Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

Prof. Dr. R. Weissauer/Dr. U. Weselmann

http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~weselman/Uebungen.html

Übungen zur Analysis I WS 2005/2006

Blatt 1, Abgabe bis zum 28.10.2005 um 11:00 Uhr

Aufgabe 1) wird in der ersten Übungsstunde als Präsenzaufgabe besprochen:

Beweisen Sie unter Verwendung der Körperaxiome, dass in einem Körper K für alle Elemente $x, y, z \in K$ folgende Rechenregeln gelten:

(a) $-(-x) = x$ und im Falle $x \neq 0$ auch $\frac{1}{1/x} = x$

(b) $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$

(c) Das Produkt $x \cdot y$ ist genau dann Null, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ ist.

Aufgabe 2) In einem geordneten Körper K gelten für alle Elemente $x, y, u, v \in K$ folgende Rechenregeln:

(a) Aus $x > y > 0$ folgt $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$.

(b) Aus $x > 0$ und $y < 0$ folgt $x \cdot y < 0$. Aus $x < 0$ und $y < 0$ folgt $x \cdot y > 0$.

(c) Aus $x > y$ und $u > v$ folgt $x + u > y + v$.

Beweisen Sie unter Verwendung der Axiome eines geordneten Körpers zwei von diesen drei Rechenregeln.

(4 Punkte)

Aufgabe 3) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad = \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

(4 Punkte)

Zusatzfragen außerhalb der Wertung: Interpretieren Sie die rechte Seite als Flächeninhalt der Rechtecke, die zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = 1/x$ und der x-Achse eingeklemmt sind und deren kurze Seiten aus einer Unterteilung des Intervalls von $1/2$ bis 1 in n gleiche Teile bestehen. Können Sie mit Ihren Mathematik-Schulkenntnissen damit den Grenzwert der linken Seite für $n \to \infty$ bestimmen?

Aufgabe 4) Für einen Körper F und ein Element $d \in F$ betrachten wir die Menge $K := \{\ (x, y)\ :\ x, y \in F\ \}$ und die Abbildungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ gegeben durch:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 + d y_1 y_2\ ,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Man kann zeigen, dass $(K, +, \cdot)$ alle Körperaxiome eventuell bis auf die Existenz des Inversen bzgl. der Multiplikation erfüllt. Das Nullelement von K ist $0 = 0_K := (0, 0)$, und das Einselement von K ist $1 = 1_K := (1, 0)$. Besprechen Sie einige Axiome in der Übungsgruppe.

Hausaufgabe: (a) Beweisen Sie in K das Distributivgesetz sowie das Assoziativgesetz der Multiplikation.

(b) Zeigen Sie, dass K genau dann ein Körper ist, wenn die Gleichung $x^2 = d$ keine Lösung für $x \in F$ hat.

Zeigen Sie dazu:

Gilt $x^2 = d$, so hat $(x, 1) \in K$ kein Inverses bezüglich der Multiplikation.

Gibt es kein $x \in F$ mit $x^2 = d$, so gilt $a^2 - b^2 \cdot d \neq 0$ für alle $(a, b) \neq 0_K$.

(6 Punkte)