, die zusammen mit der Menge U die Menge $\tilde{\lambda}$ und damit $\lambda \in \Theta_e$ eineindeutig beschreibt. Wir bezeichnen mit S^c das Komplement von S in Z_n und mit $R = Z_n - U$ das Komplement von U in Z_n. Für U schreiben wir auch R^c. Weiterhin setzen wir $a_i = -i$ für $i \in Z_n$.

Damit gilt dann

$$dim(\pi(\lambda)) \quad =$$

$$\prod_{1\le i<j\le n} \frac{1}{(a_i - a_j)} \cdot \prod_{i,j\in R^c,\, i<j} (a_i - a_j) \cdot \prod_{i\in R^c, j\in S} (a_i + b_j) \cdot \prod_{i,j\in S,\, i<j} (b_i - b_j).$$

Entsprechend folgt wegen Lemma 2:

$$dim(\pi(\lambda^*)) \quad = \quad \frac{\prod_{i<j}(\tilde{\lambda}^*_i - \tilde{\lambda}^*_j)}{\prod_{i<j}(j-i)} = \frac{\prod_{i<j}((2n+1-\tilde{\lambda}^*_j) - (2n+1-\tilde{\lambda}^*_i))}{\prod_{i<j}(b_i - b_j)}$$

$$= \quad \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1}{(b_i - b_j)} \cdot \prod_{i,j\in R,\, i<j} (a_i - a_j) \cdot \prod_{i\in R, j\in S^c} (a_i + b_j) \cdot \prod_{i,j\in S^c,\, i<j} (b_i - b_j).$$

Um die Vorzeichen zu verarbeiten, setzen wir $deg(R) = \sum_{i\in R} i$ und $deg(S) = \sum_{j\in S} j$. Dann gilt:

$$deg(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i - \sum_{i=1}^{n} (n+1-i)$$

$$= \sum_{i=1}^{e} \tilde{\lambda}_i + \sum_{i=e+1}^{n} \tilde{\lambda}_i - \sum_{j=1}^{n} j = \sum_{i\in S} b_i - \sum_{j\in R} j = (2n+1)\cdot e - deg(S) - deg(R).$$

Daraus folgt sofort:

$$(-1)^{deg(\lambda)} \cdot (-1)^e \quad = \quad (-1)^{deg(R)+deg(S)}.$$

Um die behauptete Formel zu beweisen, rechnen wir jetzt allgemeiner, bevor wir zu "unseren" a_i und b_j zurückkehren: Sei K ein beliebiger Körper, und seien $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n \in K$, so dass $a_i + b_j \neq 0$ für alle Paare $(i,j) \in Z_n^2$ gilt. Wir betrachten die Matrix:

$$M \quad = \quad \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n} .$$

Die Determinante lässt sich mit Gauß-Elimination und vollständiger Induktion berechen (vgl. Rapoport/Weselmann, Übungen zur linearen Algebra I, Universität Bonn, WS 1988/89, Aufgabe 44):

$$\det(M) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{a_i + b_j} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left((a_i - a_j) \cdot (b_i - b_j) \right).$$

Da diese Formel auch auf die Minoren von M angewandt werden kann, kann man die Koeffizienten der inversen Matrix als Quotient zweier solcher Produkte berechnen: $N = M^{-1} = (n_{ij})$ berechnet sich als

$$n_{ij} = \frac{1}{a_j + b_i} \cdot c_i \cdot d_j$$

mit

$$\begin{aligned} c_i &= (-1)^i \cdot \prod_{\mu=1}^{n} (a_\mu + b_i) \cdot \prod_{\mu=1}^{i-1} \frac{1}{b_\mu - b_i} \cdot \prod_{\mu=i+1}^{n} \frac{1}{b_i - b_\mu} \\ d_j &= (-1)^j \cdot \prod_{\nu=1}^{n} (a_j + b_\nu) \cdot \prod_{\nu=1}^{j-1} \frac{1}{a_\nu - a_j} \cdot \prod_{\nu=j+1}^{n} \frac{1}{a_j - a_\nu}. \end{aligned}$$

Die inverse Matrix N ist also das Produkt der transponierten Matrix ${}^tM$ mit zwei Diagonalmatrizen.

