Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

Übungen zur Analysis II SS 2006

Blatt 11   Abgabe bis zum 14.07.2006 um 11:00 Uhr

Bearbeiten Sie drei der vier Aufgaben!

Aufgabe 41) Zeigen Sie: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

ist Lebesgue-integrierbar. Berechnen Sie

$$V = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 42) Sei $n \in \mathbb{N}$ positiv. Wir bezeichnen das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle . , . \rangle$

(a) Zeigen Sie: die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \left(\frac{\langle x, x\rangle - 1}{\langle x, x\rangle + 1}, \frac{2x}{\langle x, x\rangle + 1} \right)$$

ist differenzierbar. Sie ist eine injektive Abbildung in die Einheitssphäre $S^n = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} | \langle y, y\rangle = 1\}$. Was ist das Bild? Berechnen Sie die Ableitung $D\phi_x$ in einem beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ als lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Bestimmen Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\langle D\phi_x(y), D\phi_x(z)\rangle = f(x) \cdot \langle y, z\rangle \qquad \text{für alle } x, y, z \in \mathbb{R}^n.$$

(5=3+2 Punkte)

Aufgabe 43) Sei X ein metrischer Raum und $g : X \to \mathbb{R}_{>0}$ eine positive stetige Funktion. Sei $I : C_c(X) \to \mathbb{R}$ ein Integral, welches der Daniell-Bedingung genügt.

(a) Zeigen Sie: $I_g : C_c(X) \to \mathbb{R},\ f \mapsto I(f \cdot g)$ ist ein Integral, welches der Daniell-Bedingung genügt.

(b) Zeigen Sie: Eine reellwertige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann bezüglich I_g Daniell-Lebesgue-integrierbar, wenn $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ bezüglich I Daniell-Lebesgue-integrierbar ist. Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so gilt $I_g(f) = I(g \cdot f)$.

(4=2+2 Punkte)

Aufgabe 44) Sei

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [2n, 2n+1] \subset \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad A_k = 3^{-k} \cdot A \text{ für } k \in \mathbb{N}$$

sowie

$$X = [0,1] \cap \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

Zeigen Sie, dass $X \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist.

(4 Punkte)