Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 5 Abgabe bis zum 25.11.2005 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie maximal 3 Aufgaben:

Aufgabe 17) (a) Zu jedem $x \geq 0$ in $\mathbb{R}$ gibt es nach Aufgabe 14 (der Fall $x = 0$ ist trivial) eine Zahl $y \in \mathbb{R}, y \geq 0$ mit $y^2 = x$. Zeigen Sie, dass y durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist. Bezeichnung: $y = \sqrt{x}$.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ein $w = c + id \in \mathbb{C}$ gibt mit $w^2 = z$ und geben Sie Formeln für c und d an.

(c) Für $z \in \mathbb{C}$ sei $|z| = \sqrt{N(z)} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. Zeigen Sie für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \text{und} \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

(5 Punkte = 1+2+2)

Aufgabe 18) (a) Sei (a_n) eine Nullfolge. Setze

$$b_n = a_n - a_{n+1}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} b_n$ konvergiert und dass der Grenzwert gleich a_m ist.

(b) Zeigen Sie die Konvergenz und berechnen Sie den Grenzwert folgender Reihen:

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \qquad \sigma_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n} \qquad \sigma_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

(5 Punkte = 2+3·1)

Aufgabe 19) Für natürliche Zahlen $0 \leq k \leq n$ ist der Binomialkoeffizient definiert durch :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \text{gesprochen: } n \text{ über } k.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und für $0 \leq k < n$ ist

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(b) $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k}.$$

(c) Es ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$. Ist A eine n-elementige Menge, so ist $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen.

(6 Punkte = 2+2+2)

Aufgabe 20) Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zwei Cauchyfolgen heißen äquivalent, wenn ihre Differenz eine Nullfolge ist. Zeigen Sie:

(a) Ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge und $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen, so ist die Teilfolge $(b_n)_{n\geq 0}$ mit $b_n = a_{k_n}$ zur Folge (a_n) äquivalent.

(b) Existiert $b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_{k_n} \in K$, so gilt auch $b = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(c) Eine Cauchyfolge (b_n) heiße geometrisch abklingend, wenn $|b_n - b_m| < 2^{-n}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ gilt. Zeigen Sie, dass jede Cauchyfolge zu einer geometrisch abklingenden Cauchyfolge äquivalent ist.

(d) Jede Cauchyfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist zu einer Cauchyfolge $(c_n)_{n\geq 0}$ mit streng monoton steigenden Folgengliedern (d.h. $c_n < c_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) äquivalent.

(7 Punkte = 2+1+2+2)