Aus $MN = E$ folgt wegen der Funktorialität der äußeren Potenz: $\Lambda^e(M) \cdot \Lambda^e(N) = id_{\Lambda^e(K^n)}$. Dabei sind $\Lambda^e(M) = (m_{RS})$ und $\Lambda^e(N) = n_{ST}$ Matrizen, deren Zeilen bzw. Spalten durch die e elementigen Teilmengen R, S, T von Z_n indiziert werden.

Die Determinantenformel liefert:

$$m_{RS} = \prod_{i \in R,\, j \in S} \frac{1}{a_i + b_j} \cdot \prod_{i<j,\, i,j \in R} (a_i - a_j) \cdot \prod_{i<j,\, i,j \in S} (b_i - b_j)$$

und analog folgt für die inverse Matrix:

$$n_{ST} = m_{TS} \cdot \prod_{i \in S} c_i \cdot \prod_{j \in T} d_j.$$

Die Produktformel für die äußeren Potenzen der Matrizen liefert jetzt

$$1 = \sum_S \ m_{RS} \cdot n_{SR} \ = \sum_S (m_{RS})^2 \ \cdot \prod_{j \in S} c_j \ \cdot \prod_{i \in R} d_i.$$

Das lässt sich jetzt ausrechnen:

In dem mit S indizierten Summanden ist das Produkt der in den a_i und b_j gemischten Terme:

$$\left(\prod_{(i,j) \in R \times S} \frac{1}{a_i + b_j} \right)^2 \cdot \prod_{(i,j) \in Z_n \times S} (a_i + b_j) \ \cdot \prod_{(i,j) \in R \times Z_n} (a_i + b_j)$$
$$= \prod_{(i,j) \in R^c \times S} (a_i + b_j) \ \cdot \prod_{(i,j) \in R \times S^c} (a_i + b_j).$$

Die Terme in den a_i lassen sich nach Erweitern in der folgenden Form darstellen:

$$\left(\prod_{(i,j) \in R \times R,\, i<j} (a_i - a_j) \right)^2 \cdot \prod_{(i,j) \in Z_n \times R,\, i<j} \frac{1}{a_i - a_j} \ \cdot \prod_{(i,j) \in R \times Z_n,\, i<j} \frac{1}{a_i - a_j}$$

$$= \prod_{(i,j) \in R \times R,\, i<j} (a_i - a_j) \cdot \prod_{(i,j) \in R^c \times R^c,\, i<j} (a_i - a_j) \cdot \prod_{(i,j) \in Z_n \times Z_n,\, i<j} \frac{1}{a_i - a_j}.$$

Entsprechend erhalten wir als Produkt über die Terme in den b_i:

$$= \prod_{(i,j) \in S \times S,\, i<j} (b_i - b_j) \cdot \prod_{(i,j) \in S^c \times S^c,\, i<j} (b_i - b_j) \cdot \prod_{(i,j) \in Z_n \times Z_n,\, i<j} \frac{1}{b_i - b_j}.$$

Das Vorzeichen ergibt sich aufgrund der Vorzeichen in den c_i und d_j zu $(-1)^{deg(R)+deg(S)}$.

Insgesamt lautet die Formel dann:

$$1 = \left(\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{(a_i - a_j)(b_i - b_j)} \right) \cdot (-1)^{deg(R)} \cdot \prod_{(i,j) \in R \times R \cup R^c \times R^c \; i<j} (a_i - a_j) \cdot$$

$$\cdot \sum_{S \subset Z_n, \, \#S = e} (-1)^{deg(S)} \cdot \prod_{(i,j) \in R \times S^c \cup R^c \times S} (a_i + b_j) \cdot \prod_{(i,j) \in S \times S \cup S^c \times S^c, \, i<j} (b_i - b_j).$$

Setzt man darin $b_i = 2n + 1 - i$ und $b_i = -i$ ein und berücksichtigt die Formeln für $dim(\pi(\lambda))$ und $dim(\pi(\lambda^*))$ sowie die Vorzeichenformel, so erhält man genau die in der Proposition behauptete Formel.